Stanisław Białas, Adam Ćmiel, Andrzej Fitzke

Matematyka

dla studiów inżynierskich

cz.I Algebra i geometria

BG AGH

1573 pozycja wydawnictw dydaktycznych
Akademii Górniczo-Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

© Wydawnictwa AGH, Kraków 2000
ISSN 0239–6114

Redaktor Naczelny Uczelnianych Wydawnictw
Naukowo-Dydaktycznych: *prof. dr hab. inż. Andrzej Wichur*

Z-ca Redaktora Naczelnego: *mgr Beata Barszczewska-Wojda*

Recenzent: *prof. dr hab. inż. Stanisław Kasprzyk*

Skrypt jest adresowany do studentów studiów inżynierskich AGH. Początkowe strony skryptu, to powtórka zagadnień ze szkoły średniej, elementy logiki i teorii zbiorów.
W ramach algebry omówiono: liczby zespolone, macierze i wyznaczniki oraz układ równań liniowych. Wektory, geometria analityczna na płaszczyźnie i w przestrzeni, to hasła dotyczące geometrii. Forma prezentacji matematyki w skrypcie jest bardzo elementarna. Oprócz definicji i twierdzeń zamieszczono dużo przykładów z rozwiązaniami, zrezygnowano z dowodów. Na końcu każdego rozdziału podano zadania, przeznaczone do samodzielnego rozwiązania przez Czytelnika.

The book (handbook) is intended mainly for engineering students of the Academy of Mining and Metallurgy. On the firest pages of this book we revise some topics of secondary school mathematics, logic and set theory. The next chapter covers complex numbers, matrices, determinants and linear equations.
The vector algebra, plane analytical geometry and three dimentional geometry fill the last chapter. The matter is presented in a very elementary way: the definitions, theorems as well as a numerous solved examples are given, but we renounced the more detailed and rigorous proofs. The reader interested in calculus can find the exercias at the and of any chapter.

Projekt okładki i strony tytułowej: *Beata Barszczewska-Wojda*

Opracowanie edytorskie: *Ewa Kmiecik*

Korekta: *Ewa Kmiecik*

Układ typograficzny i skład komputerowy systemem TEX:
Jacek Kmiecik, pre**TEX**t, tel. 0 501 494 601

Redakcja Uczelnianych Wydawnictw Naukowo-Dydaktycznych
al. Mickiewicza 30, 30–059 Kraków
tel. 617–32–28, tel./fax 638–40–38

BG AGH

Spis treści

BG AGH

BG AGH

BG AGH

Wstęp

Skrypt jest adresowany do studentów studiów inżynierskich AGH. W ostatnich latach liczba studentów na tych studiach gwałtowanie wzrosła, a jednocześnie radykalnie zmniejszono ilość godzin przeznaczonych na nauczanie matematyki. Szczególny wzrost liczby studentów nastąpił na zaocznych studiach inżynierskich — dotyczy to prawie wszystkich wydziałów AGH.

Te fakty spowodowały, że przyszły inżynier nie ma możliwości studiowania matematyki. Student studiów inżynierskich może się uczyć jedynie wybranych zagadnień „królowej nauki".

W tej sytuacji Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki AGH zaproponował napisanie skryptu z matematyki, który treścią i formą byłby adekwatny do liczby godzin i możliwości studentów studiów inżynierskich, szczególnie zaocznych.

Początkowe strony skryptu są „pewną formą powtórki" wybranych zagadnień z programu matematyki w szkole średniej. Przedmiotem rozważań pierwszej części skryptu są: liczby zespolone, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych, elementy algebry wektorów, geometria analityczna na płaszczyźnie i w przestrzeni. Druga część skryptu będzie dotyczyć rachunku różniczkowego i całkowego.

Forma prezentacji matematyki w skrypcie jest bardzo elementarna. Oprócz definicji i twierdzeń zamieszczono dużo przykładów z rozwiązaniami; zrezygnowano z dowodów, a przedstawione dowody stanowią jedynie formę ćwiczeń. Przykłady z rozwiązaniami mają stanowić pomoc w zrozumieniu podstawowych pojęć i algorytmów obliczeń z algebry i geometrii analitycznej. Rysunki uzupełniają definicje, twierdzenia i przykłady. Na końcu każdego rozdziału umieszczono zadania przeznaczone do samodzielnego rozwiązania przez Czytelnika. Takich zadań, lub o takim stopniu trudności, mogą się spodziewać studenci na kolokwiach lub egzaminach.

Numeracja twierdzeń, rysunków i wzorów dotyczy danego rozdziału. Np. twierdzenie 3.1 jest pierwszym twierdzeniem w rozdziale 3.

BG AGH

Rozdział 1.

Powtórka wybranych zagadnień ze szkoły średniej

1.1. Wartość bezwzględna

Wartością bezwzględną liczby $a \in R$, którą oznaczamy przez $|a|$, nazywamy liczbę

$$|a| = \begin{cases} a & \text{gdy } a \geqslant 0, \\ -a & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$

Np. $|-6| = 6$, $|5| = 5$, $|0| = 0$.

Podstawowe własności wartości bezwzględnej podaje następujące

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli $a, b \in R$, to:*

1) $|ab| = |a|\,|b|$,
2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, *dla* $b \neq 0$,
3) $|a - b| = |b - a|$,
4) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Niech $W(x)$ będzie pewną funkcją zmiennej $x \in R$. Dowodzi się, że nierówność

$$|W(x)| \leqslant a \quad \text{dla} \quad a > 0,$$

jest równoważna nierównościom

$$-a \leqslant W(x) \leqslant a.$$

Natomiast nierówność

$$|W(x)| \geqslant a \quad \text{dla} \quad a > 0,$$

jest równoważna nierównościom

$$W(x) \leqslant -a \quad \text{lub} \quad a \leqslant W(x).$$

BG AGH

Przykład

Rozwiązać nierówność

$$|x+2| \leqslant 3 \tag{1.1}$$

W tym przykładzie $W(x) = x + 2$, $a = 3$. Stąd nierówność (1.1) jest równoważna nierównościom

$$-3 \leqslant x + 2 \leqslant 3$$

czyli

$$\begin{array}{lcr} -3 \leqslant x+2 & \text{i} & x+2 \leqslant 3 \\ -5 \leqslant x & \text{i} & x \leqslant 1. \end{array}$$

Zatem nierówność (1.1) spełniają $x \in \langle -5, 1\rangle$.

Przykład

Rozwiązać nierówność

$$|x-1| > 4 \tag{1.2}$$

Rozważana nierówność jest równoważna nierównościom

$$x - 1 < -4 \quad \text{lub} \quad 4 < x - 1$$

czyli

$$x < -3 \quad \text{lub} \quad 5 < x.$$

Oznacza to, że nierówność (1.2) spełniają $x \in (-\infty, -3)$ lub $x \in (5, \infty)$.

BG AGH

1.2. Przykłady funkcji odwrotnych. Funkcje cyklometryczne

Przykład

Weźmy pod uwagę funkcję

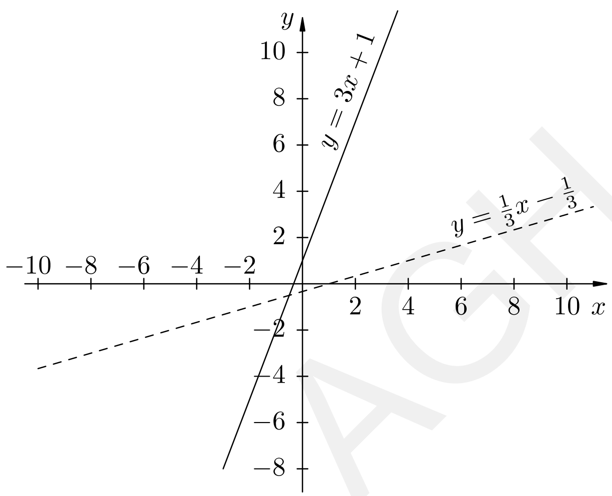
$$y = 3x + 1 \tag{1.3}$$

gdzie x jest zmienną niezależną, a y zmienną zależną. Każdej wartości $x \in R$ jest przyporządkowana wartość $y = 3x + 1$. Wykresem tej funkcji jest linia prosta, na rysunku 1.1 linia ciągła.

Z (1.3) otrzymamy

$$x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3} \tag{1.4}$$

Ostatnią zależność możemy traktować jako nową funkcję zmiennej niezależnej y. Każdej wartości $y \in R$ jest przyporządkowana wartość $x = {}^1\!/_3\, y - {}^1\!/_3$. Funkcję (1.4) nazywamy odwrotną względem funkcji (1.3). W zależności (1.4) zmienną niezależną możemy również oznaczyć przez x, a zmienną zależną przez y. Wówczas funkcja $y = {}^1\!/_3\, x - {}^1\!/_3$ jest funkcją odwrotną do funkcji (1.3). Wykresy tych funkcji są przedstawione na rysunku 1.1. Warto zwrócić uwagę, że wykres funkcji odwrotnej $y = {}^1\!/_3\, x - {}^1\!/_3$ jest zwierciadlanym odbiciem funkcji pierwotnej $y = 3x + 1$ względem prostej $y = x$ (przekątnej pierwszej i trzeciej ćwiartki układu współrzędnych).



Rys. 1.1. Wykresy funkcji $y = 3x + 1$ i $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

Przykład

Weźmy pod uwagę funkcję

$$y = x^2.$$

W tym przykładzie danej wartości zmiennej zależnej $y > 0$ odpowiadają dwie wartości zmiennej niezależnej x: $x = \pm\sqrt{y}$. Funkcja $y = x^2$ nie ma funkcji odwrotnej.

Rozważmy teraz funkcję $f\colon R \to R$ lub w innym zapisie $y = f(x)$. Niech $D(f) \subset R$ będzie dziedziną, a $\mathcal{C}\!\!\!I(f) \subset R$ przeciwdziedziną tej funkcji. Zakładamy, że funkcja $y = f(x)$ jest różnowartościowa w $D(f)$, tzn.

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in D(f)} x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Stąd wynika, że każdej wartości $y \in \mathcal{C}\!\!\!I(f)$ odpowiada dokładnie jedna wartość $x \in D(f)$ taka, że $f(x) = y$. Oznacza to, że funkcja $y = f(x)$ w zbiorze $D(f)$ ma funkcję odwrotną $x = f^{-1}(y)$.

Prawdziwe są tożsamości:

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y \qquad \text{dla} \quad y \in \reflectbox{D}(f),$$

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{dla} \quad x \in D(f).$$

Każda funkcja rosnąca (malejąca) w zadanym przedziale ma w tym przedziale funkcję odwrotną.

Przykład
Funkcja wykładnicza

$$y = a^x, \qquad \text{gdzie} \quad a > 0,$$

jest funkcją rosnącą dla $a > 1$ i malejącą dla $0 < a < 1$. Funkcja ta dla $x \in R$ ma funkcję odwrotną $x = \log_a y$.

Przykład
Funkcja logarytmiczna

$$y = \log_a x, \qquad \text{gdzie} \quad a > 0,\ a \neq 1,$$

jest funkcją rosnącą dla $a > 1$ i malejącą dla $0 < a < 1$. Funkcja ta dla $x > 0$ ma funkcję odwrotną $x = a^y$.

Przykład
Funkcja

$$y = |x|$$

dla $x \in R$ nie jest różnowartościowa, a stąd wynika, że nie ma funkcji odwrotnej w R.

Funkcje trygonometryczne

$$y = \sin x \quad \text{i} \quad y = \cos x$$

są określone na całej osi liczbowej, $D(\sin) = D(\cos) = R$. Jednak funkcje te nie są różnowartościowe w swojej dziedzinie, zatem nie mają funkcji odwrotnych dla $x \in R$.

Funkcje trygonometryczne

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{i} \quad y = \operatorname{ctg} x$$

również nie mają funkcji odwrotnych w swoich dziedzinach.

Funkcja trygonometryczna

$$y = \sin x$$

w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ jest funkcją rosnącą, a zatem w tym przedziale istnieje do niej funkcja odwrotna.

BG AGH

Funkcję odwrotną do funkcji $y = \sin x$, rozpatrywanej w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, nazywamy funkcją arcus sinus i piszemy

$$x = \arcsin y.$$

Dziedziną funkcji $\arcsin y$ jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$, a przeciwdziedziną przedział $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Zapis

$$x_0 = \arcsin y_0$$

oznacza, że x_0 jest takim kątem, mierzonym w radianach, że $x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i $y_0 = \sin x_0$.

Zatem:

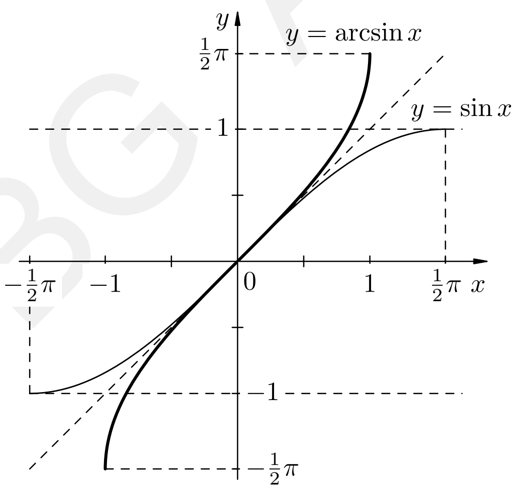
$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \qquad \text{gdyż} \quad \frac{\pi}{6} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \text{i} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{gdyż} \quad \frac{\pi}{2} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \text{i} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \text{gdyż} \quad -\frac{\pi}{2} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \text{i} \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

$$\arcsin 0 = 0, \qquad \text{gdyż} \quad 0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \text{i} \quad \sin 0 = 0.$$

Wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = \arcsin x$ są przedstawione na rysunku 1.2.



Rys. 1.2. Wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = \arcsin x$

Funkcja trygonometryczna

$$y = \cos x$$

w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ jest funkcją malejącą i w tym przedziale ma funkcję odwrotną.

BG AGH

Funkcję odwrotną do funkcji $y = \cos x$, rozpatrywanej w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$, nazywamy funkcją arcus cosinus i piszemy

$$x = \arccos y.$$

Dziedziną funkcji $\arccos y$ jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$, a przeciwdziedziną przedział $\langle 0, \pi \rangle$.

Zatem zapis

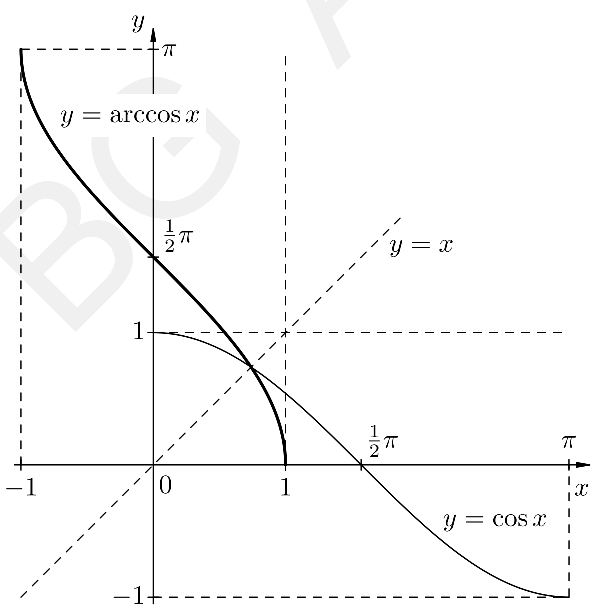
$$x_0 = \arccos y_0$$

oznacza, że x_0 jest takim kątem, mierzonym w radianach, że $x_0 \in \langle 0, \pi \rangle$ i $\cos x_0 = y_0$.

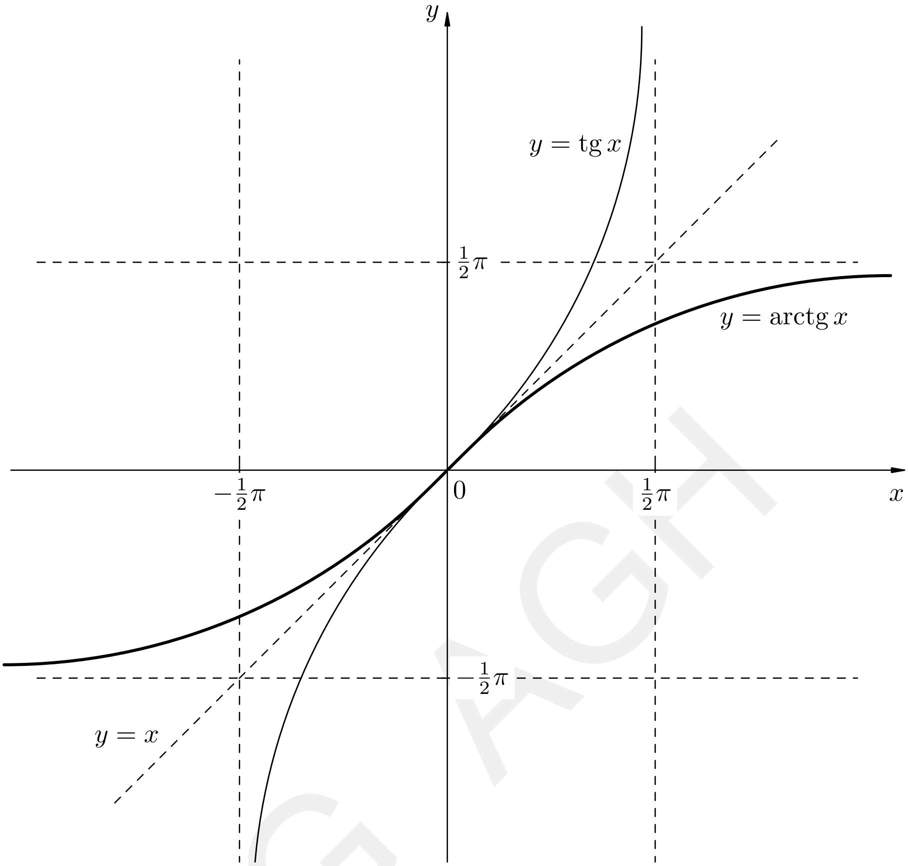
Stąd mamy:

$$\begin{array}{lll} \arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}, & \text{gdyż} \quad \dfrac{\pi}{3} \in \langle 0, \pi \rangle & \text{i} \quad \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}, \\ \arccos 1 = 0, & \text{gdyż} \quad 0 \in \langle 0, \pi \rangle & \text{i} \quad \cos 0 = 1, \\ \arccos(-1) = \pi, & \text{gdyż} \quad \pi \in \langle 0, \pi \rangle & \text{i} \quad \cos \pi = -1, \\ \arccos \left(-\dfrac{1}{2} \right) = \dfrac{2\pi}{3}, & \text{gdyż} \quad \dfrac{2\pi}{3} \in \langle 0, \pi \rangle & \text{i} \quad \cos \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}. \end{array}$$

Wykresy funkcji $y = \cos x$ i $y = \arccos x$ są przedstawione na rysunku 1.3.



Rys. 1.3. Wykresy funkcji $y = \cos x$ i $y = \arccos x$



Rys. 1.4. Wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{arctg} x$

Podobnie określamy funkcje odwrotne do funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$.

Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ jest rosnąca i w tym przedziale ma funkcję odwrotną. Funkcję odwrotną do funkcji $y = \operatorname{tg} x$, rozpatrywanej w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, nazywamy funkcją arcus tangens i piszemy

$$x = \operatorname{arctg} y.$$

Dziedziną funkcji $\operatorname{arctg} y$ jest zbiór liczb rzeczywistych, a przeciwdziedziną jest przedział $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Zapis

$$x_0 = \operatorname{arctg} y_0$$

oznacza, że x_0 jest takim kątem, mierzonym w radianach, że $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i $y_0 = \operatorname{tg} x_0$.

Zatem:

$$
\begin{array}{llll}
\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}, & \text{gdyż} \quad \dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{i} & \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} = 1, \\
\operatorname{arctg} 0 = 0, & \text{gdyż} \quad 0 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{i} & \operatorname{tg} 0 = 0, \\
\operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}, & \text{gdyż} \quad -\dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{i} & \operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1, \\
\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}, & \text{gdyż} \quad \dfrac{\pi}{3} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{i} & \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}.
\end{array}
$$

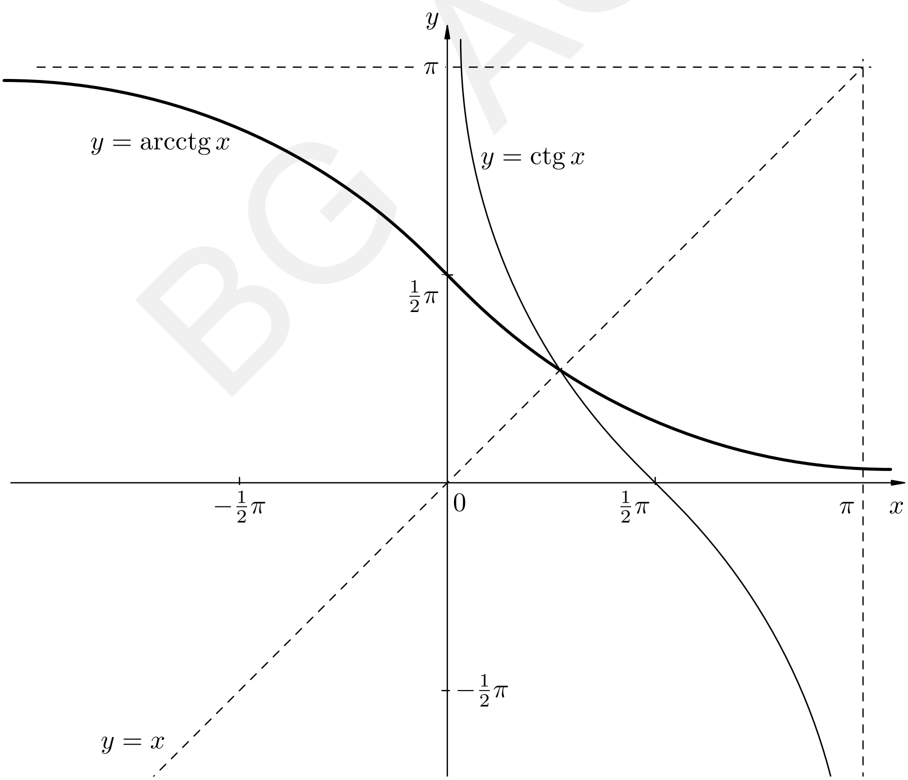
Wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{arctg} x$ są przedstawione na rysunku 1.4.

Funkcja $y = \operatorname{ctg} x$ w przedziale $(0, \pi)$ jest malejąca i w tym przedziale ma funkcję odwrotną.

Funkcję odwrotną do funkcji $y = \operatorname{ctg} x$, rozpatrywanej w przedziale $(0, \pi)$, nazywamy funkcją arcus cotangens i piszemy

$$x = \operatorname{arcctg} y.$$

Dziedziną funkcji $x = \operatorname{arcctg} y$ jest zbiór liczb rzeczywistych, a przeciwdziedziną jest przedział $(0, \pi)$. Wykres tej funkcji jest przedstawiony na rysunku 1.5.



Rys. 1.5. Wykresy funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ i $y = \operatorname{arcctg} x$

Zapis

$x_0 = \operatorname{arcctg} y_0$

oznacza, że x_0 jest takim kątem, mierzonym w radianach, że $x_0 \in \big(0, \pi\big)$ i $y_0 = \operatorname{ctg} x_0$.

Zatem:

$$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{gdyż} \quad \frac{\pi}{4} \in (0, \pi) \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{gdyż} \quad \frac{\pi}{2} \in (0, \pi) \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}, \qquad \text{gdyż} \quad \frac{3\pi}{4} \in (0, \pi) \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1.$$

Funkcje:

$$y = \arcsin x, \qquad y = \arccos x, \qquad y = \operatorname{arctg} x, \qquad y = \operatorname{arcctg} x$$

nazywają się funkcjami cyklometrycznymi lub kołowymi.

Zadania

1. Rozwiązać nierówności:

a) $|x - 1| < 4$, b) $|x + 2| > 3$, c) $|x + 2| - |x| > 0$,

d) $2x - |3x - 1| < 0$, e) $\sqrt{x^2} < 1$, f) $\big|x^2 - 3x + 2\big| < 1$,

g) $\big|x^2 - x - 3\big| > 2$.

2. Naszkicować wykresy funkcji:

a) $y = 3^x$, b) $y = -2^x$, c) $y = 1 - 2^x$,

d) $y = 2^{|x|}$, e) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, f) $y = 2^{x+|x|}$,

g) $y = \log_2 |x|$, h) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$, i) $y = |\log x|$,

j) $y = \log_2 \frac{2}{x}$, k) $y = \log_{\frac{1}{2}}(3 - x)$, l) $y = -\log_2 x + 1$,

m) $y = 3^{\frac{x^2}{|x|}}$, n) $y = |1 - 2^x|$, o) $y = \sin 2x$,

p) $y = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$, q) $y = \operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$, r) $y = 2|x| - |x + 1| - 1$,

s) $y = \big||x+2|-1\big|$, t) $y = |x+1|-|x-1|$, u) $y = \left|x^2-2\right|$,

v) $y = \dfrac{|x|}{x}$, w) $y = \left|\dfrac{x}{x-2}\right|$.

3. Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji:

a) $y = \dfrac{2^x}{3+2^x}$, b) $y = 3^{x+2}$, c) $y = 3\sin 2x$.

4. Obliczyć:

a) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, d) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

e) $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, f) $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, g) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, h) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

i) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$, j) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, k) $\operatorname{arctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

l) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$, m) $\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, n) $\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

5. Wykazać, że:

a) $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ dla $x > 0$,

b) $\operatorname{arcctg} x = \pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ dla $x < 0$.

BG AGH

Rozdział **2.**

Elementy logiki i teorii zbiorów

2.1. Rachunek zdań

W języku potocznym używamy zdań do przekazywania pewnych treści, informacji, wrażeń. W matematyce i logice nie można jednak używać zdań z taką swobodą jak w prasie czy telewizji.

Być może, że wypowiedzi:

To jest tylko częściowa prawda,

I tak, i nie,

Pleć pleciugo, byle niedługo

są poprawne w języku potocznym, ale w matematyce nie używa się takich konstrukcji.

W matematyce używa się tylko zdań orzekających, które są prawdziwe lub fałszywe. Mówimy, że są to zdania logiczne. Zdania:

Sześć jest podzielne przez dwa,

Istnieje liczba mniejsza od zera,

Dwa plus dwa jest trzy

są zdaniami logicznymi. Pierwsze dwa są prawdziwe, trzecie jest fałszywe. Prawdę lub fałsz nazywamy wartością logiczną zdania. Zdaniu prawdziwemu przyporządkowujemy liczbę 1, fałszywemu 0. Takie przyporządkowanie ułatwia analizę zdań logicznych.

Podobnie jak w języku potocznym, w matematyce z prostych zdań logicznych możemy tworzyć zdania złożone — mniej lub bardziej skomplikowane. W matematyce są ściśle ustalone reguły tworzenia zdań złożonych oraz zasady przyporządkowywania wartości logicznych tym zdaniom. Opiszemy teraz te reguły i zasady.

Ze zdań logicznych tworzymy zdania złożone przy użyciu następujących spójników (funktorów):

a) (*nie*)	—	negacja	($\sim$),
b) (*...lub...*)	—	alternatywa	($\vee$),
c) (*...i...*)	—	koniunkcja	($\wedge$),
d) (*jeżeli..., to...*)	—	implikacja	($\Rightarrow$),
e) (*...wtedy i tylko wtedy, gdy...*)	—	równoważność	($\Leftrightarrow$).

Niech p i q będą zdaniami logicznymi. Negacją (zaprzeczeniem) zdania p jest zdanie *nieprawda, że* p, co zapisujemy symbolicznie

$$\boxed{\sim p}$$

BG AGH

Negację $\sim p$ uznajemy za zdanie prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy p jest zdaniem fałszywym, czyli negacja $\sim p$ jest fałszywa, gdy p jest prawdziwe.

Zdanie złożone p *lub* q, zapisujemy symbolicznie

$$\boxed{p \vee q}$$

i nazywamy alternatywą (sumą) zdań p, q.

Alternatywę $p \vee q$ uznajemy za zdanie prawdziwe, jeżeli przynajmniej jedno ze zdań p, q jest prawdziwe.

Koniunkcją (iloczynem logicznym) zdań p, q nazywamy zdanie p *i* q, które zapisujemy symbolicznie

$$\boxed{p \wedge q}$$

Koniunkcję $p \wedge q$ uważamy za zdanie prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy oba zdania p, q są prawdziwe. Zatem koniunkcja $p \wedge q$ jest zdaniem fałszywym, gdy przynajmniej jedno ze zdań p, q jest fałszem.

Zdanie logiczne postaci *jeśli* p, *to* q zapisujemy symbolicznie

$$\boxed{p \Rightarrow q}$$

i nazywamy implikacją. Zdanie $p \Rightarrow q$ możemy również wypowiedzieć tak: *z* p *wynika* q. Implikację $p \Rightarrow q$ uważamy za zdanie fałszywe wtedy i tylko wtedy, gdy p jest zdaniem prawdziwym, a q fałszywym. W pozostałych przypadkach implikację uznajemy za zdanie prawdziwe. Zdanie p nazywamy poprzednikiem implikacji, a q następnikiem. Twierdzenia, formułowane i dowodzone w matematyce, najczęściej mają postać implikacji. Zdanie p stanowi wówczas założenie, a q tezę twierdzenia.

Mówimy, że zdania p, q są równoważne, piszemy krótko

$$\boxed{p \Leftrightarrow q}$$

jeżeli implikacje $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ są prawdziwe.

Równoważność $p \Leftrightarrow q$ czytamy w postaci zdania

p wtedy i tylko wtedy, gdy q

lub *p jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla q*. Jeżeli implikacja $p \Rightarrow q$ lub $q \Rightarrow p$ jest fałszem, to równoważność $p \Leftrightarrow q$ ma wartość logiczną fałszu. Twierdzenia, które podają warunek konieczny i wystarczający mają postać równoważności.

W tabeli 2.1 zestawiono wartości logiczne omawianych zdań złożonych: negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności. W zestawieniu tym użyto metody zerojedynkowej: prawda – 1, fałsz – 0.

Przykłady

Przez p oznaczamy zdanie *liczba 6 jest parzysta*, a przez q zdanie *liczba 15 jest większa od 20*. Widać, że p ma wartość logiczną prawdy, a q fałszu.

Negacją zdania p jest zdanie *nieprawda, że liczba 6 jest parzysta.* Natomiast alternatywa $p \vee q$, to zdanie *liczba 6 jest parzysta lub liczba 15 jest większa od 20.* Zdanie *liczba 6 jest parzysta i nieprawda, że liczba 15 jest większa od 20* jest koniunkcją $p \wedge \sim q$.

Tabela 2.1.

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
0	1		1	0	1	0
0	0		0	0	1	1

Znane Czytelnikowi twierdzenie Pitagorasa:

jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów przyprostokątnych równa się kwadratowi przeciwprostokątnej

jest implikacją.

W tym twierdzeniu zdanie *trójkąt jest prostokątny* oznaczamy przez p, a zdanie *suma kwadratów przyprostokątnych równa się kwadratowi przeciwprostokątnej* przez q. Twierdzenie Pitagorasa ma postać implikacji *jeżeli p, to q*, czyli w zapisie symbolicznym $p \Rightarrow q$.

Zapis

liczba 75 dzieli się przez 15 $\Leftrightarrow$ *liczba 75 dzieli się przez 5 i 3*

jest równoważnością $p \Leftrightarrow q$, gdzie p jest zdaniem *liczba 75 dzieli się przez 15*, a q zdaniem *liczba 75 dzieli się przez 5 i 3*. Łatwo widać, że implikacje $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ są prawdziwe, zatem rozpatrywana równoważność ma wartość logiczną prawdy.

Przy użyciu zmiennych zdaniowych $(p, q, r, s \dots)$, funktorów oraz nawiasów możemy tworzyć wyrażenia rachunku zdań — tak zwane schematy zdaniowe.

Zapis

$(p \vee q) \wedge \sim p$

jest schematem zdaniowym. Jeżeli w miejsce zmiennych zdaniowych podstawimy konkretne zdania, otrzymamy złożone zdanie logiczne. Może ono mieć wartość logiczną prawdy lub fałszu — w zależności od podstawionych zdań w miejsce zmiennych. Wartość logiczną schematu zdaniowego możemy wyznaczyć przy użyciu metody zerojedynkowej.

Tautologią nazywamy taki schemat zdaniowy, który ma wartość logiczną prawdy dla dowolnych wartości logicznych (prawda lub fałsz) zdań wstawionych w miejsce zmiennych zdaniowych.

BG AGH

Do najczęściej używanych tautologii należą:

$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ — prawo podwójnego przeczenia,

$p \vee (\sim p)$ — prawo wyłączonego środka,

$\big[\sim(p \vee q)\big] \Leftrightarrow \big[(\sim p) \wedge (\sim q)\big]$

$\big[\sim(p \wedge q)\big] \Leftrightarrow \big[(\sim p) \vee (\sim q)\big]$ — prawa de Morgana,

$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \big(p \wedge (\sim q)\big)$ — prawo zaprzeczenia implikacji.

2.2. Kwantyfikatory

W matematyce często używamy słów: *każdy* i *istnieje*. Np. piszemy *dla każdego* $x \in R$: $x^2 + 1 > 0$ lub *istnieje* $x \in R$: $x + 1 = 0$. Słowa *każdy* i *istnieje* nazywamy kwantyfikatorami i dla tych słów używamy specjalnych symboli.

Zdanie

własność $p(x)$ jest spełniona przez każdy element x zbioru A

zapisujemy symbolicznie

$$\bigwedge_{x \in A} p(x)$$

i czytamy: *dla każdego $x \in A$ zachodzi $p(x)$*. Znak $\bigwedge$ nazywamy kwantyfikatorem dużym lub ogólnym, oznacza on słowo *każdy*.

Zdanie

istnieje taki element x zbioru A, że dla tego elementu jest spełniona własność $p(x)$

zapisujemy symbolicznie

$$\bigvee_{x \in A} p(x)$$

i czytamy: *istnieje takie $x \in A$, że zachodzi $p(x)$*. Znak $\bigvee$ nazywamy kwantyfikatorem małym lub szczegółowym.

Przykład

Zdanie

$\bigwedge\limits_{x \in R} x^2 + 1 \geqslant 0$ czytamy: *dla każdego $x \in R$: $x^2 + 1 \geqslant 0$.*

W tym przykładzie własność $p(x)$ to nierówność $x^2 + 1 \geqslant 0$. Oczywiście, omawiane zdanie jest prawdziwe.

BG AGH

Przykład

Zapis

$$\bigvee_{x\in R} x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ czytamy: } \textit{istnieje } x \in R\colon x^2 - 2x + 1 = 0.$$

W tym zapisie własność $p(x)$ to równość $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Przy użyciu kwantyfikatorów $\bigwedge$ i $\bigvee$ zapisujemy zdania logiczne, które mogą mieć wartość logiczną prawdy lub fałszu. Łatwo zauważyć, że zachodzą następujące równoważności:

$$\left[\bigwedge_{x\in A} p(x)\right] \Leftrightarrow \Big[\{x \in A\colon p(x)\} = A\Big],$$

$$\sim\left[\bigvee_{x\in A} p(x)\right] \Leftrightarrow \Big[\{x \in A\colon p(x)\} = \varnothing\Big],$$

gdzie $\varnothing$ oznacza zbiór pusty.

Zapis

$$\bigwedge_{a\in A}\bigvee_{b\in B} W(a,b),$$

czytamy: *dla każdego* $a \in A$ *istnieje* $b \in B$ *takie, że zachodzi pewna własność* $W(a,b)$. Zamiast pisać

$$\bigwedge_{a\in A}\bigwedge_{b\in A} W(a,b)$$

piszemy krótko

$$\bigwedge_{a,b\in A} W(a,b).$$

Wiemy już, że przy użyciu kwantyfikatorów zapisujemy zdania logiczne. Należy zwrócić uwagę na poprawne zaprzeczanie zdań logicznych zapisanych przy użyciu kwantyfikatorów. Prawdziwe są następujące równoważności:

$$\sim\left[\bigwedge_{x\in A} p(x)\right] \Leftrightarrow \bigvee_{x\in A}\big(\sim p(x)\big),$$

$$\sim\left[\bigvee_{x\in A} p(x)\right] \Leftrightarrow \bigwedge_{x\in A}\big(\sim p(x)\big).$$

Równoważności te określają sposób negacji zdań z kwantyfikatorami. Mianowicie, przy negacji kwantyfikator duży $\bigwedge$ zastępujemy kwantyfikatorem małym $\bigvee$, a własność $p(x)$ zastępujemy negacją $\big(\sim p(x)\big)$. I na odwrót, kwantyfikator mały $\bigvee$ zastępujemy kwantyfikatorem dużym $\bigwedge$, a własność $p(x)$ zastępujemy przez $\sim p(x)$.

BG AGH

Przykład

Negacją zdania

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in D} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

jest zdanie

$$\bigvee_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\delta>0} \bigvee_{x\in D} |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

2.3. Zbiory: definicje i oznaczenia

Struktura matematyki jest inna niż np. takich nauk, jak fizyka, chemia czy biologia. W matematyce teza nie wynika z eksperymentu, z pomiaru. Gdyby pomierzono boki np. 100 000 trójkątów prostokątnych i stwierdzono, że „suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej", to stąd nie wynika, że twierdzenie Pitagorasa jest prawdziwe. Twierdzenie Pitagorasa jest prawdziwe, gdyż zostało udowodnione. Wyniki z doświadczenia, obserwacje lub intuicja mogą stanowić jedynie przypuszczenie, że jakaś teza jest prawdziwa, ale nie stanowią dowodu tezy.

W matematyce, a dokładniej w poszczególnych działach matematyki, przyjmuje się pewne pojęcia jako pierwotne, których się nie określa, nie definiuje. Oprócz pojęć pierwotnych przyjmuje się pewne tezy (twierdzenia) jako prawdziwe — bez dowodów. Te tezy bez dowodów nazywamy pewnikami lub aksjomatami. W danej teorii matematycznej przyjęte pojęcia pierwotne i aksjomaty są dokładnie ustalone.

W oparciu o pojęcia pierwotne i aksjomaty, na drodze wnioskowania logicznego, dowodzi się nowe twierdzenia.

W ten sposób dany dział matematyki ma charakter aksjomatyczno-dedukcyjny. Taką aksjomatyczno-dedukcyjną strukturę matematyki zapoczątkował Euklides (IV w p.n.e.) w słynnym dziele *Elementy*. Zdefiniował wówczas geometrię euklidesową, znaną Czytelnikowi ze szkoły średniej.

W języku potocznym często używamy pojęcia zbiór: zbiór książek (księgozbiór), zbiór gwiazd (gwiazdozbiór), zbiór studentów, zbiór (kolekcja) monet, zespół (zbiór) szkół itd.

W matematyce zbiór jest jednym z podstawowych pojęć. Dział matematyki zajmujący się własnościami zbiorów nazywamy teorią zbiorów. W tej teorii zbiór jest pojęciem pierwotnym. Przedmioty (obiekty) należące do zbioru nazywamy jego elementami. Zbiory najczęściej oznaczamy dużymi literami alfabetu łacińskiego: A, B, C, D itd. Natomiast elementy zbioru będziemy oznaczać małymi literami: a, b, x, y itd. Jeżeli element a (przedmiot, obiekt) należy do zbioru A to piszemy

$$a \in A$$

i mówimy, że a jest elementem zbioru A. Natomiast zapis $a \notin B$ oznacza, że element a nie należy do zbioru B. W podręcznikach niektóre zbiory, często używane w matematyce, mają ustalone oznaczenia.

Literą N oznacza się zbiór liczb naturalnych, literą Z — zbiór liczb całkowitych, literą Q — zbiór liczb wymiernych, a literą R — zbiór liczb rzeczywistych.

Na przykład możemy napisać:

$$3 \in N, \quad -10 \in Z, \quad 6 \in Z, \quad \sqrt{3} \in R, \quad -4 \notin N, \quad \frac{5}{3} \notin Z, \quad \sqrt{2} \notin Q.$$

Najprostszym sposobem opisu zbioru jest podanie listy jego elementów.

Zapis

$A = \{3, -5, 4\}$

oznacza, że elementami zbioru A są: 3, -5, 4. Zapis ten oznacza również, że do zbioru A nie należą inne elementy, oprócz wymienionych. Natomiast zapis

$$B = \{3, -, 5, 4\}$$

określa zbiór składający się z czterech elementów: 3, $-$, 5, 4.

Zbiór składający się z wszystkich liczb naturalnych od 1 do 100 możemy zapisać w postaci

$$M = \{1, 2, \ldots, 100\},$$

a zbiór wszystkich liczb naturalnych w postaci

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Zbiór, który ma skończoną ilość elementów, nazywamy skończonym. Zbiór nazywamy nieskończonym jeżeli ilość jego elementów nie jest ograniczona. Na przykład zbiór M jest skończony, a N nieskończony. Mówimy, że zbiór jest jednoelementowy, jeżeli zawiera tylko jeden element. Na przykład zbiór $\{a\}$ zawiera jeden element a. Zbiór $S = \{6\}$ zawiera jeden element i może również być zapisany w postaci $S = \{6, 6, 6\}$. Zbiory $\{1, 3\}$, $\{3, 1\}$ zawierają te same elementy: 1 i 3.

Nie zawsze zbiór można opisać przez wypisanie jego elementów.

Zapis

$A = \{x \colon W(x)\}$

oznacza zbiór wszystkich x, które spełniają warunek $W(x)$. Zbiór B, który zawiera wszystkie elementy $x \in E$ spełniające warunek $W(x)$, można opisać w następujący sposób

$$B = \{x \in E \colon W(x)\}.$$

Zapis

$A = \{x \colon W(x)\}$

czytamy: *ogół takich x, które spełniają $W(x)$*. W niektórych podręcznikach zamiast $A = \{x\colon W(x)\}$ stosuje się zapis

$$A = \{x \mid W(x)\}.$$

Zbiór

$$K = \{x \in N\colon 2 < x < 7\}$$

zawiera liczby 3, 4, 5 i 6.

Natomiast zbiór

$$B = \{x \in R\colon 2 < x < 7\}$$

zawiera liczby rzeczywiste z przedziału $(2, 7)$.

Łatwo zauważyć, że zbiór $C = \{x \in R\colon x^2 = -1\}$ nie zawiera żadnego elementu. Zbiór, który nie zawiera żadnego elementu nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy symbolem $\varnothing$.

Przykłady

Łatwo zauważyć, że zbiór liczb całkowitych $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ możemy zapisać tak

$$Z = \{x\colon x \in N \quad \text{lub} \quad -x \in N \quad \text{lub} \quad x = 0\}.$$

Natomiast

$$Q = \left\{x\colon x = \frac{p}{q}, \qquad p \in Z \quad \text{i} \quad q \in N\right\}$$

jest zbiorem liczb wymiernych.

Definicja. *Mówimy, że zbiory A i B są równe, piszemy $A = B$, wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i na odwrót.*

Definicję tę możemy zapisać w postaci

$$A = B \Leftrightarrow \left(\bigwedge_x x \in A \Leftrightarrow x \in B\right).$$

Widać, że

$$\{a, b\} = \{b, a\},$$
$$\{x \in R\colon x^2 = 4\} = \{2, -2\}.$$

Jeżeli $a, b \in R$ i $a < b$, to możemy określić znane w szkole przedziały

$$(a, b) = \{x \in R\colon a < x < b\},$$

BG AGH

$$\langle a, b\rangle = \{x \in R\colon a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$\langle a, b) = \{x \in R\colon a \leqslant x < b\}.$$

Mówimy, że zbiór B jest podzbiorem zbioru A, co zapisujemy $B \subset A$, jeżeli każdy element zbioru B jest elementem zbioru A. Łatwo zauważyć, że jeżeli $A \subset B$ i $B \subset A$, to $A = B$. Przyjmuje się, że zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru. Jeżeli B nie jest podzbiorem A, to piszemy $B \not\subset A$.

2.4. Działania na zbiorach

Sumą (unią) zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \cup B = \{a\colon a \in A \quad \text{lub} \quad a \in B\}.$$

Iloczynem (przekrojem) zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \cap B = \{a\colon a \in A \quad \text{i} \quad a \in B\}.$$

Zbiory A i B nazywamy rozłącznymi jeżeli $A \cap B = \varnothing$.

Różnicą zbioru A i B nazywamy zbiór

$$A \setminus B = \{a\colon a \in A \quad \text{i} \quad a \notin B\}.$$

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli A, B, C są dowolnymi zbiorami, to:*

1) $A \cup B = B \cup A$,
2) $A \cap B = B \cap A$,
3) $A \cup A = A$,
4) $A \cap A = A$,
5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
8) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Przykłady

Niech $A = \{\text{Rektor}, \text{AGH}, \Pi, +, 3\}$, $B = \{5, \text{AGH}, \text{UJ}\}$. Stąd

$$A \cup B = \{\text{Rektor}, \text{AGH}, \Pi, +, 3, 5, \text{UJ}\},$$
$$A \cap B = \{\text{AGH}\},$$
$$B \setminus A = \{5, \text{UJ}\},$$

BG AGH

$A \cap \{+, -\} = \{+\}$,
$A \cap (B \setminus A) = \varnothing$,
$\varnothing \cup A = A$,
$B \cap \varnothing = \varnothing$.

2.5. Iloczyn kartezjański zbiorów

Wiemy już, że $\{a, b\} = \{b, a\}$, czyli kolejność elementów w zbiorze nie ma żadnego znaczenia. Jednak czasem interesują nas nie tylko elementy zbioru, ale również kolejność elementów w zbiorze. Na przykład punkt o współrzędnych $(2, -4)$ jest różny od punktu o współrzędnych $(-4, 2)$.

Jeżeli w zbiorze $\{a, b\}$ element a będziemy uważać za pierwszy, natomiast element b za drugi, to mówimy, że mamy uporządkowaną parę elementów, piszemy (a, b). W uporządkowanej parze (a, b) a nazywamy poprzednikiem, b następnikiem. Zapis $(2, -4)$ oznacza uporządkowaną parę elementów; 2 jest poprzednikiem, a -4 następnikiem w tej parze.

W parze uporządkowanej $((a, b), c)$ poprzednikiem jest para (a, b), następnikiem element c. Parę uporządkowaną $((a, b), c)$ nazywamy trójką uporządkowaną elementów a, b, c i zapisujemy w postaci

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

W uporządkowanej trójce (a, b, c) element a poprzedza b oraz b poprzedza c.

Ogólnie, dla $n \in N$ możemy wprowadzić pojęcie uporządkowanej n-ki elementów $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Mianowicie

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Big((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n\Big).$$

Zatem uporządkowana n-ka $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest to uporządkowana para $((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n)$, gdzie poprzednikiem jest $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, a następnikiem x_n.

Mówimy, że uporządkowane pary (a, b), (c, d) są równe, piszemy

$$(a, b) = (c, d),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$.

Ogólnie, mówimy, że uporządkowane n-ki $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ są równe, piszemy $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i = y_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Definicja. *Jeżeli $A \neq \varnothing$ i $B \neq \varnothing$, to iloczynem kartezjańskim zbioru A przez zbiór B, oznaczamy $A \times B$, nazywamy zbiór*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \quad i \quad b \in B\}.$$

Jeżeli $A = \varnothing$ lub $B = \varnothing$, to, z definicji, $A \times B = \varnothing$.

Przykład

Niech $A = \{a, 3, +\}$, $B = \{1, 4\}$. Wtedy

$$A \times B = \{(a,1), (a,4), (3,1), (3,4), (+,1), (+,4)\}.$$

Zatem iloczyn kartezjański $A \times B$, to zbiór wszystkich możliwych par uporządkowanych (a, b), gdzie $a \in A$ i $b \in B$.

Przykład

Weźmy pod uwagę zbiory

$$X = \{\text{nauka}, \text{praca}\}, \quad Y = \{\text{mgr}, \text{inż}\}.$$

Wówczas

$$X \times Y = \{(\text{nauka}, \text{mgr}), (\text{nauka}, \text{inż}), (\text{praca}, \text{mgr}), (\text{praca}, \text{inż})\}.$$

Pojęcie iloczynu kartezjańskiego można uogólnić na większą ilość zbiorów. Na przykład

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \colon a \in A \quad \text{i} \quad b \in B \quad \text{i} \quad c \in C\}$$

i ogólnie

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \colon x_i \in X_i \quad (i = 1, 2, \ldots n)\}.$$

Przykład

Dla zbiorów $A = \{2, -3\}$, $B = \{1, 2\}$ mamy

$$A \times B = \{(2,1), (2,2), (-3,1), (-3,2)\},$$
$$B \times A = \{(1,2), (1,-3), (2,2), (2,-3)\}.$$

Z tego przykładu widać, że $A \times B \neq B \times A$, gdyż np. $(2,1) \in A \times B$ i $(2,1) \notin B \times A$.

Przykład

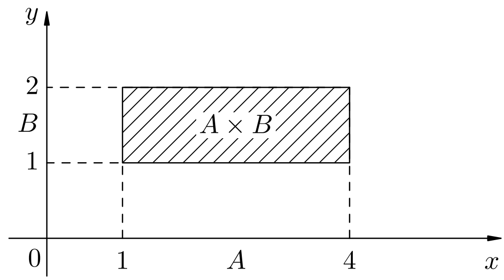
Niech $A = \langle 1, 4 \rangle$, $B = \langle 1, 2 \rangle$. Ilustrację geometryczną iloczynu

$$A \times B = \langle 1, 4 \rangle \times \langle 1, 2 \rangle$$

przedstawia rysunek 2.1.

Jeżeli A jest zbiorem, to przez A^2 będziemy rozumieć $A \times A$, $A \times A \times A = A^3$ itd. Interpretacją geometryczną iloczynu $R \times R = R^2$, gdzie R — zbiór liczb rzeczywistych, jest płaszczyzna, na której ustalono układ współrzędnych. Iloczyn $R \times R = R^2$ nazywamy płaszczyzną kartezjańską lub przestrzenią R^2. Natomiast $R^3 = R \times R \times R$ nazywamy przestrzenią kartezjańską R^3.

BG AGH



Rys. 2.1. Ilustracja iloczynu $A \times B$

Dowodzi się następujące

TWIERDZENIE 2.2. *Jeżeli A, B, C i D są dowolnymi zbiorami, to:*

1) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
2) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$,
3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
4) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Zadania

1. Nierówność $-5 < 3 \leqslant 6$ zapisz w postaci koniunkcji dwóch zdań.
2. Nierówność $|x + 2| > 3$ zapisz w postaci alternatywy dwóch zdań.
3. Podaj przykład dwóch zdań logicznych p, q, takich, że zdania $\sim(p \wedge q)$, $\sim(p \vee q)$ oba są fałszywe.
4. Czy istnieją zdania p, q takie, że alternatywa $p \vee q$ i koniunkcja $p \wedge q$ mają wartość logiczną fałszu?
5. Sprawdzić, metodą zerojedynkową, że implikacja $p \Rightarrow p$ jest tautologią.
6. Podaj przykład zaprzeczenia:
   a) alternatywy,
   b) koniunkcji,
   c) implikacji.
7. Wypisz wszystkie podzbiory zbioru $\{a, b, c\}$.
8. Ile jest podzbiorów zbioru $A = \{1, 3, 5, 7\}$?
9. Narysuj na płaszczyźnie iloczyn $M \times K$, gdzie $M = \{n \in N\colon 2 \leqslant n \leqslant 4\}$, $K = \{n \in N\colon 3 < n < 6\}$.

BG AGH

10. Niech $X = \{x \in R\colon 0 \leqslant x \leqslant 4\}$, $Y = \{y \in R\colon -1 \leqslant y \leqslant 3\}$. Narysuj zbiory:
    a) $X \times Y$,
    b) $A = \{(x, y)\colon (x, y) \in X \times Y \quad \text{i} \quad x = 1\}$,
    c) $B = \{(x, y)\colon (y, x) \in Y \times X \quad \text{i} \quad y = 0\}$.
11. Niech $A = \{a, b, \Pi\}$, $B = \{2, 3, +\}$. Wypisz elementy zbiorów:
    a) $A \times B$,
    b) $B \times \{(1, 2)\}$,
    c) $((A \times B) \cap \{(\Pi, 2)\}) \times B$,
    d) $(A \setminus \{a, b\}) \times (B \cup \{\Pi\})$,
    e) $(A \setminus \{(a, b)\}) \times \{2\}$.

BG AGH

Algebra

BG AGH

Rozdział **3.**

Liczby zespolone

3.1. Definicje i działania na liczbach zespolonych

We wczesnym etapie poznawania otaczającego nas świata młody człowiek korzysta z liczb naturalnych, np. 1, 2, 3, 4, 5. Tak było również w toku rozwoju cywilizacji. Konieczność mierzenia, np. długości, spowodowała zdefiniowanie i używanie liczb wymiernych: ${}^1\!/_2$, ${}^6\!/_3$, ${}^3\!/_4$. Okazało się jednak, że równanie $x^2 = 2$ nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych. Geometrycznie oznaczało to, że nie można obliczyć długości przekątnej kwadratu, w którym bok $a = 1$ $[m]$.

Wymyślono więc liczby niewymierne, takie jak $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. Grecy używali liczb niewymiernych wcześniej niż liczb ujemnych i zera. Rozwój nauki stawiał nowe problemy przed matematyką — w zakresie znanych już liczb nie potrafiono rozwiązać równania $x^2 = -1$, czyli równania $x^2 + 1 = 0$. Ten fakt wymusił konieczność zdefiniowania „nowych” liczb, aby równanie $x^2 = -1$ miało rozwiązanie.

Wiemy, że geometryczną interpretacją zbioru liczb rzeczywistych R jest oś liczbowa. Geometryczna interpretacja iloczynu kartezjańskiego $R \times R$, to płaszczyzna. Punkty na płaszczyźnie możemy utożsamiać z uporządkowanymi parami (a, b), gdzie $a, b \in R$. Pary $(a, b) \in R \times R = R^2$ będziemy traktować jako „nowe” liczby.

Definicja. *Dwie pary (a, b), $(c, d) \in R^2$ są równe, co zapisujemy $(a, b) = (c, d)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$ i $b = d$.*

Oprócz tego zdefiniujemy dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie uporządkowanych par (a, b), $(c, d) \in R^2$.

Definicja. *Jeżeli (a, b), $(c, d) \in R^2$, to:*

1) $(a, b) + (c, d) \overset{\text{df}}{=} (a + c, b + d)$,
2) $(a, b) \cdot (c, d) \overset{\text{df}}{=} (ac - bd, ad + bc)$.

Widać, że tak zdefiniowana suma oraz iloczyn par (a, b), (c, d) jest uporządkowaną parą liczb rzeczywistych. Zgodnie z przyjętą definicją mamy:

$$(3, 5) + (-2, 3) = (1, 8),$$
$$(2, 1) \cdot (-1, 3) = (-2 - 3, 6 - 1) = (-5, 5).$$

W dalszym tekście będziemy pisać $(a, b)(c, d)$ zamiast $(a, b) \cdot (c, d)$.

BG AGH

Definicja. *Uporządkowane pary* $(a, b) \in R^2$*, z określonym wyżej dodawaniem i mnożeniem par, nazywamy liczbami zespolonymi.*

Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez C; od łacińskiego słowa *complexus* — zespolony. Zatem $(1, 2) \in C$, $(0, 1) \in C$.

Łatwo udowodnić następujące

Twierdzenie 3.1. *Jeżeli* $z_1, z_2, z_3 \in C$*, to:*

1) $z_1 + \big(z_2 + z_3\big) = \big(z_1 + z_2\big) + z_3$ — *łączność dla dodawania,*
2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ — *przemienność dla dodawania,*
3) $z_1\big(z_2 + z_3\big) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ — *rozdzielność mnożenia względem dodawania,*
4) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ — *przemienność dla mnożenia,*
5) $z_1 + (0, 0) = z_1$ — $(0, 0)$ *jest elementem neutralnym dla dodawania,*
6) $z_1(1, 0) = z_1$ — $(1, 0)$ *jest elementem neutralnym dla mnożenia.*

Podobnie jak dla liczb rzeczywistych wprowadzimy teraz pojęcie różnicy i ilorazu liczb zespolonych.

Definicja. *Jeżeli* $(a, b), (c, d) \in C$*, to liczbę* $(x, y) \in C$ *taką, że*

$$(x, y) + (c, d) = (a, b)$$

nazywamy różnicą liczby zespolonej (a, b) *i liczby zespolonej* (c, d) *i piszemy* $(x, y) = (a, b) - (c, d)$.

Z tej definicji widać, że $x = a - c$ oraz $y = b - d$, czyli $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d) \in C$.

Np. $(3, -6) - (1, -5) = (3 - 1, -6 + 5) = (2, -1)$. Odjąć dwie liczby zespolone to znaczy wyznaczyć ich różnicę. Zapis $-(a, b)$ oznacza liczbę zespoloną $(0, 0) - (a, b) = (-a, -b)$.

Definicja. *Jeżeli* $(a, b), (c, d) \in C$ *i* $(c, d) \neq (0, 0) \in C$*, to liczbę* $(x, y) \in C$ *taką, że*

$$(x, y)(c, d) = (a, b)$$

nazywamy ilorazem liczby (a, b) *przez liczbę* (c, d)*, i piszemy*

$$(x, y) = \frac{(a, b)}{(c, d)} \qquad \textit{lub} \qquad (x, y) = (a, b) : (c, d).$$

Z powyższej definicji oraz definicji mnożenia i równości liczb zespolonych wynika, że

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases},$$

BG AGH

a stąd

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \qquad \text{dla} \qquad c^2+d^2 \neq 0.$$

Zatem mamy

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) \in C \qquad \text{dla} \qquad (c,d) \neq (0,0).$$

Podzielić dwie liczby zespolone to znaczy wyznaczyć ich iloraz.

Przykład
Obliczyć $(3,1):(-1,2)$.
W tym zadaniu mamy

$$\frac{(3,1)}{(-1,2)} = \left(\frac{(3)(-1)+(1)(2)}{(-1)^2+2^2}, \frac{(1)(-1)-(3)(2)}{(-1)^2+2^2}\right) = \left(\frac{-1}{5}, \frac{-7}{5}\right).$$

Liczbę zespoloną $(a,0)$ będziemy identyfikować z liczbą rzeczywistą a i stosować zapis $(a,0)=a$.

Łatwo się przekonać, że dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie liczb rzeczywistych jest szczególnym przypadkiem tych działań na liczbach zespolonych. Zatem zbiór liczb rzeczywistych możemy traktować jako podzbiór liczb zespolonych, $R \subset C$.

Liczby zespolone będziemy też oznaczać przez α, β, z, z_1, z_2 itp.

Dowodzi się, że prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli $z \in C$, to:*

1) $z + (-z) = (0,0)$ — $(-z)$ *jest elementem przeciwnym do* z,

2) $z\frac{1}{z} = 1$ *dla* $z \neq (0,0)$ — $\frac{1}{z}$ *jest elementem odwrotnym do* z.

Z tego twierdzenia wynika, że dla dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia w zbiorze liczb zespolonych zachodzą analogiczne własności do tych, które znamy dla ww. działań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Jako przykład wykonamy obliczenia:

$$\begin{aligned}(3,4)(-5,3)+(2,-1)(3,4) &= (3,4)\big[(-5,3)+(2,-1)\big] = (3,4)(-3,2)\\ &= (-9-8, -12+6) = (-17,-6),\end{aligned}$$

$$(a,0)(2,-3) = (a\cdot 2 + 3\cdot 0, -3\cdot a + 0\cdot 2) = (2a, -3a).$$

Liczba zespolona $(0,1)$ odgrywa szczególną rolę, oznaczamy ją przez i oraz nazywamy jednostką urojoną. W naukach technicznych jednostkę urojoną oznacza się często przez j.

Widać, że

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0) = -1.$$

Zatem, kwadrat liczby zespolonej $i = (0,1)$ jest liczbą rzeczywistą ujemną. Czyli liczba $i = (0,1) \in C$ jest rozwiązaniem równania $x^2 = -1$. Łatwo sprawdzić, że również liczba $-i = (0,-1) \in C$ spełnia powyższe równanie.

Zatem równanie

$$x^2 + 1 = 0,$$

które nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, w zbiorze liczb zespolonych ma dwa rozwiązania: $x_1 = i$, $x_2 = -i$.

Zgodnie z przyjętymi definicjami i oznaczeniami

$$(0,b) = (b,0)(0,1) = bi,$$

gdzie i jest jednostką urojoną. Zatem dla $(a,b) \in C$ mamy

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + ib.$$

Zapis

$$a + ib$$

nazywamy postacią dwumienną liczby zespolonej (a,b). Zamiast pisać $a+ib$ będziemy też pisać $a + bi$.

Definicja. *Jeżeli $z = (a,b) = a+ib \in C$, to liczbę zespoloną $(a,-b) = a+i(-b)$ nazywamy liczbą sprzężoną do liczby $z = (a,b)$ i oznaczamy przez $\overline{z}$.*

Zatem dla $z = a + ib$ mamy $\overline{z} = a + i(-b) = a - ib$.

Przykłady

$\overline{3+2i} = 3 - 2i$,
$\overline{4-3i} = 4 + 3i$,
$\overline{i} = -i$,
$\overline{5} = 5$.

Dla liczby zespolonej $z = (a,b) = a + ib$ wprowadzamy następujące pojęcia i oznaczenia:

$\mathrm{Re}(z) = a$ — część rzeczywista liczby zespolonej $z = a + ib$,
$\mathrm{Im}(z) = b$ — część urojona liczby zespolonej $z = a + ib$,
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — moduł (wartość bezwzględna) liczby zespolonej $z = a + ib$.

Widać, że $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), |z| \in R$.

Przykłady

Niech $z = -3 + i4$, $\alpha = 2 - i5$. Wtedy

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(-3 + i4) = -3,\\&\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(-3 + i4) = 4,\\&\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(2 - 5i) = -5,\\&\mathrm{Re}(2 - 5i) = 2,\\&|z| = |-3 + i4| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,\\&|2 - 5i| = \sqrt{29}.\end{aligned}$$

Postać dwumienna $a + ib$ dla liczby zespolonej (a, b) jest bardzo użyteczna przy wykonywaniu działań (dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia) na liczbach zespolonych. Widać, że zgodnie z przyjętymi definicjami mamy:

$$\begin{aligned}&(a, b) + (c, d) = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),\\&(a, b) - (c, d) = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d).\end{aligned}$$

Zatem przy dodawaniu (odejmowaniu) dwóch liczb zespolonych dodajemy (odejmujemy) ich części rzeczywiste i urojone.

Przykłady

$$\begin{aligned}&(3 - i) + (2 + 4i) = (3 + 2) + i(-1 + 4) = 5 + 3i,\\&(2 - 3i) - (5i) = (2 - 0) + i(-3 - 5) = 2 - 8i,\\&i + 6 - 3i \ = (0 + 6) + i(1 - 3) = 6 - 2i.\end{aligned}$$

Przy mnożeniu liczb zespolonych mamy

$$(a, b)(c, d) = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + (i)^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Oznacza to, że iloczyn liczb zespolonych w postaci dwumiennej realizujemy tak, jak mnożenie dwumianów liczb rzeczywistych, uwzględniając, że $i^2 = -1$.

Przykłady

$$\begin{aligned}&(1 - i)(2 + 4i) = 2 + 4i - 2i - i^2 4 = 2 + 2i + 4 = 6 + 2i,\\&2i(3 - i) = 6i - 2i^2 = 6i + 2 = 2 + 6i,\\&(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 13,\\&(c + id)(c - id) = c^2 - icd + icd - i^2 d^2 = c^2 + d^2.\end{aligned}$$

Przy dzieleniu liczby $a + ib$ przez $c + id$ mamy

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Zatem dzielenie $\dfrac{a + ib}{c + id}$ realizujemy w ten sposób, że licznik i mianownik tego ułamka mnożymy przez sprzężenie mianownika $(c - id)$ i wówczas w mianowniku otrzymujemy liczbę rzeczywistą $c^2 + d^2$.

BG AGH

Przykłady

$$\frac{2-3i}{3+i}=\frac{(2-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{6-3-9i-2i}{9+1}=\frac{3-11i}{10}=\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i,$$

$$\frac{4+2i}{1-2i}=\frac{(4+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{4+8i+2i-4}{1+4}=\frac{10i}{5}=2i,$$

$$\frac{3+2i}{i}=\frac{(3+2i)(-i)}{1}=-3i+2=2-3i.$$

Dowodzi się, że prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 3.3. *Jeżeli α, $\beta \in C$, to:*

1) $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$,
2) $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$,
3) $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$,
4) $\overline{(\overline{\alpha})}=\alpha$,
5) $\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$ *dla* $\beta\neq(0,0)$,
6) $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$,
7) $\alpha+\overline{\alpha}=2\operatorname{Re}(\alpha)$,
8) $\alpha-\overline{\alpha}=2\operatorname{Im}(\alpha)i$,
9) $|\alpha\beta|=|\alpha|\;|\beta|$,
10) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|=\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ *dla* $\beta\neq(0,0)$.

Przykłady

Niech $\alpha=2-3i$, $\beta=1+2i$, $z=3+i$. Wówczas mamy

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{(2-3i)+(1+2i)}=\overline{(2-3i)}+\overline{(1+2i)}=(2+3i)+(1-2i)=3+i,$$
$$\overline{\alpha z}=\overline{(2-3i)(3+i)}=\overline{(2-3i)}\;\overline{(3+i)}=(2+3i)(3-i)=9+7i,$$
$$\beta\overline{\beta}=(1+2i)(1-2i)=1-2i+2i+4=5=|\beta|^2,$$
$$z\;+\overline{z}=(3+i)+(3-i)=6=2\operatorname{Re}(z).$$

W dalszym ciągu tekstu zamiast pisać $z=(0,0)$ lub $z\neq(0,0)$ będziemy pisać krótko $z=0$ lub $z\neq 0$.

Niech $z\in C$, a n będzie liczbą naturalną.

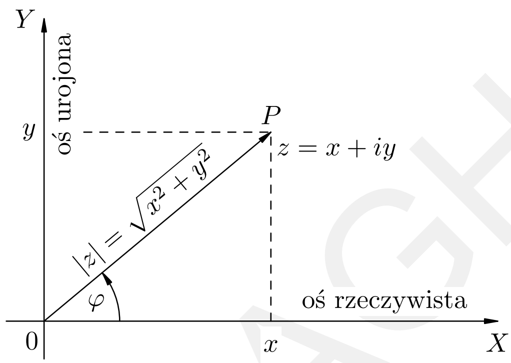
Potęgą n-tego stopnia liczby z, oznaczamy ją przez z^n, nazywamy n-krotny iloczyn liczby z przez siebie. Czyli

$$z^1=z,\quad z^2=zz,\quad z^3=zzz,\quad z^n=z\cdot z\cdots z\qquad (n-\text{czynników}).$$

3.2. Interpretacja geometryczna liczb zespolonych

Liczbie zespolonej $z = x + iy$ możemy przyporządkować punkt o współrzędnych (x, y) w prostokątnym układzie współrzędnych OXY (rys. 3.1).

Każdej liczbie zespolonej odpowiada dokładnie jeden punkt płaszczyzny i odwrotnie, każdy punkt płaszczyzny możemy interpretować jako liczbę zespoloną. Przy takiej interpretacji płaszczyzny, oś X nazywamy osią rzeczywistą, a oś Y osią urojoną. Natomiast płaszczyznę nazywamy płaszczyzną zespoloną, albo płaszczyzną Gaussa zmiennej zespolonej z. Oś rzeczywistą X nazywamy też osią części rzeczywistych, a oś urojoną Y osią części urojonych.



Rys. 3.1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

Liczbie zespolonej $z = x + iy$ można przyporządkować wektor $\overline{OP}$, którego początkiem jest początek układu współrzędnych, a końcem punkt P o współrzędnych (x, y). Widać, że odległość punktu P od początku układu współrzędnych równa jest $\sqrt{x^2 + y^2}$. A z drugiej strony $\sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ — moduł liczb zespolonych $z = x + iy$. Zatem moduł liczby zespolonej $z = x + iy$ możemy interpretować jako odległość punktu z od początku układu współrzędnych.

Wektor $\overline{OP}$ nazywamy wektorem wodzącym punktu $z = x + iy$ na płaszczyźnie zespolonej.

Przy takiej interpretacji liczb zespolonych, dodawanie (odejmowanie) liczb zespolonych możemy traktować jako dodawanie (odejmowanie) wektorów wodzących tych liczb.

Definicja. *Argumentem liczby zespolonej $z = x + iy \neq 0$ nazywamy liczbę rzeczywistą φ, która spełnia warunki*

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} \end{cases} \tag{3.1}$$

gdzie $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Argumentem liczby $z = 0$ nazywamy dowolną liczbę $\varphi \in R$.

Argument liczby z oznaczamy przez $\operatorname{Arg} z$.

Z rysunku 3.1 widać, że argument liczb zespolonej $z = x + iy$ jest miarą kąta skierowanego, którego pierwszym ramieniem jest dodatnia półoś rzeczywista, a drugie ramię jest wyznaczone przez wektor wodzący liczby z, czyli wektor $\overline{OP}$ na rysunku 3.1.

Z warunków (3.1) i stąd, że funkcje *sinus* i *cosinus* mają okres 2π wynika, że każda liczba zespolona ma nieskończenie wiele argumentów.

Jeżeli φ spełnia warunki (3.1), to

$$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi,$$

gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy ten $\operatorname{Arg} z$, który spełnia nierówność $0 \leqslant \operatorname{Arg} z < 2\pi$. Argument główny oznaczmy przez $\arg z$. Zatem

$$\operatorname{Arg} z \ = \arg z \ + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Wyznaczymy argument liczby zespolonej $z = 2 + i2$. Widać, że $|z| = 2\sqrt{2}$. Szukamy takiej liczby $\varphi \in R$, że

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Zatem $\varphi = \pi/4$, gdyż $\cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ i $\sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$. Tak wyznaczone $\varphi = \pi/4$ jest argumentem głównym liczby $z = 2 + i2$, gdyż $0 \leqslant \pi/4 < 2\pi$. Stąd $\arg(2 + i2) = \pi/4$ oraz

$$\operatorname{Arg}(2 + i2) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Rozważmy jeszcze jeden przykład. Dla liczby zespolonej $z = \sqrt{3} - i$ wyznaczymy argument. Mamy

$$|z| = \left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{3 + 1} = 2,$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{3.2}$$

Z zależności (3.2) otrzymamy $\varphi = -\pi/6$. Zatem

$$\operatorname{Arg}(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

oraz

$$\arg(\sqrt{3} - i) = \frac{11}{6}\pi.$$

3.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Weźmy pod uwagę liczbę zespoloną $z = x + iy$. Z zależności (3.1), dla $z \neq 0$, otrzymujemy:

$$x = |z| \cos\varphi,$$

$$y = |z| \sin\varphi.$$

Stąd

$$z = x + iy = |z| \cos\varphi + i\,|z| \sin\varphi = |z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right)$$

i zależność ta jest również prawdziwa dla $z = 0$. Zatem dla dowolnej liczby zespolonej $z = x + iy$ mamy

$$z = x + iy = |z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right),$$

gdzie $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, φ — dowolny argument liczby z.

Zapis

$$|z| \left(\cos\varphi + i \sin\varphi\right)$$

nazywamy postacią trygonometryczną liczby zespolonej $z = x + iy$.

Przykład

Liczbę zespoloną $z = \sqrt{3} + i$ zapiszemy w postaci trygonometrycznej. Łatwo obliczyć, że $|z| = 2$, $\arg\left(\sqrt{3} + i\right) = {}^{\pi}/_{6}$.

Zatem

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Możemy też napisać tak

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)\right),$$

gdyż ${}^{\pi}/_{6} + 2\pi$ jest argumentem rozważanej liczby $\sqrt{3} + i$.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej jest bardzo użyteczna przy mnożeniu i dzieleniu liczb zespolonych.

Weźmy pod uwagę dwie liczby zespolone

$$z_1 = |z_1| \left(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1\right), \qquad z_2 = |z_2| \left(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2\right) \tag{3.3}$$

zapisane w postaci trygonometrycznej.

Proste rozumowanie pozwala udowodnić następujący

Wniosek 3.1. Jeżeli $z_1 = |z_1|\bigl(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\bigr)$, $z_2 = |z_2|\bigl(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\bigr)$, $z_1, z_2 \neq 0$, to $z_1 = z_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|z_1| = |z_2|$ oraz $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$, gdzie k — liczba całkowita.

Obliczymy teraz iloczyn oraz iloraz liczb z_1, z_2 określonych w (3.3). Otrzymujemy

$$z_1 z_2 = \Bigl(|z_1|\bigl(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\bigr)\Bigr)\Bigl(|z_2|\bigl(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\bigr)\Bigr) =$$

$$= |z_1|\,|z_2|\Bigl[\bigl(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\bigr) + i\bigl(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\bigr)\Bigr].$$

Skąd, po zastosowaniu znanych wzorów na $\cos(\alpha+\beta)$ i $\sin(\alpha+\beta)$, mamy

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\Bigl(\cos\bigl(\varphi_1+\varphi_2\bigr) + i\sin\bigl(\varphi_1+\varphi_2\bigr)\Bigr) \tag{3.4}$$

Wzór (3.4) oznacza, że moduł iloczynu dwóch liczb zespolonych równa się iloczynowi modułów tych liczb, a argument iloczynu jest równy sumie argumentów.

Analogicznie wyprowadza się następującą zależność

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\Bigl(\cos\bigl(\varphi_1-\varphi_2\bigr) + i\sin\bigl(\varphi_1-\varphi_2\bigr)\Bigr) \tag{3.5}$$

dla $z_2 \neq 0$. Zatem moduł ilorazu dwóch liczb zespolonych równa się ilorazowi modułów tych liczb, a argument ilorazu jest równy różnicy argumentów. Wzory (3.4), (3.5) możemy zapisać w postaci zależności:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \quad \text{dla } |z_2| \neq 0.$$

Przykład

Zapisać iloczyn oraz iloraz liczb $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -\sqrt{3} + i$ w postaci trygonometrycznej.

Łatwo można sprawdzić, że:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$z_2 = -\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Stąd i z zależności (3.4) mamy:

$$z_1 \cdot z_2 = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)\right] = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Ze wzoru (3.4) uzyskamy prostą zależność dla n-tej potęgi liczby

$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.

Widać, że:

$$z^2 = zz = |z|\,|z|\left[\cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi)\right] = |z|^2\left(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi\right),$$
$$z^3 = |z|^3\left(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi\right)$$

i ogólnie

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{3.6}$$

W szczególnym przypadku, gdy $|z| = 1$, czyli $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ mamy

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos(n\varphi) + i\sin\left(n\varphi\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{3.7}$$

Równość (3.7) nazywamy wzorem de Moivre'a.

Przykład

Chcemy obliczyć wartość wyrażenia $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$. Widać, że $\left|1+i\sqrt{3}\right| = 2$, $|1-i| = \sqrt{2}$,

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$
$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Zatem

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right) = \frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]} =$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Stąd i ze wzoru (3.6) otrzymamy

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)\right]^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left[\cos\frac{140\pi}{12} + i\sin\frac{140\pi}{12}\right] =$$
$$= 2^{10}\left(\cos\frac{35}{3}\pi + i\sin\frac{35}{3}\pi\right) = 2^{10}\left[\cos\left(\frac{36}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{36}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi\right)\right] =$$
$$= 2^{10}\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{1}{3}\pi\right)\right) = 2^{10}\left(\cos\frac{1}{3}\pi - i\sin\frac{1}{3}\pi\right) =$$
$$= 2^{10}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^9\left(1 - i\sqrt{3}\right).$$

3.4. Pierwiastek z liczby zespolonej

Zapewne większość Czytelników pamięta definicję pierwiastka arytmetycznego n-tego stopnia z liczby a. Na wszelki wypadek przypomnimy.

Pierwiastkiem arytmetycznym n-tego stopnia z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, że $b^n = a$. Pierwiastek oznaczmy przez $\sqrt[n]{a}$. W tej definicji a, $b \in R$ i $n \in N$. Z definicji pierwiastka arytmetycznego wynika, że

$$\sqrt{x^2} = |x|, \qquad \text{i nie jest prawdą, że } \sqrt{x^2} = x.$$

Teraz zajmiemy się definicją i własnościami pierwiastka z liczby zespolonej.

Niech a będzie dowolną liczbą zespoloną, n — liczbą naturalną.

Definicja. *Pierwiastkiem algebraicznym n-tego stopnia z liczby zespolonej a nazywamy każdą liczbę zespoloną z, która spełnia zależność*

$$z^n = a \tag{3.8}$$

Pierwiastek ten oznaczmy przez $\sqrt[n]{a}$, w przypadku $n = 2$ piszemy $\sqrt{a}$.

Widać, że pierwiastek algebraiczny i arytmetyczny oznaczamy takim samym symbolem — $\sqrt[n]{a}$. Natomiast definicje pierwiastka arytmetycznego i algebraicznego są różne. Oczywiście, powstaje pytanie, czy np. zapis $\sqrt{4}$ oznacza pierwiastek arytmetyczny, czy też algebraiczny? Z samego zapisu $\sqrt[n]{a}$ nie wynika, czy mamy liczyć pierwiastek algebraiczny, czy też arytmetyczny. W treści zadania będzie powiedziane, który pierwiastek chcemy obliczyć. W przypadku, gdy nie ma wątpliwości, nie będzie zaznaczone, który pierwiastek mamy liczyć.

Definicja pierwiastka algebraicznego nasuwa następujące pytania:

- czy z każdej liczby zespolonej a istnieje $\sqrt[n]{a}$?
- jeżeli istnieje liczba z taka, że $z^n = a$, to czy jest ona jedyna, czy też jest ich więcej?
- jak obliczyć $\sqrt[n]{a}$?

W dalszym ciągu tekstu damy odpowiedź na te pytania i pokażemy przykłady.

Liczby a i z występujące w definicji pierwiastka algebraicznego zapiszemy w postaci trygonometrycznej

$$a = |a| \big(\cos\varphi + i \sin\varphi\big), \qquad z = |z| \big(\cos\psi + i \sin\psi\big).$$

Z (3.8) otrzymamy

$$|z|^n \big(\cos(n\psi) + i \sin(n\psi)\big) = |a| \big(\cos\varphi + i \sin\varphi\big).$$

Stąd i z wniosku (3.1) mamy

$$|z|^n = |a|, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Zatem

$$|z| = \sqrt[n]{|a|}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \psi_k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

gdzie $\sqrt[n]{|a|}$ oznacza pierwiastek arytmetyczny.

Wśród argumentów ψ_k istnieje dokładnie n istotnie różnych — to jest takich, których różnice nie są wielokrotnościami 2π. Te różne argumenty ψ_k otrzymamy dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Wówczas kolejne argumenty ψ_k różnią się o $2\dfrac{\pi}{n}$.

Zatem mamy następujący

Wniosek 3.2. Dla każdej liczby zespolonej $a = |a|\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big) \neq 0$ istnieje dokładnie n pierwiastków algebraicznych n-tego stopnia, które dane są zależnościami

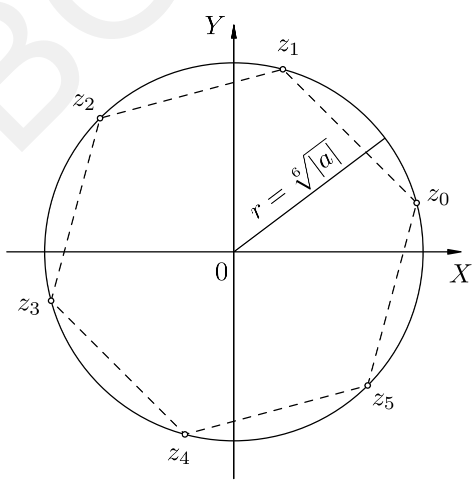
$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \tag{3.9}$$

Pierwiastki z_0, $z_1, \dots, z_{n-1}$, określone zależnościami (3.9), są między sobą różne oraz

$$z_k^n = a \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Z tego wniosku wynika, że równanie $z^n = a$, dla $|a| \neq 0$, ma dokładnie n różnych rozwiązań, które możemy wyznaczyć ze wzoru (3.9). Oprócz tego $\sqrt[n]{a} = 0$ dla $a = 0$.

Z (3.9) łatwo widać, że $|z_k| = \sqrt[n]{|a|}$ $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$, czyli wszystkie pierwiastki algebraiczne n-tego stopnia z liczby a mają wspólny moduł, równy $\sqrt[n]{|a|}$. Oprócz tego argumenty pierwiastków z_k i z_{k+1} różnią się o $2\dfrac{\pi}{n}$. Geometrycznie oznacza to, że pierwiastki $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ leżą na okręgu o promieniu $r = \sqrt[n]{|a|}$ i wyznaczają wielokąt foremny o wierzchołkach $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$. Dla $n = 6$ ilustruje to rysunek 3.2.



Rys. 3.2. Geometryczna interpretacja pierwiastka algebraicznego

BG AGH

Przykład

Obliczyć pierwiastki algebraiczne drugiego stopnia z liczby $2i$.

W tym przykładzie $a = 2i$, $n = 2$, $|a| = 2$, $\operatorname{Arg} a = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ dla $k \in \mathrm{Z}$, więc

$$a = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Ze wzorów (3.9) mamy:

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + i,$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = -1 - i.$$

Zatem $\sqrt{2i} = \{1 + i, -1 - i\}$. Dla sprawdzenia, łatwo widać, że:

$$z_0^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i,$$

$$z_1^2 = (-1 - i)^2 = (1 + i)^2 = 2i.$$

Przykład

Obliczyć $\sqrt[3]{i}$.

W tym zadaniu $a = i$, $n = 3$, $|a| = |i| = 1$, $\operatorname{Arg}\ a = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ dla $k \in \mathrm{Z}$, więc $i = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ze wzorów (3.9) otrzymamy:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

$$z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Przykład

Obliczyć pierwiastki algebraiczne drugiego stopnia z liczby -4.

Mamy zatem wyznaczyć $\sqrt{-4}$. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę, że arytmetyczny pierwiastek drugiego stopnia z -4 nie istnieje. W tym zadaniu zapis $\sqrt{-4}$ oznacza pierwiastek algebraiczny.

Mamy $a = -4$, $|a| = 4$, $a = -4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$. Zatem:

$$z_0 = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$

BG AGH

$$z_1 = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{2}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -2i.$$

Jeszcze jedno przypomnienie ze szkoły średniej lub podstawowej. Równanie kwadratowe o współczynnikach rzeczywistych ma postać

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.10}$$

gdzie $a, b, c \in R$, $a \neq 0$.

Jeżeli $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$, to w zbiorze liczb rzeczywistych równanie (3.10) ma rozwiązanie dane wzorami:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3.11}$$

gdzie $\sqrt{\Delta}$ jest arytmetycznym pierwiastkiem z $\Delta \geqslant 0$. Natomiast dla $\Delta < 0$ równanie (3.10) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Dla równania $x^2 + 1 = 0$, $\Delta = -4 < 0$. Stąd widać, że równanie $x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych. Jednak wiemy już, że liczby zespolone $x_1 = i$, $x_2 = -i$ są rozwiązaniami rozważanego równania, mimo, że $\Delta = -4 < 0$.

Rozważmy teraz równanie (3.10) w przypadku, gdy $\Delta < 0$. Chcemy znaleźć rozwiązanie tego równania w zbiorze liczb zespolonych. Oznacza to, że szukamy wszystkich liczb zespolonych x_0 takich, że

$$ax_0^2 + bx_0 + c = 0.$$

Mimo tego, że $\Delta < 0$, to istnieje algebraiczny pierwiastek drugiego stopnia z Δ $\left(\sqrt{\Delta}\right)$. Możemy napisać tak

$$\Delta = |\Delta|\, i^2,$$

gdzie $|\Delta|$ — wartość bezwzględna z Δ.

Wtedy $\sqrt{\Delta} = \sqrt{|\Delta|\, i^2} = \left\{i\sqrt{|\Delta|}, -i\sqrt{|\Delta|}\right\}$ gdzie $\sqrt{|\Delta|}$ — arytmetyczny pierwiastek z $|\Delta| > 0$.

Łatwo sprawdzić, że równanie (3.10), dla $\Delta < 0$, w zbiorze liczb zespolonych ma dokładnie dwa rozwiązania dane wzorami

$$x_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \tag{3.12}$$

gdzie: $x_1, x_2 \in C$.

Widać, że $x_1 = \overline{x}_2$ (x_1 jest sprzężeniem x_2).

Teraz weźmy pod uwagę równanie

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.13}$$

dla $a, b, c \in C$, $a \neq 0$. Jest to równanie kwadratowe o współczynnikach zespolonych. Rozwiązaniem tego równania nazywamy zbiór wszystkich liczb $x_0 \in C$ takich, że

$$ax_0^2 + bx_0 + c = 0.$$

Dla równania (3.13) możemy obliczyć $\Delta = b^2 - 4ac$. Jednak w tym przypadku, pytanie czy $\Delta > 0$ nie ma sensu. (Dlaczego?)

Wiemy jednak, że istnieje $\sqrt{\Delta}$ — algebraiczny pierwiastek drugiego stopnia z $\Delta \in C$. Oprócz tego pierwiastek ten ma dwie wartości, oznaczamy je przez $\left(\sqrt{\Delta}\right)_1$, $\left(\sqrt{\Delta}\right)_2$.

Dowodzi się, że równanie (3.13) w zbiorze liczb zespolonych ma dokładnie dwa rozwiązania dane wzorami

$$x_1 = \frac{-b + \left(\sqrt{\Delta}\right)_1}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \left(\sqrt{\Delta}\right)_2}{2a} \tag{3.14}$$

Łatwo widać, że wzory (3.11), (3.12) i (3.14) mają podobną strukturę. Możemy je zapisać w postaci ogólnej

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

gdzie:

$\sqrt{\Delta}$ — pierwiastek algebraiczny z liczby Δ bez względu na to, czy $\Delta \geqslant 0$, $\Delta < 0$, $\Delta \in C$,

$x_{1,2}$ — oznacza dwa pierwiastki: x_1 dla pierwszej wartości $\sqrt{\Delta}$, a x_2 dla drugiej wartości $\sqrt{\Delta}$.

Przykład

W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie

$$x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Widać, że $\Delta = -4 < 0$, $\sqrt{|\Delta|} = \sqrt{4} = 2$ i ze wzorów (3.12) mamy

$$x_1 = \frac{-4 - i2}{2} = -2 - i, \qquad x_1 = \frac{-4 + i2}{2} = -2 + i.$$

Łatwo zauważyć, że $x_2 = \overline{x}_1$.

Przykład

Wyznaczyć rozwiązanie równania

$$x^2 - \sqrt{2}(1 + i)x + \frac{3}{2}i = 0$$

w zbiorze liczb zespolonych.

W tym przykładzie mamy

$$\Delta = \left(-\sqrt{2}(1+i)\right)^2 - 6i = -2i, \qquad \sqrt{\Delta} = \begin{cases} 1-i \\ -1+i \end{cases}.$$

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy $\left(\sqrt{\Delta}\right)_1 = 1-i$, $\left(\sqrt{\Delta}\right)_2 = -1+i$.

Stąd:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}(1+i)+1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} + i\frac{\sqrt{2}-1}{2},$$
$$x_2 = \frac{\sqrt{2}(1+i)-1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} + i\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

i widać, że $x_2 \neq \overline{x}_1$.

Przykład

W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równanie

$$x^3 + 8 = 0.$$

Równanie to możemy zapisać w postaci $x^3 = -8$. Zatem mamy obliczyć $\sqrt[3]{-8}$, gdzie symbol $\sqrt[3]{-8}$ oznacza algebraiczny pierwiastek. Widać, że

$$-8 = 8\left(\cos\pi + i\sin\pi\right).$$

Stąd $\sqrt[3]{-8}$ to liczby:

$$x_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3},$$

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = 2\left(-1+i0\right) = -2,$$

$$x_2 = 2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{1}{3}\pi - i\sin\frac{1}{3}\pi\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Liczby: $x_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1 - i\sqrt{3}$ są więc rozwiązaniami równania $x^3 + 8 = 0$.

3.5. Postać wykładnicza liczby zespolonej

Funkcja $f(x) = e^x$ jest określona dla $x \in R$, gdzie $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. W naukach technicznych, ale nie tylko, bardzo użyteczna jest funkcja $f(z) = e^z$, gdzie $z = x + iy \in C$.

Wprowadzimy definicję funkcji e^z dla argumentu zespolonego

$$e^z = e^{x+iy} \stackrel{\text{df}}{=} e^x e^{iy},$$

gdzie $e^{iy} \stackrel{\text{df}}{=} \cos y + i\sin y$.

Przykład

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$e^{\frac{1}{2}-i\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{1}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{e}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sqrt{e}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Na podstawie przyjętej definicji mamy następujący wzór Eulera

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad \text{dla } \varphi \in R.$$

Stąd liczbę $z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ możemy napisać w postaci

$$z = |z|\,e^{i\varphi} \tag{3.15}$$

Wzór (3.15) definiuje tzw. wykładniczą postać liczby zespolonej. Funkcja e^z ma następujące własności:

a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$,

b) $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$,

dla z_1, $z_2 \in C$.

Przykład

Widać, że

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos x + i\sin x + \cos(-x) + i\sin(-x)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(2\cos x + i\sin x - i\sin x\right) = \cos x.\end{aligned}$$

Natomiast

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) &= \frac{1}{2i}\left(\cos x + i\sin x - \cos(-x) - i\sin(-x)\right) = \\ &= \frac{1}{2i}\left(2i\sin x\right) = \sin x.\end{aligned}$$

Zależności te zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\ \sin x &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\end{aligned} \tag{3.16}$$

dla $x \in R$. W literaturze zależności (3.16) nazywają się wzorami Eulera.

Przykład

Z definicji funkcji wykładniczej argumentu zespolonego mamy:

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},$$
$$-i=e^{i\frac{3}{2}\pi},$$
$$-1=e^{i\pi},$$
$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{4}-\left(-i\frac{\pi}{4}\right)}=i.$$

Przykład

Z zależności $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ otrzymamy

$$\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+3\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x.$$

Zadania

1. Wyznaczyć $x, y \in R$ takie, że:

   a) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$,

   b) $(-3-2i)x+(5i)y=2$,

   c) $\dfrac{x}{2-3i}+\dfrac{y}{3+2i}=1$.

2. Przedstawić w postaci trygonometrycznej następujące liczby:

   a) -1, b) i, c) $1-i$, d) $-1-i$,

   e) $1+i\sqrt{3}$, f) $2i$, g) $\sqrt{3}-1$, h) $-1+i\sqrt{3}$.

3. Obliczyć:

   a) $(1+2i)^6$, b) $(3+i)^7$, c) $(2-i)^5$, d) i^n, gdzie $n \in N$,

   e) $\dfrac{(1+2i)^2-(1+i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$, f) $\dfrac{(1-i)^7}{(1+i)^9}$, g) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

4. Obliczyć następujące pierwiastki algebraiczne:

   a) $\sqrt{3i}$, b) $\sqrt[3]{-i}$, c) $\sqrt{-8i}$, d) $\sqrt{-4}$,

   e) $\sqrt{4}$, f) $\sqrt[3]{-2}$, g) $\sqrt[5]{1}$.

BG AGH

5. Wyznaczyć rozwiązania (z niewiadomą $x \in C$) równania:
   a) $(2+i)x^2 - (5-1)x + (2-2i) = 0$,
   b) $x^2 - (3-2i)x + (5-5i) = 0$,
   c) $x^2 + x + 1 = 0$,
   d) $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$,
   e) $-x^2 - 2x - 3 = 0$,
   f) $|x| - x - 1 = 2i$,
   g) $|x| + x = 2 + i$.
6. Na płaszczyźnie zespolonej Gaussa naszkicować zbiór wszystkich $z = x + iy \in C$ takich, że:
   a) $|z| < 2$,
   b) $|z+i| \leqslant 1$,
   c) $|z-1-i| < 2$,
   d) $|z| = 1, \quad \arg z = \dfrac{\pi}{6}$,
   e) $|z-(2+3i)| = 4$,
   f) $|z - z_0| = r$, gdzie $z_0 \in C$, $r \in R$, $r > 0$.

BG AGH

Rozdział 4.

Wielomiany i funkcje wymierne

4.1. Wielomiany

Funkcję postaci

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

nazywamy wielomianem o współczynnikach a_0, $a_1, \ldots, a_n$.

Jeżeli $a_i \in R$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ to $f(x)$ nazywamy wielomianem rzeczywistym. Jeżeli $a_n \neq 0$ to mówimy, że $f(x)$ jest wielomianem stopnia n.

Funkcję $f(x) \equiv 0$ nazywamy wielomianem zerowym.

Miejscem zerowym wielomianu $f(x)$ nazywamy każdy pierwiastek równania

$$f(x) = 0.$$

Zamiast mówić miejsca zerowe wielomianu, mówimy krótko zera wielomianu. Zatem, liczba a jest zerem wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) = 0$. Miejsce zerowe wielomianu może być liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Jeżeli $a \in R$ $(a \in C)$ to mówimy, że a jest rzeczywistym (zespolonym) zerem wielomianu.

Liczbę a nazywamy k-krotnym zerem wielomianu $f(x)$, jeżeli

$$f(x) = (x-a)^k g(x), \qquad g(a) \neq 0,$$

gdzie $g(x)$ jest wielomianem i stopień $g(x)$ jest mniejszy niż stopień $f(x)$. Zero k-krotne wielomianu $f(x)$ liczymy jako k zer tego wielomianu.

Przykład

Weźmy pod uwagę wielomian

$$f(x) = 2x^4 - 18x^2 + 8x + 24 \tag{4.1}$$

Łatwo obliczyć, że $f(2) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(-3) = 0$, czyli liczby 2, -1, -3 są miejscami zerowymi rozpatrywanego wielomianu.

Proste rachunki pozwalają stwierdzić, że

$$f(x) = 2x^4 - 18x^2 + 8x + 24 = 2(x-2)^2(x+1)(x+3).$$

Oznacza to, wobec przyjętych definicji, że $x_1 = 2$ jest dwukrotnym, $x_2 = -1$ oraz $x_3 = -3$ są jednokrotnymi zerami rozważanego wielomianu. Zatem wielomian (4.1) ma cztery pierwiastki: jeden dwukrotny oraz dwa jednokrotne.

BG AGH

Mówimy, że wielomiany:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$h(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{x\in R} f(x) = h(x).$$

Jeżeli $f(x)$ nie jest wielomianem zerowym, to wielomian $g(x)$ nazywamy dzielnikiem wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $h(x)$ taki, że $f(x) = g(x)\cdot h(x)$. Mówimy wówczas, że wielomian $f(x)$ jest podzielny przez $g(x)$.

Teraz przypomnimy znane twierdzenia ze szkoły średniej.

Twierdzenie 4.1. *Wielomiany:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$
$$h(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia oraz mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x, czyli $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots$.

Twierdzenie 4.2. *Liczba a jest k-krotnym zerem wielomianu $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $f(x)$ jest podzielny przez $(x-a)^k$ i nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$.*

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 4.3. (podstawowe twierdzenie algebry). *Wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$ ma dokładnie n miejsc zerowych, przy czym zera k-krotne liczymy k razy. Wówczas*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zerami wielomianu $f(x)$.

W twierdzeniu 4.3 liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mogą być rzeczywiste lub zespolone, mogą to być zera pojedyncze lub wielokrotne wielomianu $f(x)$.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 4.4. *Jeżeli liczba $z \in C$ jest zerem wielomianu rzeczywistego*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

gdzie $a_i \in R$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, to liczba sprzężona do z, czyli $\overline{z}$, również jest zerem wielomianu $f(x)$.

Dowód. Z założenia mamy $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$. Z równości dwóch liczb zespolonych wynika, że liczby do nich sprzężone też są równe, czyli

$$\overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{0}.$$

Stąd i z własności liczb zespolonych mamy

$$\overline{a}_n \left(\overline{z}\right)^n + \overline{a}_{n-1} \left(\overline{z}\right)^{n-1} + \cdots + \overline{a}_1 \overline{z} + \overline{a}_0 = 0.$$

Z założenia, że $a_i \in R$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ otrzymujemy

$$a_n \left(\overline{z}\right)^n + a_{n-1} \left(\overline{z}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = 0.$$

To zaś oznacza, że $f\left(\overline{z}\right) = 0$, czyli rozważane twierdzenie jest udowodnione.

Przykład

Weźmy pod uwagę równanie kwadratowe

$$x^2 - 4x + 13 = 0,$$

gdzie po lewej stronie znaku równości jest wielomian o współczynnikach rzeczywistych. Łatwo wyliczyć, że liczba zespolona $z_1 = 2 + 3i$ jest pierwiastkiem rozważanego równania.

Stąd i z twierdzenia 4.4 wynika, że $z_2 = \bar{z}_1 = 2 - 3i$ również jest pierwiastkiem równania z tego przykładu.

Natomiast z twierdzenia 4.3 wynika, że równanie $x^2 - 4x + 13 = 0$ ma dokładnie dwa pierwiastki, czyli innych, oprócz $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$, już nie ma.

Z twierdzenia 4.4 wynika następujący praktyczny

Wniosek. Każdy wielomian stopnia nieparzystego, o współczynnikach rzeczywistych, ma przynajmniej jedno zero rzeczywiste.

Rozważane do tej pory wielomiany były funkcjami jednej zmiennej. Podamy teraz definicję wielomianu dwóch zmiennych.

Definicja. *Funkcję postaci*

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j$$

nazywamy wielomianem zmiennych x, y o współczynnikach a_{ij}. Mówimy, że $f(x, y)$ jest wielomianem dwóch zmiennych.

Przykład

Wielomiany dwóch zmiennych:

$f(x, y) = 4x^3 + 2x^2 y^3 + 5y^4 + 5$ — wielomian zmiennych x, y,

$g(x, t) = 3x^4 + 2t^2 + 13xt$ — wielomian zmiennych x, t,

$h(u, v) = 5uv + 3u^2 v + 5$ — wielomian zmiennych u, v.

4.2. Funkcje wymierne

Wielomiany, jednej lub dwóch zmiennych, należą do najprostszych funkcji elementarnych i są często stosowane w praktyce inżynierskiej. Podamy teraz definicję funkcji wymiernych.

Definicja. *Funkcję*

$$q(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},$$

gdzie $P(x)$, $Q(x)$ są wielomianami zmiennej x, nazywamy funkcją wymierną zmiennej x.

Można powiedzieć krótko: funkcja wymierna jest ilorazem dwóch wielomianów.

Przykład

Łatwo widać, że funkcje

$$q(x) = \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 3}{x^4 + 3x^2 + 2}, \qquad p(x) = x^3 - 2x + 6$$

są funkcjami wymiernymi zmiennej x.

Natomiast funkcja

$$h(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x} + 3x^2 + 1}$$

nie jest funkcją wymierną, gdyż $\sqrt{x} + 3x^2 + 1$ nie jest wielomianem zmiennej x.

Szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej jest wielomian.

Definicja. *Funkcję postaci*

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} a_{ij}x^i y^j}{\sum\limits_{i=0}^{k}\sum\limits_{j=0}^{l} b_{ij}x^i y^j},$$

gdzie: $P(x, y)$, $Q(x, y)$ są wielomianami dwóch zmiennych, nazywamy funkcją wymierną zmiennych x, y.

Przykłady

Funkcje wymierne dwóch zmiennych:

$$R(x, y) = \frac{xy + 3x^2 y + 2x}{x^2 + y^3} \text{ — funkcja wymierna zmiennych } x, y,$$

$$q(t,x) = \frac{t^3x + 7t^2x^2}{2t^2+3} \quad \text{— funkcja wymierna zmiennych } t, x,$$

$$p(u,v) = \frac{5 + uv - 3u^2v}{u^3 + 2uv} \quad \text{— funkcja wymierna zmiennych } u, v.$$

Łatwo zauważyć, że szczególnym przypadkiem funkcji wymiernej dwóch zmiennych jest wielomian dwóch zmiennych. Każdy iloraz dwóch wielomianów, z których przynajmniej jeden jest funkcją dwóch zmiennych, jest funkcją wymierną dwóch zmiennych.

Natomiast funkcja

$$f(x,y) = \frac{x^2 + ye^x}{x^2 + 3y}$$

nie jest funkcją wymierną zmiennych (x, y), gdyż x^2+ye^x nie jest wielomianem zmiennej x.

BG AGH

Zadania

1. Wykonaj następujące dzielenia wielomianów:
   a) $(3x^2 + 2x + 5) : (x + 3)$,
   b) $(5x^2 - 5x - 30) : (x - 3)$,
   c) $(y^2 - 39y + 180) : (y - 13)$,
   d) $(4x^3 + x^2) : (x + 3)$.
2. Dla jakiej wartości b wielomian $2bt^3 - 4t^2 + bt - 2b$ jest podzielny przez $t - 2$?
3. Wyznacz zera wielomianów:
   a) $f(x) = (2x + 3)(x - 2)(3x^2 + 5x - 2)$,
   b) $f(x) = (3 - 2x)(2x - 3)(x^2 + 1)$.
4. Liczba $x = 2$ jest miejscem zerowym wielomianu $x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$. Wyznacz krotność tego miejsca zerowego.
5. Podaj przykład funkcji $q(x, y)$, która jest funkcją wymierną zmiennej x i nie jest funkcją wymierną zmiennych x, y.

ROZDZIAŁ 5.

Macierze i wyznaczniki

5.1. Wstęp

W szkole średniej była omawiana wyznacznikowa metoda rozwiązywania układu równań. W celu przypomnienia tej partii materiału weźmy pod uwagę układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{5.1}$$

gdzie:

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} — zadane współczynniki układu równań,
b_1, b_2 — zadane prawe strony układu równań,
x_1, x_2 — niewiadome.

Rozwiązaniem układu równań (5.1) nazywamy każdą uporządkowaną parę $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ taką, że

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 = b_1 \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 = b_2 \end{cases}.$$

Układ równań może mieć dokładnie jedno rozwiązanie, więcej niż jedno rozwiązanie lub może nie mieć rozwiązań.

Współczynniki układu równań (5.1) możemy zapisać w postaci uporządkowanej tablicy liczb

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

którą nazywamy macierzą współczynników rozważanego układu równań. Prawe strony oraz niewiadome w układzie równań (5.1) zapiszemy w postaci macierzy

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Mówimy, że $\left(a_{11}, a_{12}\right)$ jest pierwszym wierszem, a $\left(a_{21}, a_{22}\right)$ drugim wierszem macierzy $\mathbf{A}$. Natomiast $\left(a_{11}, a_{21}\right)$ nazywamy pierwszą kolumną, a $\left(a_{12}, a_{22}\right)$ drugą kolumną macierzy $\mathbf{A}$.

BG AGH

Zatem macierz $\mathbf{A}$ ma dwa wiersze i dwie kolumny, macierz $\mathbf{b}$ ma dwa wiersze i jedną kolumnę, macierz $\mathbf{x}$ również ma dwa wiersze i jedną kolumnę. W macierzy $\mathbf{A}$ liczba wierszy jest równa liczbie kolumn — dwa wiersze i dwie kolumny. Mówimy, że jest to macierz kwadratowa.

Macierzy kwadratowej

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

możemy przyporządkować liczbę $ad-bc$. Mówimy, że jest to wyznacznik z tej macierzy i piszemy w postaci

$$\det \mathbf{D} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \stackrel{\text{df}}{=} ad - bc.$$

Możemy też pisać tak

$$\left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|, \quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| = \det \mathbf{D} = ad - bc.$$

Natomiast

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Oprócz wyznacznika z macierzy współczynników układu równań (5.1) weźmiemy jeszcze pod uwagę następujące dwa wyznaczniki

$$W_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad W_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

W szkole średniej było podane następujące

Twierdzenie (Cramera). *Jeżeli* $|\mathbf{A}| \neq 0$, *to układ równań* (5.1) *ma dokładnie jedno rozwiązanie oraz rozwiązanie to dane jest wzorami*

$$x_1 = \frac{W_1}{|\mathbf{A}|}, \qquad x_2 = \frac{W_2}{|\mathbf{A}|} \qquad \text{(wzory Cramera)}$$

W ten sposób rozwiązanie układu równań (5.1) możemy wyliczyć przy użyciu wyznaczników z macierzy kwadratowych.

5.2. Definicje i podstawowe rodzaje macierzy

Teraz podamy uogólnienie pojęcia macierzy oraz działania na macierzach.

Funkcję, która każdej parze liczb naturalnych $\big(i,j\big)$ $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m)$ przyporządkowuje dokładnie jedną wartość $a_{ij}\in R$ (lub $a_{ij}\in C$) nazywamy macierzą.

Macierz zapisujemy jako prostokątną tablicę liczb

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm}\end{bmatrix}$$

lub krócej $\mathbf{A}=\big[a_{ij}\big]_{n\times m}$. Wartości a_{ij} nazywamy elementami macierzy $\mathbf{A}$.

Jeżeli $m=n$, to $\mathbf{A}$ nazywamy macierzą kwadratową. Ciąg $\big(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{im}\big)$ nazywamy i-tym wierszem macierzy $\mathbf{A}$. Natomiast ciąg $\big(a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{nj}\big)$ nazywamy j-tą kolumną rozpatrywanej macierzy. Zatem macierz $\mathbf{A}$ ma n wierszy i m kolumn. W macierzy kwadratowej liczba wierszy jest równa liczbie kolumn, i tę wspólną liczbę wierszy i kolumn nazywamy stopniem macierzy kwadratowej. W macierzy o n wierszach i m kolumnach uporządkowaną parę $\big(n,m\big)$ nazywamy wymiarem macierzy i wymiar ten zapisujemy w postaci $n\times m$.

Zapis

$$\mathbf{A}=\big[a_{ij}\big]_{n\times m}$$

oznacza, że a_{ij} są elementami macierzy $\mathbf{A}$ o wymiarach $n\times m$.

Jeżeli wszystkie elementy macierzy $\mathbf{A}$ są liczbami rzeczywistymi, to $\mathbf{A}$ nazywamy macierzą rzeczywistą.

Przyjmujemy oznaczenia:

$$\mathbf{R}^{n\times m}=\Big\{\mathbf{A}=\big[a_{ij}\big]_{n\times m}\colon a_{ij}\in R\quad \text{dla}\quad i=1,2\ldots,n;\ j=1,2\ldots,m\Big\},$$

$$\mathbf{C}^{n\times m}=\Big\{\mathbf{A}=\big[a_{ij}\big]_{n\times m}\colon a_{ij}\in C\quad \text{dla}\quad i=1,2\ldots,n;\ j=1,2\ldots,m\Big\}.$$

Widać, że $\mathbf{R}^{n\times m}$ jest zbiorem wszystkich macierzy rzeczywistych o wymiarach $n\times m$, natomiast elementy macierzy $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times m}$ mogą być zespolone.

Podamy teraz kilka szczególnych postaci macierzy oraz ich nazwy.

Macierz, która ma tylko jeden wiersz nazywamy macierzą wierszową (lub jednowierszową) i zapisujemy ją w postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\end{bmatrix}.$$

Macierz, która ma tylko jedną kolumnę nazywamy macierzą kolumnową (lub jednokolumnową) i zapisujemy ją w postaci

$$\begin{bmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{bmatrix}.$$

Macierz, której wszystkie elementy są równe zeru, nazywamy macierzą zerową. Macierz zerową oznaczamy $\left[\mathbf{0}\right]$ lub krócej $\mathbf{0}$.

W macierzy kwadratowej $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, ciąg $\left(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\right)$ nazywamy przekątną główną tej macierzy. Macierz kwadratową, w której wszystkie elementy poza przekątną główną są równe zeru nazywamy macierzą diagonalną i oznaczamy $\mathbf{diag}\left(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\right)$.

Zatem

$$\mathbf{diag}\left(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \ldots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz

$$\mathbf{I} = \mathbf{diag}\left(1, 1, \ldots, 1\right) = \begin{bmatrix} 1 \; 0 \; 0 \; \ldots \; 0 \\ 0 \; 1 \; 0 \; \ldots \; 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \; 0 \; 0 \; \ldots \; 1 \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą jednostkową. Widać, że macierz jednostkowa $\mathbf{I}$ jest macierzą diagonalną, w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe jedynce.

Macierz diagonalną postaci

$$\mathbf{diag}\left(a, a, \ldots, a\right) = \begin{bmatrix} a \; 0 \; 0 \; \ldots \; 0 \\ 0 \; a \; 0 \; \ldots \; 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \; 0 \; 0 \; \ldots \; a \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą skalarną. Przykładem macierzy skalarnej jest macierz jednostkowa.

Macierz kwadratową $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, której elementy spełniają warunek

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

nazywamy macierzą symetryczną. Widać, że macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & i+2 \\ 7 & 3 & -5 \\ i+2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

jest macierzą symetryczną.

Macierz kwadratową $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, której elementy spełniają warunek

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

nazywamy macierzą skośnie symetryczną.

Czy można dobrać takie $x \in R$, aby macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ x & 0 \end{bmatrix}$$

była macierzą skośnie symetryczną? Czy macierz może być jednocześnie symetryczna i skośnie symetryczna?

5.3. Działania na macierzach

5.3.1. Równość, dodawanie i odejmowanie macierzy

Mówimy, że macierze $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$, $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$, są równe, piszemy $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, jeżeli

$$a_{ij} = b_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Dla dwóch macierzy o tych samych wymiarach wprowadza się pojęcie sumy i różnicy macierzy.

Jeżeli $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$, $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$, to sumą macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, piszemy $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, nazywamy taką macierz $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]_{n\times m}$, że

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

czyli

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{n\times m}.$$

Analogicznie określamy różnicę, $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$, dwóch macierzy o tych samych wymiarach. Mianowicie

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \left[a_{ij} - b_{ij}\right]_{n\times m}.$$

Przykład

Niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3+i & -4 \\ 5 & 7-i & i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 4+i \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix},$$

to

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 5+i & i \\ 5 & 13-i & 2+i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -6 & -1-i & 8+i \\ -5 & -1+i & 2-i \end{bmatrix}.$$

Z definicji sumy i różnicy macierzy łatwo wynika następujące

TWIERDZENIE 5.1. *Jeżeli* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{C}^{n\times m}$, *to:*

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ — *przemienność dodawania,*
2) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ — *łączność dodawania,*
3) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ — *gdzie* $\mathbf{0}$ — *macierz zerowa,* $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

BG AGH

5.3.2. Mnożenie macierzy przez skalar

Teraz wprowadzimy pojęcie iloczynu macierzy przez liczbę.

Iloczynem macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$, przez liczbę $\lambda \in \mathbf{C}$, piszemy $\lambda\mathbf{A}$, nazywamy macierz $\left[\lambda a_{ij}\right]_{n\times m}$. Zapis $\mathbf{A}\lambda$ oznacza to samo, co $\lambda\mathbf{A}$.

Przykład

Weźmy pod uwagę macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Zatem dla $\lambda = 3$ mamy

$$\lambda\mathbf{A} = 3\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 21 & 15 \end{bmatrix}.$$

Macierz $(-1)\mathbf{A}$ oznaczamy przez $-\mathbf{A}$.

Z przyjętych definicji wynika następujące

Twierdzenie 5.2. *Jeżeli* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$, $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{n\times m}$, α, $\beta \in \mathbf{C}$, *to*

1) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot 1 = \mathbf{A}$,
2) $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$, *gdzie* $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^{n\times m}$,
3) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$,
4) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$,
5) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.

5.3.3. Mnożenie macierzy przez macierz, potęga macierzy

Weźmy pod uwagę macierze $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times p}$, $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{p\times m}$. Warto zwrócić uwagę, że liczba kolumn w macierzy $\mathbf{A}$ jest równa liczbie wierszy w macierzy $\mathbf{B}$.

Definicja. *Iloczynem macierzy* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times p}$ *przez macierz* $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{p\times m}$ *nazywamy taką macierz* $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]_{n\times m}$, *piszemy* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, *że*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m) \tag{5.2}$$

Zatem iloczyn $\mathbf{AB}$ jest zdefiniowany wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy $\mathbf{A}$ jest równa liczbie wierszy macierzy $\mathbf{A}$.

Ze wzoru (5.2) widać, że element c_{ij} w macierzy $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right] = \mathbf{AB}$ jest iloczynem skalarnym i-tego wiersza, czyli $\left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}\right)$, macierzy $\mathbf{A}$ przez j-tą kolumnę, $\left(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{pj}\right)$, macierzy $\mathbf{B}$, zatem

$$c_{ij} = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}\right)\left(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{pj}\right) = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Przykład

Dane są macierze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Widać, że istnieje $\mathbf{AB}$ oraz

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Natomiast, nie istnieje iloczyn macierzy $\mathbf{B}$ przez macierz $\mathbf{A}$.

Przykład

Weźmy pod uwagę macierze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dla tych macierzy mamy

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}.$$

Czyli istnieje $\mathbf{AB}$ oraz $\mathbf{BA}$, lecz $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Z ostatniego przykładu widać, że mnożenie macierzy nie jest działaniem przemiennym. W związku z tym $\mathbf{AB}$ nazywamy iloczynem prawostronnym macierzy $\mathbf{A}$ przez macierz $\mathbf{B}$, natomiast $\mathbf{BA}$ — iloczynem lewostronnym macierzy $\mathbf{A}$ przez macierz $\mathbf{B}$.

Macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, dla których mnożenie jest przemienne, czyli $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, nazywamy macierzami przemiennymi.

Jakie muszą być wymiary macierzy przemiennych?

Czy z równości $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ wynika, że $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ lub $\mathbf{B} = \mathbf{0}$?

Z przyjętych definicji działań na macierzach wynika następujące

TWIERDZENIE 5.3. *Jeżeli* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *są macierzami o odpowiednich wymiarach,* λ *jest liczbą, to:*

1) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$,
2) $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}$,
3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$,
4) $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$,
5) $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$, *gdy* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

BG AGH

Pytanie

Jakie powinny być wymiary macierzy $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ w punktach 1), 2), 3), 4) powyższego twierdzenia?

Podaj przykład takiej macierzy $\mathbf{A}$, że $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$, natomiast $\mathbf{AI}$ nie istnieje.

Dla macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ przyjmujemy oznaczenia:

$$\mathbf{A}^0 \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{I},$$
$$\mathbf{AA} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{A}^2,$$
$$\mathbf{A}^k \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{AA}^{k-1} = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{A} \qquad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

$\mathbf{A}^k$ nazywamy k-tą potęgą macierzy $\mathbf{A}$.

Czy stąd wynika, że $(\mathbf{AB})^n = \mathbf{A}^n\mathbf{B}^n$?

Przykład

Weźmy pod uwagę układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{5.3}$$

Przyjmujemy oznaczenia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Z definicji iloczynu macierzy i równości macierzy wynika, że układ równań (5.3) możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

gdzie:

$\mathbf{A}$ — macierz współczynników układów równań,
$\mathbf{b}$ — macierz prawych stron,
$\mathbf{x}$ — macierz niewiadomych.

Przykład

Rozpatrzmy dwa niezależne układy równań:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{5.4}$$

BG AGH

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = c_2 \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = c_3 \end{cases} \tag{5.5}$$

Układy równań (5.4) i (5.5) są niezależne, ale współczynniki przy odpowiednich niewiadomych w pierwszym i drugim układzie równań są takie same. Przy oznaczeniach

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

układ równań (5.4) zapisujemy w postaci

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

natomiast układ równań (5.5) w postaci

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{c}.$$

Pytanie
Jak zapisać oba te układy równań w postaci jednego równania macierzowego?

5.4. Macierze transponowane i ortogonalne

Weźmy pod uwagę macierz $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$.
Macierz $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ taką, że

$$b_{ij} = a_{ji} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n),$$

nazywamy macierzą transponowaną macierzy $\mathbf{A}$ i oznaczamy przez $\mathbf{A}^T$.
Macierz $\mathbf{A}^T$ bywa też oznaczana przez $\mathbf{A}'$. Widać, że jeżeli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad \text{to} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Zatem macierz $\mathbf{A}^T$ powstaje z macierzy $\mathbf{A}$ przez zamianę kolumn na wiersze: z pierwszej kolumny macierzy $\mathbf{A}$ powstaje pierwszy wiersz macierzy $\mathbf{A}^T$, z drugiej kolumny drugi wiersz itd.

Przykład
Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{mamy} \quad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Łatwo zauważyć, że dla macierzy wierszowej

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

macierz $\mathbf{A}^T$ jest macierzą kolumnową, mianowicie

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Dowodzi się, że prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 5.4. *Jeżeli* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n\times p}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{p\times m}$, λ *jest liczbą, to:*

1) $(\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A})$,
2) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$,
3) $(\lambda\mathbf{A})^T = \lambda(\mathbf{A}^T)$,
4) $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \pm \mathbf{B}^T$, *jeżeli macierze* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *mają takie same wymiary.*

Przy użyciu macierzy transponowanej łatwo jest sprawdzić czy macierz jest symetryczna lub skośnie symetryczna. Mianowicie:
Macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n\times n}$ jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.
Macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n\times n}$ jest skośnie symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$.

Dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n\times n}$ zachodzi prosta równość

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\Big) + \frac{1}{2}\Big(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\Big) \tag{5.6}$$

Lecz $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ jest macierzą symetryczną, gdyż $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$. Analogiczne przekształcenia prowadzą do wniosku, że $\mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ jest macierzą skośnie symetryczną. Stąd i z (5.6) wynika, że każdą macierz kwadratową $\mathbf{A}$ możemy przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i skośnie symetrycznej.

Macierz kwadratową $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in R^{n\times n}$ nazywamy ortogonalną, jeżeli

$$\mathbf{AA}^T = \mathbf{I},$$

gdzie $\mathbf{I}$ — macierz jednostkowa ($\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{n\times n}$).

Z tej definicji i z zależności $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ wynika, że jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą ortogonalną, to $\mathbf{A}^T$ również jest macierzą ortogonalną.

Zatem dla macierzy ortogonalnej mamy:

$$\mathbf{AA}^T = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Z tych dwóch równości i z definicji iloczynu macierzy wynika

Twierdzenie 5.5. *Macierz kwadratowa* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \in R^{n\times n}$ *jest macierzą ortogonalną wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \begin{cases} 1 & gdy \quad i = j \\ 0 & gdy \quad i \neq j \end{cases},$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 1 & gdy \quad i = j \\ 0 & gdy \quad i \neq j \end{cases}.$$

Tezę tego twierdzenia możemy również wypowiedzieć w ten sposób, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby macierz kwadratowa była ortogonalna jest, aby iloczyn skalarny dwóch różnych wierszy (kolumn) tej macierzy był równy zeru, a iloczyn skalarny każdego wiersza (kolumny) przez siebie był równy jedynce.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 5.6. *Jeżeli macierze* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, *o wymiarach* $n \times n$, *są ortogonalne, to iloczyn* $\mathbf{AB}$ *też jest macierzą ortogonalną.*

Dowód. Z założenia mamy

$$\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{BB}^T = \mathbf{I}.$$

Stąd i z własności macierzy transponowanej otrzymujemy

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^T = (\mathbf{AB})\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^T)\mathbf{A}^T = \mathbf{AA}^T = \mathbf{I},$$

czyli macierz $\mathbf{AB}$ jest ortogonalna.

Przykład

Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

mamy

$$\mathbf{AA}^T = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I},$$

czyli rozpatrywana macierz $\mathbf{A}$ jest ortogonalna.

Pytania

1. Niech $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ będą macierzami symetrycznymi. Czy stąd wynika, że $\mathbf{AB}$ jest macierzą symetryczną? Jeżeli tak, to udowodnij. Jeżeli nie, to podaj przykład.
2. Zakładamy, że $\mathbf{A}$ jest macierzą symetryczną. Czy stąd wynika, że macierz $\mathbf{A}^k$ jest macierzą symetryczną dla $k = 0, 1, 2, \ldots$?

BG AGH

5.5. Wyznacznik z macierzy

5.5.1. Definicja wyznacznika

Na początku tego rozdziału była podana definicja wyznacznika z macierzy kwadratowej o wymiarach 2×2. W tym paragrafie podamy definicję wyznacznika z macierzy kwadratowej o dowolnych wymiarach — $n \times n$. Wcześniej jednak przypomnimy pewne pojęcia pomocnicze.

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ będzie dowolną permutacją liczb $1, 2, 3, \ldots, n$. Mówimy, że w permutacji $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ para liczb α_j, α_k tworzy inwersję, jeżeli

$$\alpha_j > \alpha_k \qquad \text{dla} \qquad j < k.$$

Na przykład w ciągu $3, 2, 1, 5, 4$ inwersję tworzą pary:

$$3, 2; \quad 3, 1; \quad 2, 1; \quad 5, 4.$$

Czyli w ciągu $3, 2, 1, 5, 4$ cztery pary liczb tworzą inwersję. Mówimy krótko, że w tym ciągu są cztery inwersje.

W ciągu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ liczbę par, które tworzą inwersję nazywamy liczbą inwersji tego ciągu.

Przez P_n oznaczamy zbiór wszystkich możliwych permutacji z ciągu $1, 2, 3, \ldots, n$. Wiadomo, że P_n zawiera $n!$ permutacji. Weźmy pod uwagę permutację $p = \big(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\big) \in P_n$. Oznaczamy przez ε_p liczbę inwersji w permutacji $p \in P_n$.

Podamy teraz definicję wyznacznika z macierzy kwadratowej $\mathbf{A} = \big[a_{ij}\big]_{n\times n}$.

Definicja. *Wyznacznikiem macierzy kwadratowej* $\mathbf{A} = \big[a_{ij}\big]_{n\times n}$ *nazywamy liczbę*

$$\sum_{p=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\in P_n} (-1)^{\varepsilon_p} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \tag{5.7}$$

gdzie ε_p *— liczba inwersji w permutacji* $p = \big(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\big)$.

Wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$ oznaczamy przez $\det \mathbf{A}$, $\det(\mathbf{A})$, $\det\big[a_{ij}\big]$, $|\mathbf{A}|$ lub

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Widać, że w zależności (5.7) sumowanie rozciąga się na wszystkie możliwe permutacje ciągu $1, 2, 3, \ldots, n$. Zatem w definicji wyznacznika suma zawiera $n!$ składników. Każdy z tych składników ma postać

$$(-1)^{\varepsilon_p} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \tag{5.8}$$

gdzie: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jest permutacją ciągu 1, 2, 3, $\ldots, n$. Innymi słowy, każdy ze składników sumy (5.7) jest iloczynem postaci (5.8), w którym występuje dokładnie jeden element z każdego wiersza macierzy $\mathbf{A}$. W iloczynie (5.8) występuje również dokładnie jeden element z każdej kolumny macierzy $\mathbf{A}$.

Stopień macierzy $\mathbf{A}$ nazywamy stopniem wyznacznika tej macierzy. Na podstawie przyjętej definicji obliczymy wyznacznik stopnia pierwszego, drugiego i trzeciego.

Dla $n = 1$, macierz ma postać $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$, P_1 jest zbiorem zawierającym jeden element — $P_1 = \{(1)\}$. Liczba inwersji w permutacji $p = (1) \in P_1$ wynosi zero. Zatem $\det\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = |a_{11}| = a_{11}$. W tym ostatnim zapisie $|a_{11}|$ oznacza wyznacznik z macierzy $\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$.

Dla $n = 2$, macierz $\mathbf{A}$ ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

W tym przypadku zbiór permutacji ma dwa elementy — $P_2 = \{(1,2), (2,1)\}$. Liczba inwersji w ciągu $(1, 2)$ wynosi zero, a w ciągu $(2, 1)$ jeden.

Z (5.7) mamy

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Dla $n = 3$ mamy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), (1,3,2), (2,1,3), (3,2,1)\}.$$

Poszczególne permutacje zbioru P_3 mają, odpowiednio, 0, 2, 2, 1, 1, 3 inwersji.

Stąd i z definicji wyznacznika, dla $n = 3$, otrzymamy

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Widać, że już dla $n = 3$ obliczanie wartości wyznacznika z definicji sprawia pewne trudności.

Istnieje prosty, mnemotechniczny sposób obliczania wartości wyznacznika stopnia trzeciego. Jest to tak zwany schemat (metoda) Sarrusa. Polega to na tym, że z prawej strony, w zapisie macierzy, dopisujemy pierwszą a następnie drugą kolumnę tej macierzy. Następnie obliczamy iloczyny elementów występujących na „przekątnych" tak powstałej tablicy. Iloczyny te bierzemy ze znakiem plus lub minus według następującego schematu:

$$\det \mathbf{A} = \begin{array}{c} + \qquad + \qquad + \\ \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \\ - \qquad - \qquad - \end{array} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

BG AGH

Przykład

Obliczyć metodą Sarrusa wyznacznik z macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Otrzymamy

$$\det \mathbf{A} = \left| \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{matrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} -2 & 1 \\ 0 & -5 \\ 4 & 1 \end{matrix} =$$

$$= (-2)(-5)(2) + (1)(-1)(4) + (3)(0)(1) -$$
$$-(3)(-5)(4) - (-2)(-1)(1) - (1)(0)(2) = 74.$$

Obliczanie wartości wyznacznika, z definicji wyznacznika, dla macierzy kwadratowych stopnia czwartego i wyższych jest bardzo czasochłonne. Czasochłonność ta przekracza nawet możliwości komputerów.

Pokażemy to na przykładzie.

Dla $n = 16$, czyli dla wyznacznika szesnastego stopnia, we wzorze (5.7) mamy $16! = 20922789888000$ składników. Do obliczenia każdego z tych składników musimy wykonać 16 mnożeń. Czyli wyznaczenie wartości wyznacznika, z definicji, wymaga wykonania $(16!) \times (16) = 334764638208000$ operacji mnożenia. Przypuśćmy, że obliczenia będziemy wykonywać na komputerze, który ma milion mnożeń na sekundę. Zatem komputer taki na wykonanie $(16!) \times (16)$ mnożeń potrzebuje więcej niż 334764638 sekund. Po przeliczeniu tych sekund na pełne 24 godziny w dniu, a dni na miesiące, otrzymamy, że komputer potrzebuje więcej niż 120 miesięcy na wykonanie $(16!) \times (16)$ mnożeń. W praktyce jest to nierealne. A z drugiej strony, w praktyce inżynierskiej obliczamy wartość wyznacznika dla $n > 100$. Mało tego, obliczenia te wykonujemy na komputerze i dla $n = 100$ wystarczy kilka minut. Wykorzystuje się w tych obliczeniach własności wyznaczników, które pozwalają uprościć, a zatem przyspieszyć, proces obliczeń.

5.5.2. Własności wyznacznika i twierdzenie Laplace'a

Z zależności (5.7) wynikają następujące twierdzenia:

TWIERDZENIE 5.7. *Jeżeli w macierzy* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *wszystkie elementy pewnego wiersza* (*kolumny*) *są równe zero, to* $\det\left(\mathbf{A}\right) = 0$.

TWIERDZENIE 5.8. *Jeżeli jeden z wierszy* (*jedną z kolumn*) *macierzy* $\mathbf{A}$ *pomnożymy przez liczbę* α, *to wyznacznik powstałej macierzy jest równy* $\alpha \det\left(\mathbf{A}\right)$.

TWIERDZENIE 5.9. *Jeżeli* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, *to* $\det\left(\mathbf{A}^T\right) = \det\left(\mathbf{A}\right)$.

Chociaż wyznacznik z macierzy **A** jest liczbą, a w liczbie nie ma wierszy i kolumn, to jednak będziemy mówić „wiersz wyznacznika” lub „kolumna wyznacznika”, a rozumiemy przez to wiersz lub kolumnę macierzy, dla której ten wyznacznik został obliczony.

TWIERDZENIE 5.10. *Jeżeli w wyznaczniku przestawimy dwa wiersze (kolumny), to wyznacznik zmieni znak na przeciwny.*

Przykład

Weźmy pod uwagę macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Możemy obliczyć, że $\det \mathbf{A} = 2$. Jeżeli w wyznaczniku, a dokładniej w macierzy **A**, przestawimy, czyli zmienimy miejscami, wiersz pierwszy z trzecim, to otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Z ostatniego twierdzenia wynika prosty

WNIOSEK 5.1. Jeżeli w wyznaczniku dwa wiersze (kolumny) są identyczne, to wyznacznik jest równy zero. Jeżeli w wyznaczniku elementy dwóch wierszy (kolumn) są proporcjonalne, to wyznacznik jest równy zero.

Przykład

W wyznaczniku

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

drugi wiersz jest proporcjonalny do czwartego wiersza — czwarty powstał z drugiego przez pomnożenie przez dwa. Stąd mamy, że wartość rozpatrywanego wyznacznika wynosi zero.

Weźmy pod uwagę macierz postaci

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & a_{1i} + b_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2i} + b_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{ni} + b_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

BG AGH

Przyjmujemy oznaczenia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & a_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & a_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(i-1)} & a_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(i-1)} & b_{1i} & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(i-1)} & b_{2i} & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(i-1)} & b_{ni} & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Wprost z definicji (5.7) wynika następująca równość

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

Dowodzi się, że prawdziwe są następujące twierdzenia:

TWIERDZENIE 5.11. *Wyznacznik nie zmienia swej wartości, jeżeli do elementów danej kolumny (wiersza) dodamy elementy innej kolumny (wiersza) pomnożone przez tę samą liczbę.*

TWIERDZENIE 5.12. *Jeżeli* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$, *to* $|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$.

Przykład

Chcemy obliczyć wyznacznik z macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 9 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Przy obliczaniu $\det \mathbf{A}$ możemy trzeci wiersz dodać do wiersza pierwszego. Zatem

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 9 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 10 \\ -1 & 9 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

W ostatnim wyznaczniku wiersz trzeci mnożymy przez 3 i dodajemy do wiersza drugiego. Otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 10 \\ -1 & 9 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 14 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Zaś w ostatnim wyznaczniku pierwszą kolumnę mnożymy przez -2 i dodajemy do trzeciej kolumny. W wyniku tych operacji mamy

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 5 & 0 & 14 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 18.$$

Przykład

Przy użyciu wyżej podanych twierdzeń obliczymy wyznacznik z macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & \alpha+\beta & 2 \\ -6 & \alpha+2\beta & 1 \\ 3 & -\alpha & 6 \end{bmatrix},$$

gdzie: α, β — parametry. Widać, że

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & \alpha+\beta & 2 \\ -6 & \alpha+2\beta & 1 \\ 3 & -\alpha & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & \alpha & 2 \\ -6 & \alpha & 1 \\ 3 & -\alpha & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & \beta & 2 \\ -6 & 2\beta & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 8 & 0 & 8 \\ -6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} + 3\beta \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} + 3\beta \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8\alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 13 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} + 3\beta \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -14 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\alpha(10) + 3\beta(29) = 80\alpha + 87\beta.$$

Niech $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$. W macierzy $\mathbf{A}$ skreślamy (wyrzucamy) pewną liczbę wierszy oraz pewną liczbę kolumn, tak aby pozostałe elementy rozpatrywanej macierzy stanowiły macierz kwadratową $\mathbf{B}$. Wyznacznik z macierzy $\mathbf{B}$ nazywamy minorem macierzy $\mathbf{A}$.

Przykład

Jeżeli w macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

skreślamy drugą i czwartą kolumnę, to otrzymamy macierz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy $\mathbf{B}$, $\det \mathbf{B} = -7$, jest minorem macierzy $\mathbf{A}$. W macierzy $\mathbf{A}$ możemy, dla przykładu, skreślić pierwszy wiersz oraz pierwszą, trzecią i czwartą kolumnę. W wyniku tych skreśleń otrzymamy macierz $\mathbf{B} = [3]$. Wyznacznik $|\mathbf{B}| = 3$ również jest minorem macierzy $\mathbf{A}$.

Weźmy teraz pod uwagę macierz kwadratową $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$. Jeżeli w tej macierzy skreślimy i-ty wiersz oraz j-tą kolumnę, to otrzymamy macierz kwadratową stopnia $n-1$. Wyznacznik tej macierzy stopnia $n-1$ jest minorem macierzy $\mathbf{A}$, oznaczamy go przez M_{ij}. Mówimy, że M_{ij} jest minorem stopnia $n-1$, który powstał w wyniku skreślenia i-tego wiersza oraz j-tej kolumny w macierzy $\mathbf{A}$.

Przykład

Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

mamy

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8, \qquad M_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nazywamy liczbę

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

gdzie M_{ij} — minor macierzy $\mathbf{A}$ powstały przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Przykład

Weźmy pod uwagę macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

W tym przykładzie mamy:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -23,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10.$$

Dowodzi się, że prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE (LAPLACE'A). *Jeżeli* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, *to:*

$$1)\ \det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.9}$$

lub

$$2)\ \det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.10}$$

gdzie A_{ik} $\left(A_{kj}\right)$ *— dopełnienie algebraiczne elementu* a_{ik} $\left(a_{kj}\right)$.

Wzory (5.9), (5.10) nazywamy, odpowiednio, rozwinięciem wyznacznika według elementów k-tej kolumny, k-tego wiersza. Twierdzenie Laplace'a jest fundamentalnym twierdzeniem w teorii wyznaczników. Umożliwia ono obliczanie wyznacznika stopnia n-tego za pomocą wartości wyznaczników stopnia $n - 1$.

BG AGH

Przykład

Niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obliczymy $\det(\mathbf{A})$ przez zastosowanie wzoru (5.9) dla $k = 1$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} = \\ &= 2A_{11} - 2A_{21} + 3A_{31} + 0A_{41} = 2M_{11} + 2M_{21} + 3M_{31}.\end{aligned}$$

W tym przykładzie

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 19, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

Zatem $\det \mathbf{A} = 2(19) + 2(-4) + 3(-3) = 21$.

Przykład

Obliczyć wyznacznik z macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Widać, że rozwijanie wyznacznika względem elementów danego wiersza (kolumny) przyspiesza obliczenia, gdy ten wiersz (kolumna) zawiera dużo elementów zerowych. W celu uzyskania elementów zerowych w wierszu (kolumnie) możemy korzystać z wcześniej podanych własności wyznacznika.

W tym przykładzie, w macierzy $\mathbf{A}$ najpierw dodajemy kolumnę czwartą do kolumny drugiej, a następnie do kolumny trzeciej dodajemy kolumnę piątą pomnożoną przez -1. Otrzymamy

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & -3 & -2 & 5 \\ 4 & 6 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tak otrzymany wyznacznik rozwiniemy według elementów drugiego wiersza. Zatem

$$\det \mathbf{A} = -2A_{24} + 3A_{25} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 & 4 \\ 1 & -3 & -3 & 5 \\ 4 & 6 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

BG AGH

W pierwszym z ostatnich wyznaczników kolumnę pierwszą mnożymy przez -1 i dodajemy do kolumny trzeciej, a następnie pierwszą kolumnę mnożymy przez -2 i dodajemy do kolumny czwartej. Zaś w drugim wyznaczniku kolumnę pierwszą mnożymy przez minus jeden i dodajemy do kolumny trzeciej, a następnie kolumnę pierwszą mnożymy przez 2 i dodajemy do kolumny czwartej.

W wyniku tych przekształceń mamy

$$\det \mathbf{A} = -2\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & -4 & 3 \\ 4 & 6 & -7 & -7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 & 5 \\ 1 & -3 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & -7 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 6 & -7 & -7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & -6 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \\ 6 & -7 & 11 \end{vmatrix}.$$

Do ostatnich dwóch wyznaczników możemy zastosować metodę Sarrusa i otrzymamy $\det \mathbf{A} = 127$.

Macierz postaci

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą trójkątną górną, a macierz

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą trójkątną dolną.

Z twierdzenia Laplace'a łatwo widać, że jeżeli $\mathbf{A}$ jest macierzą trójkątną górną lub dolną, to

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

5.6. Rząd macierzy

Weźmy pod uwagę macierz $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$. Niech r będzie liczbą naturalną taką, że $r \leqslant \min\{n, m\}$.

Jeżeli w macierzy $\mathbf{A}$ skreślimy $m - r$ kolumn i $n - r$ wierszy, to otrzymamy macierz kwadratową stopnia $r \geqslant 1$. Wyznacznik tak otrzymanej macierzy nazywamy wyznacznikiem stopnia r z macierzy $\mathbf{A}$.

Definicja. *Maksymalny stopień wyznacznika z macierzy* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$, *różnego od zera, nazywamy rzędem macierzy i oznaczamy przez* $\operatorname{rz}\big(\mathbf{A}\big)$.

Dodatkowo przyjmujemy, że rząd macierzy zerowej jest równy zero.

Zatem rząd macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ spełnia nierówność

$$0 \leqslant \operatorname{rz}\big(A\big) \leqslant \min\big\{n, m\big\}.$$

Z przyjętej definicji wynika, że jeżeli $\operatorname{rz}\big(\mathbf{A}\big) = r$, to każdy wyznacznik z tej macierzy, stopnia większego niż r, jest równy zero.

Przykład

Niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jedynym wyznacznikiem stopnia trzeciego z tej macierzy jest

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli $\operatorname{rz}\big(\mathbf{A}\big) < 3$. Jednym z wyznaczników stopnia drugiego z macierzy $\mathbf{A}$ jest

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

To, wobec definicji rzędu macierzy, oznacza, że $\operatorname{rz}\big(\mathbf{A}\big) = 2$.

Przykład

Rozważmy macierz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Najwyższy stopień wyznacznika tej macierzy wynosi 2, czyli $\operatorname{rz}\big(\mathbf{B}\big) \leqslant 2$. Istnieją następujące wyznaczniki stopnia drugiego z macierzy $\mathbf{B}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zatem $\operatorname{rz}\big(\mathbf{B}\big) < 2$. Jednym z wyznaczników stopnia pierwszego z rozważanej macierzy jest

$$\big|\left[-2\right]\big| = -2 \neq 0,$$

a to oznacza, że $\operatorname{rz}\big(\mathbf{B}\big) = 1$.

Z własności wyznaczników wynika następujące

TWIERDZENIE 5.13. *Rząd macierzy* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ *nie ulega zmianie w wyniku następujących przekształceń macierzy:*

1) *transpozycji* $(\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}(\mathbf{A}^T))$,
2) *pomnożenia dowolnego wiersza (kolumny) macierzy przez liczbę (rzeczywistą lub zespoloną) różną od zera,*
3) *przestawienia wierszy (kolumn),*
4) *dodania do wiersza (kolumny) innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez dowolną liczbę,*
5) *skreślenia lub dołączenia wiersza (kolumny) składającego się z samych zer.*

Przykład

Wyznaczyć rząd macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Przy wyznaczaniu $\mathrm{rz}(\mathbf{A})$ skorzystamy z przekształceń, które nie zmieniają rzędu macierzy. Najpierw kolumnę drugą dodamy do kolumny trzeciej i czwartej. Otrzymamy

$$\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

W ostatniej macierzy wiersz trzeci pomnożymy przez -1 i dodamy do wiersza czwartego, a następnie tak otrzymany wiersz czwarty pomnożymy przez -1 i dodamy do wiersza trzeciego. W wyniku tych i podobnych przekształceń otrzymamy

$$\begin{aligned}
\mathrm{rz}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} &= \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \\
&= \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2.
\end{aligned}$$

Wprowadzimy teraz pojęcie liniowej zależności wierszy lub kolumn macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$.

Niech $a_j = \left(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}\right)^T$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ oznacza j-tą kolumnę macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$. Zatem a_j interpretujemy jako macierz kolumnową.

Definicja. *Kolumny* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ $(k \leqslant m)$ *nazywamy liniowo zależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *takie, że* $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_k| > 0$ *oraz*

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \tag{5.11}$$

gdzie $\mathbf{0}$ *oznacza zerową macierz kolumnową, czyli* $\mathbf{0} = \big(0, 0, \ldots, 0\big)^T \in R^n$.

Jeżeli zależność (5.11) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$, to mówimy, że kolumny $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ są liniowo niezależne.

W równości (5.11) zapis $\alpha_i \mathbf{a}_i$ oznacza iloczyn liczby α_i przez macierz kolumnową $\mathbf{a}_i$. Analogiczną definicję możemy wprowadzić dla wierszy macierzy $\mathbf{A}$. Zatem będziemy również mówić o liniowo zależnych (niezależnych) wierszach macierzy $\mathbf{A}$.

Przykład

Weźmy pod uwagę macierz

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3/2 \end{vmatrix}.$$

W tym przykładzie mamy

$$\mathbf{a}_1 = (2, -3, 1)^T, \qquad \mathbf{a}_2 = (4, 1, 2)^T, \qquad \mathbf{a}_3 = (3, 4, 3/2)^T.$$

Chcemy zbadać, czy kolumny $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ są liniowo zależne? Zatem pytamy, czy istnieją liczby rzeczywiste $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ takie, że $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| > 0$ oraz

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Ostatnia równość jest równoważna układowi równań

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ -3\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3/2\,\alpha_3 = 0 \end{cases},$$

który ma rozwiązanie $\big(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\big) = \big(13/14, -17/14, 1\big)$.

Zatem dla liczb $\alpha_1 = 13/14$, $\alpha_2 = -17/14$, $\alpha_3 = 1$ są spełnione warunki: $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| > 0$ oraz

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0},$$

a więc, zgodnie z definicją, kolumny $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ są liniowo zależne.

Sprawdzimy jeszcze, czy kolumny $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ są liniowo zależne. Równanie

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_1 + \ \ \alpha_2 = 0 \\ \ \ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

Łatwo widać, że ten układ równań ma jedyne rozwiązanie $(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$. To, zgodnie z definicją, oznacza, że kolumny $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ są liniowo niezależne.

Dowodzi się, że prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 5.14. *Macierz $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ jest rzędu r wtedy i tylko wtedy, gdy maksymalna liczba liniowo niezależnych kolumn lub wierszy tej macierzy wynosi r.*

Podamy teraz algorytm wyznaczania rzędu macierzy. W literaturze algorytm ten nazywa się metodą eliminacji Gaussa. Niech $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times m}$. Bez straty ogólności, możemy założyć, że istnieje $a_{ij} \neq 0$. W przeciwnym bowiem wypadku $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = 0$. Zmiana (przestawienie) wierszy (kolumn) nie zmienia rzędu macierzy. Zatem, możemy założyć, że $a_{11} \neq 0$.

Dla $a_{11} \neq 0$ pierwszy wiersz macierzy $\mathbf{A}$ mnożymy przez $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ i odejmujemy od i-tego wiersza dla $i = 2, 3, \ldots, n$.

Otrzymamy

$$\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2m}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \ldots & a_{3m}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nm}^{(1)} \end{bmatrix},$$

gdzie, dla przykładu, $a_{2m}^{(1)} = a_{2m} - a_{1m}\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$.

Podobnie jak poprzednio możemy założyć, że $a_{22}^{(1)} \neq 0$. (Dlaczego?)

Dla $a_{22}^{(1)} \neq 0$ drugi wiersz ostatniej macierzy mnożymy przez $\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ i odejmujemy od i-tego wiersza dla $i = 3, 4, \ldots, n$. Otrzymamy

$$\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2m}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3m}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n2}^{(2)} & \ldots & a_{nm}^{(2)} \end{bmatrix},$$

gdzie, dla przykładu, $a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{23}^{(1)}\dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$.

Algorytm ten możemy powtarzać i po skończonej liczbie kroków otrzymamy

$$\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2m}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rm}^{(r-1)} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, r$, $a_{11}^{(0)} = a_{11}$.

Stąd widać, że $\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = r$.

Przykład

Metodą eliminacji Gaussa wyznaczymy rząd macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

W wyniku realizacji kolejnych kroków algorytmu Gaussa otrzymujemy

$$\mathrm{rz}(\mathbf{A}) = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & -8 & -14 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -12 & 0 \\ 0 & -8 & -14 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

5.7. Macierz odwrotna

5.7.1. Definicja macierzy odwrotnej

Weźmy pod uwagę macierz kwadratową $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$.

Jeżeli $|\mathbf{A}| \neq 0$, to macierz $\mathbf{A}$ nazywamy nieosobliwą, a jeżeli $|\mathbf{A}| = 0$, to mówimy, że macierz $\mathbf{A}$ jest osobliwa.

Dla każdego elementu a_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ macierzy $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ możemy obliczyć dopełnienie algebraiczne $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, gdzie M_{ij} jest minorem, który

BG AGH

powstał przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny w macierzy $\mathbf{A}$. Dopełnienie algebraiczne A_{ij} jest liczbą rzeczywistą lub zespoloną.

Z dopełnień algebraicznych A_{ij} możemy utworzyć macierz, której te dopełnienia są elementami.

Macierz

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

nazywamy macierzą dołączoną do macierzy $\mathbf{A}$.

Przykład

Niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2i \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1+i & -1 \end{bmatrix}.$$

Dla tej macierzy wyznaczymy macierz dołączoną $\mathbf{A}^D$. Mamy:

$$\begin{aligned} &A_{11} = -3(1+i), && A_{12} = -5, && A_{13} = 1+i, \\ &A_{21} = 1+2i, && A_{22} = -2+4i, && A_{23} = -8-2i, \\ &A_{31} = 9, && A_{32} = -6+2i, && A_{33} = -3. \end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} -3(1+i) & -5 & 1+i \\ 1+2i & -2(1-2i) & -2(4+i) \\ 9 & 2(-3+i) & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3(1+i) & 1+2i & 9 \\ -5 & -2(1-2i) & 2(-3+i) \\ 1+i & -2(4+i) & -3 \end{bmatrix}.$$

Podamy teraz definicję macierzy odwrotnej do macierzy kwadratowej $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$.

Wcześniej jednak przypomnimy definicję liczby odwrotnej do zadanej liczby $a \in R$. Liczbę $x \in R$ nazywamy liczbą odwrotną do $a \in R$ jeżeli

$$ax = 1 \tag{5.13}$$

Widać, że dla $a = 0$ nie istnieje $x \in R$ takie, aby spełniona była równość (5.13). Natomiast dla $a \neq 0$, $x = \dfrac{1}{a} = a^{-1}$.

Definicja. *Jeżeli istnieje macierz* $\mathbf{X} = \left[x_{ij}\right]_{n\times n}$ *taka, że*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I} \tag{5.14}$$

gdzie $\mathbf{I}$ *jest macierzą jednostkową o wymiarach* $n \times n$, *to mówimy, że macierz* $\mathbf{X}$ *jest macierzą odwrotną do macierzy* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$. *Macierz* $\mathbf{X}$ *spełniającą zależności* (5.14) *oznaczamy przez* $\mathbf{A}^{-1}$.

Warto zwrócić uwagę na podobieństwo definicji liczby odwrotnej a^{-1} i macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$.

Przy takiej definicji macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ powstają pytania:

– czy dla każdej macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ istnieje macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$?
– jeżeli istnieje macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$, to czy jest ona jedyna?
– jak obliczyć macierz $\mathbf{A}^{-1}$ w przypadku, gdy dla macierzy $\mathbf{A}$ istnieje macierz odwrotna?

Odpowiedź na te pytania daje następujące

TWIERDZENIE 5.15. *Macierz kwadratowa* $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ *ma macierz odwrotną* $\mathbf{A}^{-1}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{A}$ *jest macierzą nieosobliwą* $(|\mathbf{A}| \neq 0)$ *i wówczas*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^D \tag{5.15}$$

Z tego twierdzenia widać, że jeżeli $|\mathbf{A}| = 0$, to nie istnieje macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$. Natomiast w przypadku gdy $\det \mathbf{A} \neq 0$, to istnieje $\mathbf{A}^{-1}$ oraz wzór (5.15) daje analityczną postać macierzy odwrotnej. Z zależności (5.15) widać również, że dla $\det \mathbf{A} \neq 0$ istnieje dokładnie jedna macierz odwrotna.

Przykład

Niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczymy (jeżeli istnieje) macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$.

Łatwo zauważyć, że $|\mathbf{A}| = 4 - 6 = -2 \neq 0$, a zatem istnieje $\mathbf{A}^{-1}$. W tym przykładzie mamy

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd i z zależności (5.15) otrzymamy

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^D = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład

Wyznaczyć $\mathbf{A}^{-1}$ dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Widać, że $\det \mathbf{A} = 4$, a zatem istnieje $\mathbf{A}^{-1}$. W tym przykładzie mamy:

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -8 \\ 10 & -9 & 22 \\ 6 & -5 & 10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -4 & 10 & 6 \\ 4 & -9 & -5 \\ -8 & 22 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^D = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 10 & 6 \\ 4 & -9 & -5 \\ -8 & 22 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5/2 & 3/2 \\ 1 & -9/4 & -5/4 \\ -2 & 11/2 & 5/2 \end{bmatrix}.$$

Przykład

Niech

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 15/4 \end{bmatrix}.$$

W tym przykładzie $\det \mathbf{B} = 0$, a zatem rozpatrywana macierz $\mathbf{B}$ jest osobliwa. Stąd i z twierdzenia 5.8 wynika, że nie istnieje $\mathbf{B}^{-1}$.

5.7.2. Własności macierzy odwrotnej

Podstawowe własności macierzy odwrotnej daje

TWIERDZENIE 5.16. *Jeżeli* $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$, *oraz* $\det \mathbf{A} \neq 0$ *i* $\det \mathbf{B} \neq 0$, *to:*

1) $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$,
2) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,
3) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
4) $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$.

DOWÓD. Stąd, że $\det \mathbf{A} \neq 0$ i $\det \mathbf{B} \neq 0$, wynika, że istnieje $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$, $(\mathbf{AB})^{-1}$, $(\mathbf{AB}^T)^{-1}$.

Udowodnimy najpierw, że $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$. W tym celu weźmy pod uwagę oczywistą równość

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I},$$

gdzie $\mathbf{I}$ macierz jednostkowa o wymiarach $n \times n$.

Stąd i z twierdzenia 5.6 otrzymamy:

$$\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det\mathbf{I} = 1,$$
$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

Zależność $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ wynika wprost z definicji macierzy odwrotnej.

Dla dowodu, że $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ weźmy pod uwagę równość

$$(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}.$$

Równość tę mnożymy prawostronnie przez $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. Otrzymamy:

$$(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$
$$(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$
$$(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$
$$(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$
$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

To oznacza, że trzecia tożsamość w tezie twierdzenia 5.16 jest prawdziwa.

Z własności $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ oraz z równości $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ otrzymamy

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = \mathbf{I}.$$

Ostatnią zależność mnożymy lewostronnie przez $(\mathbf{A}^T)^{-1}$. Stąd:

$$(\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1},$$
$$\mathbf{I}(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1},$$
$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1},$$

To oznacza, że czwarta tożsamość twierdzenia 5.16 jest prawdziwa.

Zadania

1. Obliczyć iloczyn macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$,

BG AGH

c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

f) $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$, gdzie $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,

g) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

2. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

obliczyć:

a) $\mathbf{A}^2$,
b) $\mathbf{A}^3$,
c) $\mathbf{BA}$,
d) $\mathbf{AB}^T$.

3. Obliczyć $f(\mathbf{A})$, gdzie:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$,

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Obliczyć wartość wyznacznika:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 3+4i & 2 \\ -3 & 3-4i \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} a+ib & 2 \\ -2 & a+bi \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

g) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 1 & 0 \\ 1+i & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

BG AGH

5. Pokazać, że:

a) $\begin{bmatrix} y+z & z+x & x+y \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \\ b+c & c+a & a+b \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 1 & x & b \\ 1 & a & x \end{bmatrix} = (x-a)(x-b)$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

6. Obliczyć wartość wyznacznika:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 2 \ldots & 2 \\ 2 & 2 & 3 \ldots & 2 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 2 & 2 & 2 \ldots & n \end{vmatrix}$.

7. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

obliczyć:

a) minory: M_{11}, M_{21}, M_{23}, M_{44},

b) dopełnienia algebraiczne: A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{33}.

8. Stosując twierdzenie Laplace'a o rozwinięciu wyznacznika obliczyć:

a) $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

BG AGH

9. Niech
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$
Obliczyć:
a) $\det(\mathbf{AB})$,
b) $\det(\mathbf{A} + 5\mathbf{B})$,
c) $\det(5\mathbf{B} - 4\mathbf{A})$,
d) $\det(\mathbf{A}^2)$,
e) $\det(\mathbf{B}^6)$,
f) $\det(\mathbf{A}^3\mathbf{B}^4)$,
g) $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$,
h) $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}^2)$,
gdzie λ jest parametrem.

10. Dla macierzy
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
obliczyć $\det(\mathbf{AA}^T)$.

11. Wyznaczyć rząd następujących macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

12. Wyznaczyć rząd macierzy, jako funkcję parametru $\lambda \in R$:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

13. Podać przykład macierzy $\mathbf{A}$ dla której:

a) rząd $\mathbf{A} = 2$,
b) rząd $\mathbf{A} = 3$.

14. Ile istnieje wyznaczników 3. stopnia z macierzy $\mathbf{A}$ o wymiarach 4×5.

15. Obliczyć, jeżeli istnieje, macierz odwrotną dla macierzy $\mathbf{A}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{bmatrix}$, c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

16. Wyznaczyć macierz $\mathbf{X}$ taką, że:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$,

c) $\mathbf{X} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{X} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

BG AGH

Rozdział **6.**

Układy równań liniowych

6.1. Definicje i oznaczenia

Wiele zagadnień technicznych wymaga rozwiązywania układów równań liniowych. Przykładem może być układ równań

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + \ \ y = 1 \end{cases} \tag{6.1}$$

lub

$$\begin{cases} 2x - \ \ y + 3z = \ \ 2 \\ 5x + 2y - 2z = -1 \end{cases} \tag{6.2}$$

W układzie równań (6.1) mamy dwa równania i dwie niewiadome, a w (6.2) są dwa równania i trzy niewiadome: x, y, z.

Weźmy pod uwagę ogólną postać układu równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6.3}$$

gdzie: a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ są zadane, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ traktujemy jako niewiadome. Liczby a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ nazywamy współczynnikami przy niewiadomych, lub krótko — współczynnikami układu równań (6.3). Natomiast b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ nazywamy wyrazami wolnymi lub prawymi stronami rozpatrywanego układu równań. W ogólnym przypadku a_{ij}, b_i są liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi. Każdy ciąg liczb $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, który spełnia równania (6.3) nazywamy rozwiązaniem rozpatrywanego układu równań.

Jeżeli $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, to mówimy, że (6.3) jest układem równań liniowych jednorodnych. Jeżeli istnieje $b_i \neq 0$, to układ równań nazywamy niejednorodnym.

W układzie równań (6.3) mamy n niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, oraz m równań. Liczba niewiadomych nie musi być równa liczbie równań. Będziemy rozpatrywać przypadki gdy $m = n$ lub $m \neq n$ $(m < n$ lub $m > n)$.

BG AGH

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Macierz $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, nazywamy macierzą współczynników układu równań (6.3), a $\mathbf{b}$ macierzą prawych stron lub macierzą wyrazów wolnych, natomiast $\mathbf{x}$ — macierzą niewiadomych. Macierz $\mathbf{B}$ nazywamy macierzą uzupełnioną układu równań (6.3). Widać, że macierz uzupełniona powstaje z macierzy współczynników przez dopisanie $n+1$ kolumny — macierzy prawych stron.

Przy tych oznaczeniach układ (6.3) możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{6.4}$$

Mówimy, że (6.4) jest macierzowym zapisem układu równań (6.3).

Przykład

Układ równań

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases},$$

możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

a macierz uzupełniona ma postać

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ze względu na zastosowania interesuje nas rozwiązywanie układu równań liniowych. Rozwiązać układ równań, to znaczy:

– stwierdzić, czy dany układ równań ma rozwiązanie,
– stwierdzić, czy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie,
– wyznaczyć rozwiązanie (rozwiązania) w przypadku, gdy rozwiązanie (rozwiązania) istnieją.

BG AGH

Przykłady

Widać, że układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

nie ma rozwiązań (dlaczego?).

Natomiast układ równań

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie: $\big(x_1, x_2\big) = (1, 0)$.

Układ równań

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases},$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań: $\big(x_1, x_2, x_3\big) = (-{}^1\!/\!{}_2(t+1), {}^3\!/\!{}_2(t-1), t)$, gdzie t oznacza dowolną liczbę rzeczywistą.

6.2. Twierdzenie Cramera

Zajmiemy się teraz układem równań liniowych, w przypadku szczególnym, gdy liczba niewiadomych jest równa liczbie równań. Będziemy zatem rozważać układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \dotfill \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{6.5}$$

lub w zapisie macierzowym

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{6.6}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \big[a_{ij}\big]_{n\times n},$$
$$\mathbf{b} = \big[b_1, b_2, \ldots, b_n\big]^T,$$
$$\mathbf{x} = \big[x_1, x_2, \ldots, x_n\big]^T.$$

Weźmy pod uwagę następujące wyznaczniki

$$W_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \ldots & a_{2n} \\ \dots & & & & & & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Widać, że W_i jest wyznacznikiem z macierzy, która powstaje przez zastąpienie i-tej kolumny w macierzy $\mathbf{A}$ kolumną prawych stron układu (6.6).

Dowodzi się następujące

TWIERDZENIE (CRAMERA). *Jeżeli* $|\mathbf{A}| = \det\big(\mathbf{A}\big) \neq 0$*, to układ równań* (6.5) *ma dokładnie jedno rozwiązanie i rozwiązanie to dane jest wzorami Cramera*

$$x_i = \frac{W_i}{|\mathbf{A}|} \tag{6.7}$$

dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Przykład

Weźmy pod uwagę układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \tag{6.8}$$

Dla tego układu równań:

$$|\mathbf{A}| = \det\big(\mathbf{A}\big) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -19,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -46, \quad W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 14, \quad W_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 17.$$

Stąd i z wzorów Cramera otrzymujemy jedyne rozwiązanie układu równań (6.8)

$$x_1 = \frac{46}{19}, \qquad x_2 = -\frac{14}{19}, \qquad x_3 = -\frac{17}{19}.$$

Układ równań (6.5), w przypadku gdy $|\mathbf{A}| \neq 0$, nazywamy układem cramerowskim.

Zajmiemy się teraz układem równań liniowych jednorodnych, czyli układem równań

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{6.9}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \big[a_{ij}\big]_{n\times n},$$
$$\mathbf{x} = \big[x_1, x_2, \ldots, x_n\big]^T,$$
$$\mathbf{0} = \big[0, 0, \ldots, 0\big]^T \in R^n.$$

Widać, że $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ jest rozwiązaniem równania (6.9); mówimy, że jest to rozwiązanie zerowe. Z twierdzenia Cramera wynika następujący

BG AGH

Wniosek. Jeżeli $|\mathbf{A}| \neq 0$, to układ równań (6.9) ma tylko rozwiązanie zerowe $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Powstaje pytanie: przy jakich warunkach układ równań (6.9) ma, oprócz rozwiązania zerowego, rozwiązanie niezerowe?

Odpowiedź na to pytanie daje następujące

Twierdzenie 6.1. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby układ równań liniowych* (6.9) *miał rozwiązanie niezerowe jest, aby* $|\mathbf{A}| = 0$.

Przykład

Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad = 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

Dla tego układu równań

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Zatem układ równań, oprócz rozwiązania zerowego $\mathbf{x} = (0,0,0)$, ma również rozwiązanie niezerowe $\mathbf{x} \neq (0,0,0)$.

Łatwo sprawdzić, że $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (t, -{}^1\!/_2\, t, 2t)$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą różną od zera, jest niezerowym rozwiązaniem rozpatrywanego układu równań.

6.3. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego

Zajmiemy się teraz układem równań (6.3) w przypadku ogólnym, bez założenia, że liczba niewiadomych jest równa liczbie równań. Zatem będziemy rozpatrywać układ równań

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{6.11}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n},$$

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T,$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T.$$

Natomiast

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

jest macierzą uzupełnioną układu równań (6.11).

Dowodzi się, że prawdziwe jest następujące

Twierdzenie (Kroneckera-Capelliego). *Układ równań* (6.11) *ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy* $\mathbf{A}$ *jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej* $\mathbf{B}$ $(\operatorname{rz}\mathbf{A} = \operatorname{rz}\mathbf{B})$. *Przy czym, układ równań* (6.11) *ma:*

1) *dokładnie jedno rozwiązanie, gdy* $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) = \operatorname{rz}(\mathbf{B}) = n$, *gdzie* n *— liczba niewiadomych,*
2) *nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od* $n - r$ *parametrów, gdy* $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) = \operatorname{rz}(\mathbf{B}) = r < n$.

Powyższe twierdzenie daje nam precyzyjną informację:

– kiedy układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie: $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) = \operatorname{rz}(\mathbf{B}) = n$,
– kiedy układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań: $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) = \operatorname{rz}(\mathbf{B}) < n$,
– kiedy układ równań nie ma rozwiązań: $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) \neq \operatorname{rz}(\mathbf{B})$.

Pytanie do Czytelnika: co możemy powiedzieć o rozwiązaniu układu równań (6.11) w przypadku gdy $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) = \operatorname{rz}(\mathbf{B}) > n$?

Twierdzenie Kroneckera-Capelliego nie podaje metody wyznaczania rozwiązania układu równań (6.11). Metoda taka wynika jednak z dowodu omawianego twierdzenia.

Przedstawimy teraz algorytm rozwiązywania układu równań (6.11).

1. Wyznaczamy rząd macierzy współczynników $(\mathbf{A})$ oraz rząd macierzy uzupełnionej $(\mathbf{B})$. Jeżeli $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) \neq \operatorname{rz}(\mathbf{B})$, to omawiany układ równań nie ma rozwiązań.
2. Jeżeli $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) = \operatorname{rz}(\mathbf{B}) = n$, to, po ewentualnym przestawieniu lub pominięciu równań w (6.11), bierzemy pod uwagę układ równań

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{a}_{n1}x_1 + \tilde{a}_{n2}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases} \tag{6.12}$$

gdzie: $\tilde{\mathbf{A}} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]_{n\times n}$ i $\left|\tilde{\mathbf{A}}\right| \neq 0$.

Układ równań (6.12) rozwiązujemy jako układ cramerowski i tak uzyskane rozwiązanie jest rozwiązaniem układu równań (6.11).

3. Jeżeli $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) = \operatorname{rz}(\mathbf{B}) = r < n$, to, po ewentualnym przestawieniu lub opuszczeniu równań i niewiadomych, bierzemy pod uwagę układ równań postaci

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 + \cdots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_r = \tilde{b}_1 - \left(\tilde{a}_{1(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \cdots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_n\right) \\ \tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2 + \cdots + \tilde{a}_{1n}\tilde{x}_r = \tilde{b}_2 - \left(\tilde{a}_{2(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \cdots + \tilde{a}_{2n}\tilde{x}_n\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{a}_{r1}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{r2}\tilde{x}_2 + \cdots + \tilde{a}_{rr}\tilde{x}_r = \tilde{b}_r - \left(\tilde{a}_{r(r+1)}\tilde{x}_{r+1} + \cdots + \tilde{a}_{rn}\tilde{x}_n\right) \end{cases} \tag{6.13}$$

gdzie: $\tilde{\mathbf{A}} = \left[\tilde{a}_{ij}\right]_{r\times r}$ i $\left|\tilde{\mathbf{A}}\right| \neq 0$.

BG AGH

Należy zwrócić uwagę, że w wyniku przestawień równań i niewiadomych, np. $\tilde{a}_{12}$ w (6.13) nie musi być równe a_{12} z (6.11), podobnie $\tilde{x}_2$ w (6.13) nie musi oznaczać to samo, co x_2 w (6.11).

W układzie (6.13) $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_r$ traktujemy jako niewiadome, a za $\tilde{x}_{r+1}$, $\tilde{x}_{r+2}, \ldots, \tilde{x}_n$ przyjmujemy dowolne wartości — traktujemy je jako zadane parametry. Wówczas układ równań (6.13) jest układem cramerowskim dla dowolnych $\tilde{x}_{r+1}, \tilde{x}_{r+2}, \ldots, \tilde{x}_n$. Rozwiązanie układu równań (6.13), łącznie z przyjętymi parametrami za $\tilde{x}_{r+1}, \tilde{x}_{r+2}, \ldots, \tilde{x}_n$, stanowi rozwiązanie układu równań (6.11).

Przykład

Weźmy pod uwagę układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \tag{6.14}$$

W tym przykładzie macierz współczynników ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Natomiast macierz uzupełniona

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Widać, że $\text{rz}\big(\mathbf{A}\big) \leqslant 3$, oprócz tego po skreśleniu pierwszego wiersza w macierzy $\mathbf{A}$ otrzymamy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

czyli $\text{rz}\big(\mathbf{A}\big) = 3$.

Natomiast $\text{rz}\big(\mathbf{B}\big) \leqslant 4$. Obliczamy wyznacznik z macierzy uzupełnionej

$$|\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 44 \neq 0.$$

Zatem $\text{rz}\big(\mathbf{B}\big) = 4$, czyli $\text{rz}\big(\mathbf{A}\big) \neq \text{rz}\big(\mathbf{B}\big)$. Stąd i z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika, że układ równań (6.14) nie ma rozwiązań — jest sprzeczny.

BG AGH

Przykład

Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases} \tag{6.15}$$

Macierz współczynników ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

a macierz uzupełniona

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Widać, że $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) \leqslant 4$, $\operatorname{rz}(\mathbf{B}) \leqslant 4$, oraz

$$\operatorname{rz}(\mathbf{A}) = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

gdyż $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$. Podobnie stwierdzamy, że $\operatorname{rz}(\mathbf{B}) = 3$.

Zatem, w rozpatrywanym układzie równań liniowych $\operatorname{rz}(\mathbf{A}) = \operatorname{rz}(\mathbf{B}) = 3$, $n = 4$, a to oznacza, że układ równań (6.15) ma rozwiązanie zależne od jednego parametru. W macierzy $\mathbf{A}$ minor

$$M_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 7 \neq 0.$$

Bierzemy pod uwagę drugie, trzecie i czwarte równanie układu (6.15) i w tych równaniach x_1, x_2, x_3 traktujemy jako niewiadome, natomiast x_4 traktujemy jako zadany parametr. Otrzymamy

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = -2 - x_4 \\ x_1 + 3x_2 = 1 + 3x_4 \\ x_2 + 3x_3 = -3 - x_4 \end{cases}.$$

BG AGH

Ten układ równań jest układem cramerowskim, a rozwiązanie, po przyjęciu $x_4 = t$, ma postać

$$\begin{cases} x_1 = -3t - {}^{38}/_7 \\ x_2 = 2t + {}^{15}/_7 \\ x_3 = -t - {}^{12}/_7 \\ x_4 = t \end{cases},$$

dla dowolnego $t \in R$.

6.4. Praktyczne metody rozwiązywania układu równań liniowych

W praktyce często występuje potrzeba rozwiązywania układu równań liniowych o dużej liczbie niewiadomych, np. liczba równań i niewiadomych jest większa od stu. W takich przypadkach wzory Cramera są nieprzydatne. Opiszemy teraz użyteczne w praktyce metody rozwiązywania układów równań liniowych, które służą również do wyznaczania macierzy odwrotnej oraz obliczania wartości wyznacznika.

Weźmy pod uwagę układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = \ b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = \ b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6.16}$$

lub w postaci macierzowej

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{6.17}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n},$$

$$\mathbf{b} = \left[b_1, b_2, \dots, b_m\right]^T,$$

$$\mathbf{x} = \left[x_1, x_2, \dots, x_n\right]^T.$$

Podamy teraz opis metody eliminacji Gaussa, służącej do rozwiązywania układu równań (6.16).

Załóżmy, że $a_{11} \neq 0$. Gdyby $a_{11} = 0$, to możemy tak zmienić numerację zmiennych, aby w pierwszym równaniu współczynnik przy niewiadomej x_1 był różny od zera.

Natomiast jeżeli $a_{1k} = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ i $b_1 = 0$, to skreślamy pierwsze równanie jako nieistotne. W przypadku, gdy $a_{1k} = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ i $b_1 \neq 0$ układ równań nie ma rozwiązań — jest sprzeczny.

Pierwsze równanie układu równań (6.16) mnożymy przez $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ i odejmujemy od i-tego równania $(i = 2, 3, \dots, m)$. W ten sposób otrzymamy pierwszy układ zredukowany

BG AGH

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \cdots + \ a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{32}^{(1)}x_2 + \cdots + \ a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{cases} \tag{6.18}$$

gdzie:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} \qquad (i = 2, 3, \ldots, m;\ j = 2, 3, \ldots, n),$$

$$b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, m).$$

Z tych samych względów co poprzednio możemy założyć, że w układzie równań (6.18) $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Następnie drugie równanie w układzie równań (6.18) mnożymy przez $\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ i odejmujemy od i-tego równania ($i = 3, 4, \ldots, m$).

Ta operacja daje drugi układ zredukowany postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ a_{13}x_3 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \cdots + \ a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + \ a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{m3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)} \end{cases} \tag{6.19}$$

gdzie:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{2j}^{(1)} \qquad (i = 3, 4, \ldots, m;\ j = 3, 4, \ldots, n),$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}b_2^{(1)} \qquad (i = 3, 4, \ldots, m).$$

Taki sposób postępowania możemy kontynuować dalej. Jako ostateczny wynik otrzymamy układ zredukowany postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ a_{13}x_3 + \ \ldots\ldots\ldots\ldots + \quad a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ \ldots\ldots\ldots\ldots + \quad a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ \ldots\ldots\ldots\ldots + \quad a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + \cdots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_m^{(r-1)} \end{cases} \tag{6.20}$$

gdzie: $a_{11} \neq 0$, $a_{22}^{(1)} \neq 0, \ldots, a_{rr}^{(r-1)} \neq 0$.

Taki algorytm obliczeń, prowadzący od układu równań (6.16) do (6.20), nazywamy metodą eliminacji Gaussa. Układ równań (6.20) jest już łatwy do rozwiązania. Za niewiadome $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ przyjmujemy dowolne wartości — jako parametry. Następnie z ostatniego równania układu (6.20) obliczamy x_r. Mając dane x_r z łatwością możemy obliczyć x_{r-1} z przedostatniego równania. Z następnych równań, licząc od dołu, możemy obliczyć $x_{r-2}, \ldots, x_1$.

Przykład

Układ równań

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \tag{6.21}$$

rozwiązać metodą eliminacji Gaussa.

Pierwsze z tych równań mnożymy przez $4/3$ i odejmujemy od równania drugiego, a następnie pierwsze mnożymy przez $1/3$ i odejmujemy od trzeciego równania. W ten sposób otrzymamy pierwszy układ zredukowany

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ \quad {}^{11}/_3\, x_2 - {}^{25}/_3\, x_3 = -{}^{11}/_3 \\ \quad {}^{11}/_3\, x_2 + {}^{2}/_3\, x_3 = {}^{7}/_3 \end{cases} \tag{6.22}$$

Drugie równanie z (6.22) odejmujemy od równania trzeciego. Ta operacja daje drugi układ zredukowany postaci

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ \quad {}^{11}/_3\, x_2 - {}^{25}/_3\, x_3 = -{}^{11}/_3 \\ \quad {}^{27}/_3\, x_3 = 6 \end{cases} \tag{6.23}$$

Z trzeciego równania układu równań (6.23) mamy $x_3 = {}^{2}/_3$. Stąd i z drugiego równania otrzymamy $x_2 = {}^{17}/_{33}$. Z pierwszego równania, na podstawie obliczonych już x_2, x_3, otrzymamy $x_1 = {}^{4}/_{33}$.

Przykład

Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 10x_4 = 2 \end{cases} \tag{6.24}$$

Stosując metodę eliminacji Gaussa otrzymujemy najpierw pierwszy układ zredukowany

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ \quad 9x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -2 \\ \quad 11x_2 - 3x_3 - 7x_4 = -1 \end{cases},$$

a następnie drugi układ zredukowany

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 -{}} 9x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -2 \\ \phantom{x_1 - 9x_2 -{}} 2x_3 - 10x_4 = {}^{13}\!/_3 \end{cases} \tag{6.25}$$

Przyjmujemy $x_4 = t$ — parametr. Z ostatniego równania (6.25) otrzymamy $x_3 = 5t + {}^{13}\!/_6$. Stąd i z równania drugiego a następnie pierwszego mamy:

$$x_2 = 2t + {}^{1}\!/_2, \qquad x_1 = -10t - {}^{9}\!/_2.$$

Ostatecznie możemy napisać, że układ równań (6.24) ma rozwiązanie

$$\begin{cases} x_1 = -10t - {}^{9}\!/_2 \\ x_2 = 2t + {}^{1}\!/_2 \\ x_3 = 5t + {}^{13}\!/_6 \\ x_4 = t \end{cases},$$

dla dowolnego $t \in R$.

Przy obliczeniach na maszynie cyfrowej każda liczba jest pamiętana tylko z określoną ilością cyfr dziesiętnych. Np. liczba ${}^{1}\!/_3$ będzie zapamiętana jako 0.3333333. Zatem do dalszych obliczeń nie będzie brana wartość ${}^{1}\!/_3$, ale 0.3333333. W związku z tym na każdym etapie obliczeń powstaje pewien błąd zaokrąglenia, w wyniku pamiętania tylko skończonej liczby cyfr dziesiętnych.

Błędów zaokrągleń nie można lekceważyć. Mimo stosowania najnowocześniejszych komputerów, błędy zaokrągleń mogą spowodować, że wyniki obliczeń nadają się tylko do kosza.

Jako ilustrację tego faktu weźmy pod uwagę układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 8 \\ 2x_1 + 6.000001x_2 = 8.000001 \end{cases} \tag{6.26}$$

Widać, że rozwiązaniem tego układu równań są liczby: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Zobaczmy teraz co się będzie działo z rozwiązaniem tego układu równań, gdy jego współczynniki „nieco zaburzymy". Mianowicie, rozpatrzmy następujący układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 8 \\ 2x_1 + 5.999999x_2 = 8.000002 \end{cases} \tag{6.27}$$

To „zaburzenie" może być efektem błędów zaokrągleń, przy obliczaniu samych współczynników. Układ równań (6.27), o „zaburzonych współczynnikach", ma rozwiązanie: $x_1 = 64$, $x_2 = -20$. Widać, że stosunkowo nieduża zmiana współczynników układu równań spowodowała radykalną zmianę rozwiązania. Takie są skutki błędów zaokrągleń przy obliczeniach na komputerze.

Przy stosowaniu wyżej opisanej metody eliminacji Gaussa jesteśmy „narażeni" na błędy zaokrągleń. Jeżeli wartość bezwzględna współczynnika $a_{ii}^{(i-1)}$ jest mała w porównaniu z innymi współczynnikami $a_{ki}^{(i-1)}$ $(k > i)$, to na etapie dzielenia przez $a_{ii}^{(i-1)}$ mogą powstać duże błędy zaokrągleń. Aby tego uniknąć, stosuje się metodę wyboru elementów podstawowych. Polega to na tym, że w i-tym kroku obliczeń wybieramy element $a_{ji}^{(i-1)}$ o największej wartości bezwzględnej i równania przestawiamy tak, aby dzielenie było wykonywane przez $a_{ji}^{(i-1)}$.

Rozpatrzmy teraz układ równań postaci

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{6.28}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n},$$
$$\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]_{n\times m},$$
$$\mathbf{X} = \left[x_{ij}\right]_{n\times m}.$$

Jest to układ równań postaci (6.17) z tym, że prawa strona tego układu równań oraz macierz $\mathbf{X}$ mają wymiar $n \times m$. Dla pierwszej kolumny macierzy $\mathbf{B}$ układ równań (6.28) ma postać (6.17), a rozwiązaniem jest pierwsza kolumna macierzy $\mathbf{X}$. Dla drugiej kolumny macierzy $\mathbf{B}$ rozwiązaniem jest druga kolumna macierzy $\mathbf{X}$, itd. W ten sposób rozpatrujemy m układów równań postaci (6.17) o wspólnej macierzy współczynników $\mathbf{A}$.

Do układu równań (6.28) możemy stosować metodę eliminacji Gaussa i operacje na elementach macierzy $\mathbf{A}$ wykonujemy tylko jeden raz, mimo tego, że rozwiązujemy jednocześnie m układów równań postaci (6.17). W ten sposób znacząco skracamy czas obliczeń.

Weźmy pod uwagę szczególny przypadek układu równań (6.28), gdy macierz $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, gdzie $\mathbf{I}$ macierz jednostkowa o wymiarach $n \times n$. Zakładamy, że $\det \mathbf{A} \neq 0$. W tym przypadku rozwiązaniem układu równań (6.28) jest macierz kwadratowa $\mathbf{X}$ o wymiarach $n \times n$, taka, że

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}.$$

To zaś oznacza, że $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$, czyli $\mathbf{X}$ jest macierzą odwrotną do macierzy $\mathbf{A}$. W ten sposób, stosując metodę eliminacji Gaussa, możemy wyznaczyć macierz odwrotną $\mathbf{A}^{-1}$.

Pokażemy jeszcze zastosowanie metody eliminacji Gaussa do obliczania wartości wyznacznika.

Chcemy obliczyć

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Podobnie jak przy rozwiązywaniu układu równań możemy założyć, że $a_{11} \neq 0$. Bowiem, gdyby $a_{1j} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, to $\det \mathbf{A} = 0$. Natomiast jeżeli $a_{11} = 0$ oraz istnieje $a_{1k} \neq 0$, to przestawienie pierwszej kolumny z k-tą kolumną zmieni tylko znak wyznacznika. Zatem założenie $a_{11} \neq 0$ jest uzasadnione.

Pierwszy wiersz macierzy $\mathbf{A}$ mnożymy przez $\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ i odejmujemy od wiersza i-tego $(i = 2, 3, \ldots, n)$. Otrzymamy

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix}.$$

Następnie drugi wiersz mnożymy przez $\dfrac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, przy założeniu $a_{22}^{(1)} \neq 0$, i odejmujemy od i-tego wiersza $(i = 3, 4, \ldots, n)$. Otrzymamy

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Kontynuując tę procedurę otrzymamy

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_{nn}^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

gdzie $a_{ij}^{(k)}$ obliczamy według takiego samego algorytmu, jak przy rozwiązywaniu układu równań metodą eliminacji Gaussa.

Z ostatniej zależności mamy

$$\det \mathbf{A} = a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(1)} \cdots a_{nn}^{(n-1)},$$

gdyż jest to wyznacznik z macierzy trójkątnej górnej.

Przykład

Wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

obliczymy metodą eliminacji Gaussa.

Mamy

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & -{}^{41}\!/_3 & -{}^{7}\!/_3 \\ 0 & -{}^{28}\!/_3 & -{}^{2}\!/_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 0 & -{}^{41}\!/_3 & -{}^{7}\!/_3 \\ 0 & 0 & {}^{38}\!/_{41} \end{vmatrix} = 3\left(-\frac{41}{3}\right)\frac{38}{41} = -38.$$

Rozważmy jeszcze raz układ równań liniowych zapisany w postaci macierzowej

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{6.29}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left[a_{ij}\right]_{n\times n}, \\ \mathbf{b} &= \left[b_{ij}\right]_{n\times 1}, \\ \mathbf{x} &= \left[x_{ij}\right]_{n\times 1}. \end{aligned}$$

Zatem jest to układ n równań o n niewiadomych. Załóżmy, że $\det\bigl(\mathbf{A}\bigr) \neq 0$. Stąd wynika, że istnieje macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$.

Równanie (6.29) mnożymy z lewej strony przez $\mathbf{A}^{-1}$. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \\ \mathbf{I}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

W ten sposób mamy prosty zapis rozwiązania układu równań (6.29). Praktyczna użyteczność zależności $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ zależy od możliwości obliczenia $\mathbf{A}^{-1}$.

Zadania

1. Stosując wzory Cramera rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -3 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} 5x - 2y = -1 \\ 3y - 2x = 2 \end{cases},$

d) $\begin{cases} 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_3 = 5 \\ 4x_2 - 2x_1 = 2 \end{cases}.$

2. Układy równań z zadania 1 zapisać w postaci macierzowej.

3. Rozwiązać układ równań:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases},$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases},$

c) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases},$ gdzie λ jest parametrem.

4. Parametr α dobrać tak, aby układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \alpha \end{cases}$$

miał rozwiązanie.

5. Dla jakich $a \in R$ układ równań

$$\begin{cases} ax - 3y + 5z = 4 \\ x - ay + 3z = 2 \\ 9x - 7y + 8az = 0 \end{cases}$$

a) ma dokładnie jedno rozwiązanie,
b) ma nieskończenie wiele rozwiązań,
c) nie ma rozwiązań.

6. Dla jakich $a, b \in R$ układ równań

$$\begin{cases} ax_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 - 1 = 0 \\ 3x_1 - bx_3 = 2 \end{cases}$$

nie ma rozwiązań.

7. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań:

a) $$\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & +4x_3 & =31 \\ 5x_1 & +\ \ x_2 & +2x_3 & =29 \\ 3x_1 & -\ \ x_2 & +\ \ x_3 & =10 \end{array}\right. ,$$

b) $$\left\{\begin{array}{rrrl} & 4x_2 & -\ \ x_3 & =5 \\ x_1 & +\ \ x_2 & +2x_3 & =6 \\ 2x_1 & +2x_2 & -\ \ x_3 & =1 \end{array}\right. ,$$

c) $$\left\{\begin{array}{rrrrr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & +\ \ x_4 & = \ \ 1 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & -\ \ x_4 & =-1 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = \ \ 2 \end{array}\right. .$$

8. Metodą eliminacji Gaussa obliczyć wyznacznik:

a) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

BG AGH

BG AGH

Geometria

BG AGH

BG AGH

Rozdział 7.

Geometria analityczna

7.1. Geneza geometrii analitycznej

Nazwa geometria pochodzi z języka greckiego: *geo* — ziemia, *metreo* — mierzę. Geometria, jako dział matematyki, powstał w starożytnym Egipcie. Swoje powstanie i rozwój zawdzięcza budownictwu a szczególnie miernictwu. Natomiast Grecy nadali geometrii charakter nauki dedukcyjnej. Uczynił to Euklides (około 300 r. p.n.e.) w swoim dziele pt. *Elementy.*

W szkole średniej, w ramach geometrii elementarnej, bada się własności różnych figur geometrycznych.

Geometrię analityczną stworzył René Descartes (1596–1650), który często nazywany jest Kartezjuszem. Był on matematykiem i filozofem francuskim.

Kartezjusz wprowadził pojęcie współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie, a obiekty geometryczne opisywał równaniami — zależnościami między współrzędnymi. Jako pierwszy stosował metodę analityczną do badania obiektów geometrycznych. Punkt na płaszczyźnie traktował jako uporządkowaną parę liczb (x, y), a linię jako zbiór uporządkowanych par spełniających pewne równania. W ten sposób obiekty geometryczne można badać przy użyciu algebry, metodami analitycznymi.

7.2. Wektory, kąty i współrzędne

7.2.1. Wektory

W naukach technicznych, w fizyce, niektóre wielkości można scharakteryzować jedną liczbą rzeczywistą, przy ustalonej jednostce. O takiej wielkości mówimy, że jest skalarem. Np. długość boku prostokąta jest w pełni zdeterminowana przez jedną liczbę.

Jednak do pełnego opisu otaczającej nas rzeczywistości nie wystarczą same skalary. Np. nie wystarczy powiedzieć, że prędkość wiatru wynosi 7 [m/s], musimy jeszcze wskazać kierunek tego wiatru. Siła jest opisana przez wielkość tej siły, zwrot, kierunek i punkt zaczepienia. Mówimy, że prędkość i siła są wektorami.

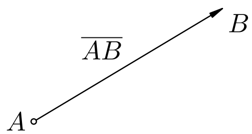
Podstawowe informacje o wektorach znają Czytelnicy ze szkoły średniej. Przypomnimy je krótko.

Weźmy pod uwagę punkty A i B. Parę uporządkowaną punktów (A, B), gdzie A traktujemy jako punkt początkowy a B końcowy, nazywamy wektorem i oznacza-

BG AGH

my $\overline{AB}$. Wektor możemy interpretować jako odcinek skierowany o początku A i końcu B (rys. 7.1).

Wektory będziemy też oznaczać małymi, pogrubionymi literami, np. $\mathbf{a}$. Jeżeli wektor jest parą (A, A) — punkt początkowy pokrywa się z punktem końcowym, to mówimy, że jest to wektor zerowy. Wektor zerowy będziemy oznaczać przez $\mathbf{0}$. Zatem odcinek skierowany o początku B i końcu A jest wektorem $\overline{BA}$. Warto zwrócić uwagę, że odcinki AB i BA niczym się nie różnią, podczas gdy wektory $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$, to dwa różne wektory.



Rys. 7.1. Interpretacja geometryczna wektora

Długością lub modułem wektora $\overline{AB}$ nazywamy długość odcinka AB i oznaczamy przez $\left|\overline{AB}\right|$. Długość wektora $\mathbf{a}$ oznaczamy przez $|\mathbf{a}|$.

Jeżeli punkty A i B są różne, to przez te punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Kierunek wektora $\overline{AB}$ utożsamiamy z kierunkiem prostej przechodzącej przez punkty A i B. Zatem wektory $\overline{AB}$ i $\overline{BA}$ mają ten sam kierunek, lecz są przeciwnie skierowane — mają przeciwny zwrot. Przyjmujemy, że wektor zerowy ma dowolny kierunek i zwrot lub kierunek i zwrot tego wektora nie jest określony.

W naukach technicznych wektor jest charakteryzowany również przez punkt zaczepienia (w niektórych zagadnieniach punkt zaczepienia wektora nie jest istotny). Wektory, które różnią się jedynie punktem zaczepienia uważamy za równoważne i nazywamy wektorami swobodnymi. W dalszym ciągu tekstu przez wektor będziemy rozumieć wektor swobodny.

Dwa wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nazywamy równymi, piszemy $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, jeżeli mają taki sam kierunek, zwrot i $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$. Dla każdego wektora $\mathbf{a}$, również dla wektora zerowego, możemy pisać $\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Przez $-\mathbf{a}$ oznaczmy wektor, którego długość i kierunek są takie same jak wektora $\mathbf{a}$, natomiast zwrot jest przeciwny niż $\mathbf{a}$. Wektor $-\mathbf{a}$ nazywamy przeciwnym do $\mathbf{a}$.

Definicja. *Jeżeli początek wektora* $\mathbf{b}$ *pokrywa się z końcem wektora* $\mathbf{a}$*, to sumą wektorów* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$*, piszemy* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$*, nazywamy wektor o początku w początku wektora* $\mathbf{a}$*, i końcu w końcu wektora* $\mathbf{b}$ (rys. 7.2)*.*

Wektor $\mathbf{a} + \left(-\mathbf{b}\right)$ nazywamy różnicą wektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, piszemy $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (rys. 7.3).

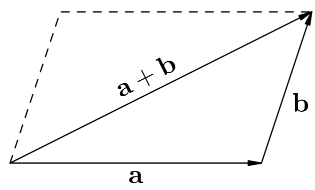
Łatwo zauważyć, że dla zadanych wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ istnieje taki wektor $\mathbf{x}$, że

$$\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{a},$$

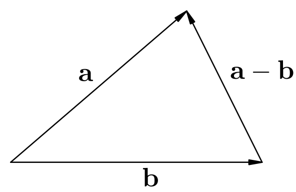
mianowicie

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

BG AGH



Rys. 7.2. Suma wektorów

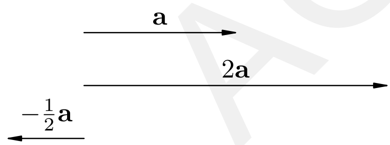


Rys. 7.3. Różnica wektorów

Definicja. *Iloczynem wektora* $\mathbf{a}$ *przez liczbę* $\lambda \in R$, *piszemy* $\mathbf{a}\lambda$ *lub* $\lambda\mathbf{a}$, *nazywamy taki wektor* $\mathbf{c} = \mathbf{a}\lambda$, *że:*

1) $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *jeżeli* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ *lub* $\lambda = 0$,
2) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\lambda|$,
3) *wektor* $\mathbf{c}$ *ma taki sam kierunek jak wektor* $\mathbf{a}$,
4) *dla* $\lambda > 0$ *zwrot wektora* $\mathbf{c} = \mathbf{a}\lambda$ *jest taki sam jak wektora* $\mathbf{a}$, *natomiast dla* $\lambda < 0$ *zwrot wektora* $\mathbf{c} = \mathbf{a}\lambda$ *jest przeciwny do zwrotu wektora* $\mathbf{a}$.

Na rysunku 7.4 pokazano ilustrację iloczynu $\mathbf{a}\lambda$ dla $\lambda = 2$ i $\lambda = -1/2$.



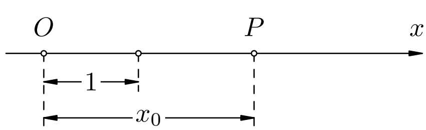
Rys. 7.4. Ilustracja iloczynu $\mathbf{a}\lambda$

Z powyższej definicji widać, że:

1) $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$,
2) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ dla λ, $\mu \in R$.

7.2.2. Rzut i współrzędna wektora na osi

Rozważmy prostą x a na niej obrany punkt O i dowolny punkt P (rys. 7.5).



Rys. 7.5. Ilustracja osi liczbowej

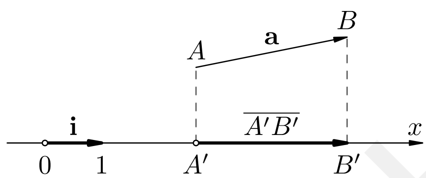
Jeżeli przyjmiemy pewien odcinek za jednostkowy, to możemy wyznaczyć x_0 — długość odcinka OP. Punktowi P na prostej x przyporządkujemy liczbę x_0 jeżeli

BG AGH

punkt P leży na prawo od punktu O lub $-x_0$ jeżeli ten punkt leży na lewo od O. Natomiast punktowi O przyporządkowujemy liczbę zero, $x_0 = 0$. W ten sposób liczba x_0 jednoznacznie określa położenie punktu P na prostej x. Mówimy, że x_0 jest współrzędną punktu P na tej prostej.

Rzutem prostokątnym punktu A na oś x, lub krócej rzutem punktu A na oś x, nazywamy punkt A', w którym prosta prostopadła do osi x, przechodząca przez punkt A, przecina oś x.

Definicja. *Rzutem wektora* $\mathbf{a} = \overline{AB}$ *na oś* x *nazywamy wektor* $\overline{A'B'}$, *gdzie* A' *jest rzutem punktu* A, *a* B' *rzutem punktu* B *na oś* x (rys. 7.6).



Rys. 7.6. Rzut wektora $\overline{AB}$ na oś x

Wersorem osi x nazywamy taki wektor $\mathbf{i}$, że $|\mathbf{i}| = 1$ oraz wektor $\mathbf{i}$ ma kierunek i zwrot zgodny z osią x (rys. 7.6).

Jeżeli $\overline{A'B'}$ jest rzutem wektora $\mathbf{a} = \overline{AB}$ na oś x, to wektor $\overline{A'B'}$ można przedstawić w postaci

$$\overline{A'B'} = a_x\mathbf{i},$$

gdzie $a_x \in R$.

Tak określoną liczbę a_x nazywamy współrzędną wektora $\mathbf{a} = \overline{AB}$ na osi x. Widać, że $a_x > 0$, gdy wersor $\mathbf{i}$ oraz rzut $\overline{A'B'}$ mają taki sam zwrot; $a_x < 0$, gdy wektory $\mathbf{i}$, $\overline{A'B'}$ mają przeciwne zwroty; $a_x = 0$, gdy $\overline{A'B'}$ jest wektorem zerowym.

Z definicji sumy wektorów i współrzędnej wektora na osi x wynika, że współrzędna sumy wektorów jest równa sumie współrzędnych tych wektorów, czyli

$$\left(\mathbf{a} + \mathbf{b}\right)_x = a_x + b_x,$$

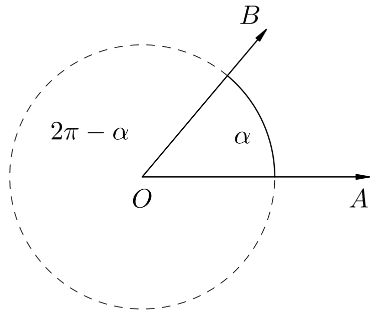
gdzie $\left(\mathbf{a} + \mathbf{b}\right)_x$ — współrzędna sumy $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ na osi x.

7.2.3. Kąt zwykły i skierowany

Na ustalonej płaszczyźnie weźmy pod uwagę dwie półproste OA i OB (rys. 7.7).

Półproste OA i OB dzielą płaszczyznę na dwie części, które nazywamy kątami zwykłymi. Punkt O jest wierzchołkiem, a OA i OB są ramionami tych kątów. Kąty te oznaczamy następująco:

$$\sphericalangle AOB \quad \text{lub} \quad \sphericalangle BOA.$$



Rys. 7.7. Ilustracja kątów

W przypadku gdy te półproste pokrywają się, to jeden z tych kątów jest kątem zerowym a drugi pełnym.

Kątem skierowanym lub zorientowanym nazywamy kąt zwykły, którego jedno ramię przyjęto jako początkowe, a drugie jako końcowe. Kąt o ramieniu początkowym a i końcowym b oznaczamy przez

$$\sphericalangle_S(a, b).$$

Zatem kąty $\sphericalangle_S(a, b)$ i $\sphericalangle_S(b, a)$ nie są identyczne — różnią się porządkiem ramion (rys. 7.8)

Rys. 7.8. Ilustracja kątów skierowanych

Z kątem skierowanym $\sphericalangle_S(a, b)$ można kojarzyć obrót ramienia a do ramienia b.

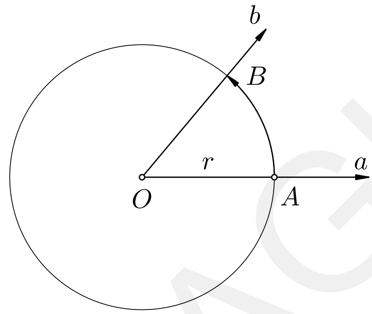
W przypadku, gdy z kontekstu jasno wynika czy rozważamy kąt skierowany czy kąt zwykły, będziemy oba kąty oznaczać tym samym symbolem $\sphericalangle(a, b)$.

Na danej płaszczyźnie weźmy pod uwagę półprostą wychodzącą z punktu O. Tę półprostą możemy obracać dookoła punktu O w dwóch przeciwnych kierunkach. Jeden z nich przyjmujemy za dodatni — kierunek strzałki na rysunku 7.9. Przeciwny kierunek obrotu przyjmujemy za ujemny. Widać, że kierunek obrotu przeciwny do obrotu wskazówek zegara jest kierunkiem dodatnim, a zgodny z obrotem wskazówek zegara jest kierunkiem ujemnym. W ten sposób płaszczyzna jest zorientowana, na płaszczyźnie przyjęto orientację obrotu.

Rys. 7.9. Orientacja obrotu na płaszczyźnie

Wprowadzimy teraz miarę kąta skierowanego $\sphericalangle_S(a,b)$, innymi słowy określimy liczbę, która charakteryzuje kąt pod względem wielkości i kierunku na płaszczyźnie zorientowanej.

Niech będzie kąt skierowany $\sphericalangle_S(a,b)$ na płaszczyźnie dodatnio zorientowanej (rys. 7.10).



Rys. 7.10. Ilustracja miary kąta skierowanego

Weźmy pod uwagę łuk $\overset{\frown}{AB}$ okręgu o promieniu r i środku O w wierzchołku kąta skierowanego $\sphericalangle_S(a,b)$. Zakładamy, że punkt A leży na ramieniu początkowym a, B na ramieniu końcowym b kąta $\sphericalangle_S(a,b)$. Oprócz tego zakładamy, że łuk $\overset{\frown}{AB}$ leży wewnątrz rozważanego kąta. Niech d będzie długością łuku $\overset{\frown}{AB}$.

Miarą łukową kąta zwykłego AOB nazywamy liczbę

$$\text{miara łukowa} = \frac{d}{r}$$

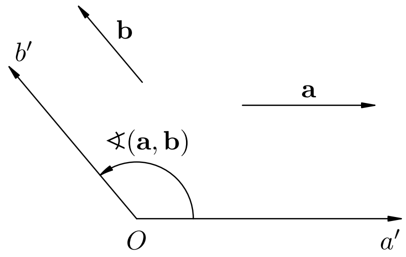
i wyrażamy ją w radianach:

- kąt pełny ma 2π radianów,
- kąt prosty ma $\frac{1}{2}\pi$ radianów,
- kąt zerowy ma 0 radianów.

Miarą względną kąta skierowanego $\sphericalangle_S(a,b)$ (rys. 7.10) nazywamy miarę łukową $\left(\frac{d}{r}\right)$ kąta AOB jeżeli obrót ramienia a do b jest zgodny z dodatnią orientacją płaszczyzny. Jeżeli natomiast obrót ramienia a do b jest przeciwny do dodatniej orientacji płaszczyzny, to za względną miarę $\sphericalangle_S(a,b)$ przyjmujemy $-\frac{d}{r}$. Oznacza to, że kąt skierowany $\sphericalangle_S(a,b)$ ma względną miarę łukową o przeciwnym znaku niż $\sphericalangle_S(b,a)$.

7.2.4. Kąty między wektorami

Weźmy pod uwagę dwa niezerowe wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Niech a' i b' będą półosiami o kierunku i zwrocie zgodnym, odpowiednio, z $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Oprócz tego zakładamy, że obie półosie mają wspólny początek O (rys. 7.11).



Rys. 7.11. Kąt między wektorami

Półosie a' i b' dzielą płaszczyznę na dwa kąty. Nie większy z tych kątów oznaczamy przez $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ i nazywamy kątem między wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Jest to kąt zwykły o ramionach a' i b'. Tak określony kąt spełnia warunek

$$0 \leqslant \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leqslant \pi.$$

Jeżeli $\mathbf{a}$ jest wektorem oraz x jest osią, to przez $\sphericalangle(x, \mathbf{a})$ rozumiemy $\sphericalangle(x', a')$, gdzie x' jest dodatnią półosią osi x, natomiast a' jest półosią o kierunku i zwrocie zgodnym z wektorem $\mathbf{a}$. Oprócz tego zakładamy, że x' i a' mają wspólny początek.

Jeżeli $\mathbf{a}$ lub $\mathbf{b}$ jest wektorem zerowym, to przyjmujemy że kąt między tymi wektorami, lub kąt między wektorem i półosią jest kątem zerowym. W dalszym ciągu tekstu miarę kąta $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ będziemy oznaczać przez $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

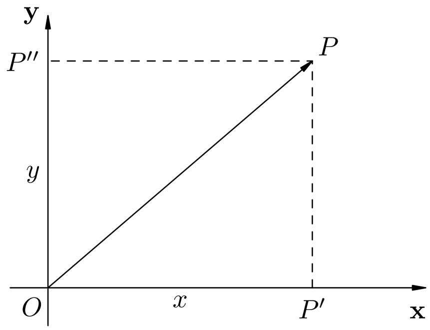
7.2.5. Kartezjański układ współrzędnych na płaszczyźnie

Kartezjański prostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie jest to uporządkowana para osi liczbowych $O\mathbf{x}$, $O\mathbf{y}$, które są do siebie prostopadłe, mają wspólny początek i wspólną jednostkę długości. Wspólny początek tych osi oznaczamy przez O. Płaszczyznę, na której przyjęto taki układ współrzędnych nazywamy płaszczyzną $O\mathbf{xy}$.

Niech P będzie dowolnym punktem na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ (rys. 7.12), natomiast P' i P'' niech będą rzutami prostopadłymi punktu P, odpowiednio, na oś $O\mathbf{x}$ i $O\mathbf{y}$. Przez x oznaczamy współrzędną punktu P' na osi $O\mathbf{x}$, a przez y współrzędną punktu P'' na osi $O\mathbf{y}$. Para (x, y) w sposób jednoznaczny określa położenie punktu P na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$. Liczby x, y nazywamy współrzędnymi punktu P: x — odcięta, y — rzędna. Punkt O, początek układu współrzędnych, ma współrzędne $(0, 0)$. Zapis $P(x, y)$ oznacza, że punkt P ma współrzędne (x, y).

Wektor $\overline{OP}$ nazywamy wektorem wodzącym punktu P. Łatwo widać, że jeżeli $P(x, y)$ jest punktem na płaszczyźnie, to długość wektora $\overline{OP}$ wyraża się wzorem

$$\left|\overline{OP}\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Rys. 7.12. Kartezjański układ współrzędnych na płaszczyźnie

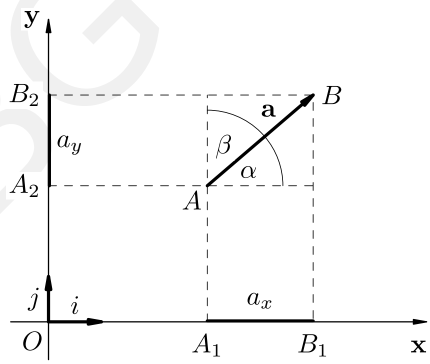
Niech $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ będą dowolnymi punktami na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$. Punkty te wyznaczają wektor $\overline{AB}$. Długość wektora $\overline{AB}$, na podstawie twierdzenia Pitagorasa, wyraża się wzorem

$$|\overline{AB}| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}.$$

Proponuję, aby Czytelnik wyprowadził ten ostatni wzór.

7.2.6. Wektory na płaszczyźnie

W układzie współrzędnych kartezjańskich $O\mathbf{xy}$ rozważmy wektor $\mathbf{a} = \overline{AB}$, gdzie $A\big(x_1, y_1\big)$, $B\big(x_2, y_2\big)$. Niech A_1, B_1 będą rzutami, odpowiednio, punktów A i B na oś $O\mathbf{x}$, natomiast A_2, B_2 — rzutami punktów A i B na oś $O\mathbf{y}$ (rys. 7.13).



Rys. 7.13. Wektor na płaszczyźnie

Rzutem wektora $\mathbf{a} = \overline{AB}$ na oś $O\mathbf{x}$ jest wektor $\overline{A_1B_1}$, a na oś $O\mathbf{y}$ wektor $\overline{A_2B_2}$. Niech $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ będą wersorami, odpowiednio, na osiach $O\mathbf{x}$ i $O\mathbf{y}$. Zatem istnieją liczby a_x, a_y takie, że

$$\overline{A_1B_1} = a_x\mathbf{i}, \qquad \overline{A_2B_2} = a_y\mathbf{j}.$$

BG AGH

Oprócz tego

$$\mathbf{a} = \overline{AB} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2},$$

czyli

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$$

dla dowolnego wektora $\mathbf{a}$ na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$.

Liczby a_x i a_y nazywamy współrzędnymi wektora $\mathbf{a} = \overline{AB}$ na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$. Dowodzi się, że jeżeli $\mathbf{a} = \overline{AB}$, gdzie $A\big(x_1, y_1\big)$, $B\big(x_2, y_2\big)$, to

$$a_x = x_2 - x_1, \qquad a_y = y_2 - y_1.$$

Zapis

$$\mathbf{a} = \big(a_x, a_y\big)$$

oznacza, że wektor $\mathbf{a}$ ma współrzędne a_x i a_y, czyli

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}.$$

W ten sposób każdemu wektorowi $\mathbf{a}$, w prostokątnym układzie współrzędnych $O\mathbf{xy}$, możemy przyporządkować parę liczb $\big(a_x, a_y\big)$, gdzie a_x, a_y — współrzędne tego wektora. I na odwrót, każdą parę liczb $\big(a_x, a_y\big)$ możemy interpretować jako współrzędne wektora

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j},$$

gdzie: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — wersory. Łatwo zauważyć, że długość wektora $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ wyraża się wzorem $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Wersory $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{i} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j}, \qquad \mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$$

czyli $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$.

Kątami kierunkowymi wektora $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y\big)$ na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ nazywamy kąty α i β, jakie ten wektor tworzy z osiami $O\mathbf{x}$ i $O\mathbf{y}$ (rys. 7.13). Czyli

$$\alpha = \sphericalangle(O\mathbf{x}, \mathbf{a}), \qquad \beta = \sphericalangle(O\mathbf{y}, \mathbf{a}).$$

Cosinusy kątów α i β nazywamy cosinusami kierunkowymi wektora $\mathbf{a}$. Widać, że

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos\alpha, \qquad a_y = |\mathbf{a}| \cos\beta.$$

Te zależności są również słuszne dla wektora zerowego. Oprócz tego $\cos^2\alpha + cos^2\beta = 1$ dla $\mathbf{a} \neq 0$.

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na geometryczną interpretację iloczynu kartezjańskiego $R^2 = R \times R = \big\{\big(x, y\big) : x, y \in R\big\}$, gdzie R — zbiór liczb rzeczywistych.

Mianowicie, R^2 możemy interpretować na trzy sposoby:

1. Zbiór wszystkich punktów $P\big(x, y\big)$ na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$. Wówczas elementy zbioru R^2 nazywamy punktami, a x i y nazywamy współrzędnymi punktów.
2. Zbiór wszystkich wektorów $\mathbf{a} = \overline{OP}$, gdzie $O\big(0, 0\big)$, $P\big(x, y\big)$. W tej interpretacji elementy zbioru R^2 nazywamy wektorami, natomiast x i y nazywamy współrzędnymi wektorów.
3. Zbiór wszystkich wektorów swobodnych $\mathbf{a} = \big(x, y\big)$. W tym przypadku elementy pary $\big(x, y\big)$ są współrzędnymi wektora

   $$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

W drugiej i trzeciej interpretacji, zbiór $R \times R$ nazywamy przestrzenią wektorową R^2, a elementy tego zbioru nazywamy wektorami.

W poprzednich paragrafach dla wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ była podana definicja sumy i różnicy wektorów oraz definicja iloczynu wektora przez liczbę rzeczywistą.

Na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ wektory możemy utożsamiać z jego współrzędnymi, z uporządkowanymi parami liczb.

A jak można wyznaczyć sumę lub różnicę wektorów, które dane są przez swoje współrzędne? To samo pytanie dotyczy również iloczynu wektora przez liczbę.

Dowodzi się, że prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 7.1. *Jeżeli* $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y\big)$, $\mathbf{b} = \big(b_x, b_y\big)$, $\mathbf{c} = \big(c_x, c_y\big)$ *są wektorami w prostokątnym układzie współrzędnych* $O\mathbf{xy}$ *oraz* λ, $\mu \in R$, *to:*

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \big(a_x + b_x,\ a_y + b_y\big)$,
2) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \big(a_x - b_x,\ a_y - b_y\big)$,
3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
4) $\lambda\mathbf{a} = \big(\lambda a_x, \lambda a_y\big)$,
5) $\lambda\big(\mu\mathbf{a}\big) = \big(\lambda\mu\big)\mathbf{a}$,
6) $\lambda\big(\mathbf{a} + \mathbf{b}\big) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$,
7) $\big(\lambda + \mu\big)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$,
8) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_x = b_x$ *i* $a_y = b_y$.

7.2.7. Kartezjański układ współrzędnych w przestrzeni

Kartezjański prostokątny układ współrzędnych w przestrzeni jest to uporządkowana trójka osi liczbowych $O\mathbf{x}$, $O\mathbf{y}$, $O\mathbf{z}$, które są wzajemnie do siebie prostopadłe, mają wspólny początek i wspólną jednostkę długości. Przestrzeń, w której przyjęto taki układ współrzędnych nazywamy przestrzenią $O\mathbf{xyz}$.

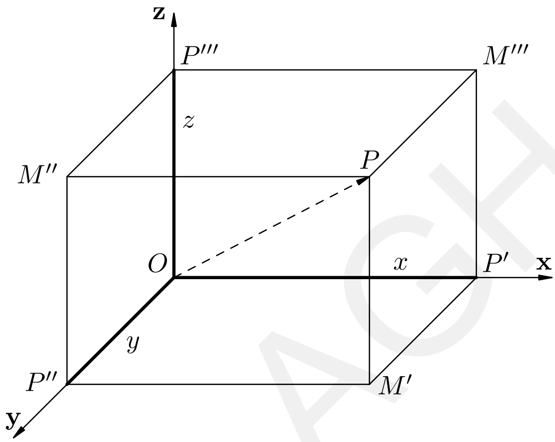
Niech P będzie dowolnym punktem w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$ (rys. 7.14). Przez P', P'' i P''' oznaczamy rzuty punktu P, odpowiednio, na osie $O\mathbf{x}$, $O\mathbf{y}$, $O\mathbf{z}$. Niech x będzie współrzędną punktu P' na osi $O\mathbf{x}$, y — współrzędną punktu P'' na osi $O\mathbf{y}$, z — współrzędną punktu P''' na osi $O\mathbf{z}$. Liczby x, y i z nazywamy współrzędnymi

BG AGH

punktu P w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$. Trójka uporządkowana $\big(x, y, z\big)$ w sposób jednoznaczny określa położenie punktu P w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$. Zapis $P\big(x, y, z\big)$ oznacza, że x, y, z są współrzędnymi punktu P. Wektor $\overline{OP}$ nazywamy wektorem wodzącym punktu P w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$. Długość tego wektora wyraża się wzorem

$$\big|\overline{OP}\big| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Punkty $P(x, 0, 0)$ leżą na osi $O\mathbf{x}$, punkty $P(0, 0, z)$ leżą na osi $O\mathbf{z}$. Natomiast punkty $P(x, y, 0)$ leżą na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$, zaś punkty $P(0, y, z)$ leżą na płaszczyźnie $O\mathbf{yz}$.



Rys. 7.14. Kartezjański układ współrzędnych w przestrzeni

Niech $A\big(x_1, y_1, z_1\big)$, $B\big(x_2, y_2, z_2\big)$ będą punktami w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$. Długość odcinka AB wyraża się wzorem

$$|AB| = \sqrt{\big(x_1 - x_2\big)^2 + \big(y_1 - y_2\big)^2 + \big(z_1 - z_2\big)^2}.$$

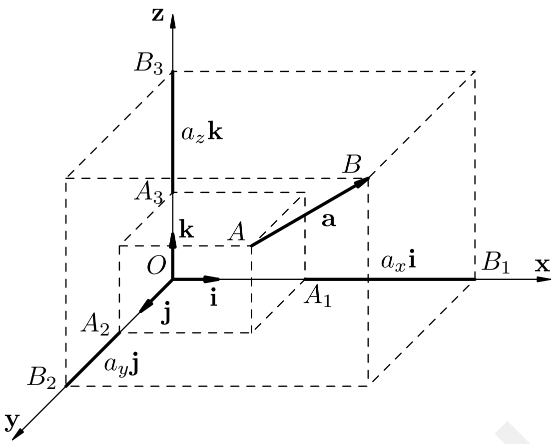
Proponuję, aby Czytelnik wyprowadził ten wzór.

7.2.8. Wektory w przestrzeni

W układzie współrzędnych kartezjańskich $O\mathbf{xyz}$ rozważmy wektor $\mathbf{a} = \overline{AB}$, gdzie $A\big(x_1, y_1, z_1\big)$, $B\big(x_2, y_2, z_2\big)$ (rys. 7.15).

Niech A_1 i B_1 będą rzutami, odpowiednio, punktów A i B na oś $O\mathbf{x}$, A_2 i B_2 — na oś $O\mathbf{y}$, A_3 i B_3 — na oś $O\mathbf{z}$. Zatem wektory $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_3B_3}$ są rzutami wektora $\mathbf{a} = \overline{AB}$ na odpowiednie osie układu współrzędnych. Niech $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ oraz $\mathbf{k}$ będą wersorami na osiach $O\mathbf{x}$, $O\mathbf{y}$ i $O\mathbf{z}$. Oznacza to, że istnieją liczby rzeczywiste a_x, a_y, a_z takie, że

$$\overline{A_1B_1} = a_x\mathbf{i}, \qquad \overline{A_2B_2} = a_y\mathbf{j}, \qquad \overline{A_3B_3} = a_z\mathbf{k}.$$



Rys. 7.15. Wektor w przestrzeni

Oprócz tego

$$\mathbf{a} = \overline{AB} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \overline{A_3B_3},$$

czyli

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

dla dowolnego wektora $\mathbf{a}$ w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$. Liczby a_x, a_y, a_z nazywamy współrzędnymi wektora $\mathbf{a} = \overline{AB}$. Zapis $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$ oznacza, że wektor $\mathbf{a}$ ma współrzędne a_x, a_y, a_z.

Dowodzi się, że jeżeli $\mathbf{a} = \overline{AB}$, gdzie $A\big(x_1, y_1, z_1\big)$ i $B\big(x_2, y_2, z_2\big)$, to

$$a_x = x_2 - x_1, \qquad a_y = y_2 - y_1, \qquad a_z = z_2 - z_1.$$

Łatwo udowodnić, że długość wektora $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$ wyraża się wzorem

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\big(x_2 - x_1\big)^2 + \big(y_2 - y_1\big)^2 + \big(z_2 - z_1\big)^2}.$$

Podobnie jak wektorom na płaszczyźnie, każdemu wektorowi $\mathbf{a}$ w prostokątnym układzie współrzędnych $O\mathbf{xyz}$ możemy przyporządkować uporządkowaną trójkę liczb $\big(a_x, a_y, a_z\big)$, gdzie a_x, a_y, a_z są współrzędnymi tego wektora. I na odwrót, każdą uporządkowaną trójkę liczb $\big(a_x, a_y, a_z\big)$ możemy interpretować jako współrzędne wektora

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

gdzie: $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — wersory na osiach $O\mathbf{x}$, $O\mathbf{y}$, $O\mathbf{z}$.

Widać, że wersory możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{i} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \qquad \mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k},$$

czyli $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Dla wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ znamy już definicję i interpretację geometryczną sumy i różnicy tych wektorów oraz iloczyn wektora przez liczbę. W prostokątnym układzie współrzędnych $O\mathbf{xyz}$ wektory utożsamiamy z jego współrzędnymi.

BG AGH

Podamy teraz sposób wyznaczania sumy i różnicy wektorów, gdy wektory te zadane są poprzez swoje współrzędne.

Dowodzi się, że prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 7.2. *Jeżeli* $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ *są wektorami w prostokątnym układzie współrzędnych* $O\mathbf{xyz}$ *oraz* λ, $\mu \in R$, *to:*

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$,
2) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_x - b_x,\ a_y - b_y,\ a_z - b_z)$,
3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
4) $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$,
5) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$,
6) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$,
7) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$,
8) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

Kątami kierunkowymi wektora $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$ nazywamy kąty α, β, γ, jakie ten wektor tworzy z osiami współrzędnych $O\mathbf{x}$, $O\mathbf{y}$, $O\mathbf{z}$. Czyli

$$\alpha = \sphericalangle(O\mathbf{x}, \mathbf{a}), \qquad \beta = \sphericalangle(O\mathbf{y}, \mathbf{a}), \qquad \gamma = \sphericalangle(O\mathbf{z}, \mathbf{a}).$$

Natomiast cosinusy kątów α, β, γ nazywamy cosinusami kierunkowymi wektora $\mathbf{a}$ w układzie $O\mathbf{xyz}$. Łatwo wykazać, że

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos\alpha, \qquad a_y = |\mathbf{a}| \cos\beta, \qquad a_z = |\mathbf{a}| \cos\gamma,$$

dla dowolnego wektora $\mathbf{a}$ oraz

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

dla $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Podobnie jak R^2, iloczyn kartezjański $R^3 = R \times R \times R = \{(x, y, z) \colon x, y, z \in R\}$, gdzie R — zbiór liczb rzeczywistych, będziemy interpretować na trzy różne sposoby:

1. Zbiór wszystkich punktów $P(x, y, z)$ w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$.
2. Zbiór wszystkich wektorów $\mathbf{a} = \overline{OP}$, gdzie $O(0, 0, 0)$, $P(x, y, z)$. W tej interpretacji elementy zbioru R^3 nazywamy wektorami, natomiast x, y i z nazywamy współrzędnymi wektorów.
3. Zbiór wszystkich wektorów swobodnych $\mathbf{a} = (x, y, z)$. W tym przypadku x, y, z są współrzędnymi wektora $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

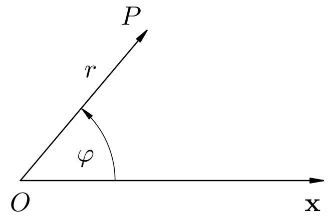
W drugiej i trzeciej interpretacji, zbiór R^3 nazywamy przestrzenią wektorową R^3, a elementy tego zbioru nazywamy wektorami.

BG AGH

7.2.9. Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie

Na płaszczyźnie, oprócz kartezjańskich współrzędnych prostokątnych, wprowadza się jeszcze inne współrzędne.

Niech na dodatnio zorientowanej płaszczyźnie będzie ustalony punkt O, nazywany biegunem, oraz półoś $O\mathbf{x}$ nazywana osią biegunową (rys. 7.16).



Rys. 7.16. Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie

Położenie punktu $P \neq O$ na płaszczyźnie będzie w sposób jednoznacznie określone przez:

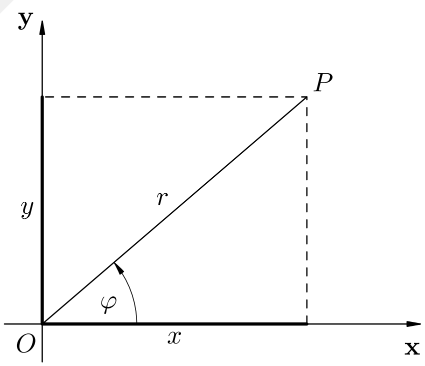
– odległość punktu P od bieguna O ($r = |\overline{OP}|$),

– kąt skierowany, który tworzy oś $O\mathbf{x}$ z wektorem $\overline{OP}$ ($\varphi = \sphericalangle(O\mathbf{x}, \overline{OP})$).

Liczby r, φ nazywamy współrzędnymi biegunowymi punktu P na płaszczyźnie. Liczbę r nazywamy długością promienia wodzącego, a φ — argumentem punktu P. Widać, że dla $P \neq O$, $r > 0$, a o liczbie φ możemy założyć, że $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ lub $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Biegun O ma promień wodzący $r = 0$, a za amplitudę możemy przyjąć dowolną liczbę.

Parę (r, φ) nazywamy współrzędnymi biegunowymi punktu P względem bieguna O i osi biegunowej $O\mathbf{x}$.

Weźmy pod uwagę płaszczyznę $O\mathbf{xy}$ (rys. 7.17). Niech na tej płaszczyźnie punkt O będzie biegunem, a półoś $O\mathbf{x}$ osią biegunową.



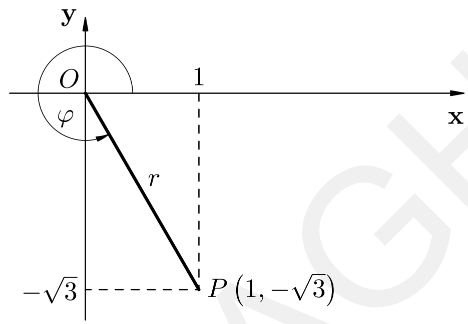
Rys. 7.17. Współrzędne kartezjańskie i biegunowe na płaszczyźnie

W prostokątnym układzie współrzędnych $O\mathbf{xy}$ punkt P ma współrzędne $\left(x, y\right)$, a w biegunowym układzie współrzędnych — $\left(r, \varphi\right)$. Łatwo zauważyć, że między współrzędnymi $\left(x, y\right)$ i $\left(r, \varphi\right)$ punktu P zachodzą związki:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned} \tag{7.1}$$

Przykład

Obliczyć współrzędne biegunowe punktu P, którego współrzędnymi kartezjańskimi są $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$ (rys. 7.18).



Rys. 7.18. Przykład współrzędnych kartezjańskich i biegunowych

Widać, że $r = \sqrt{1 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $\cos\varphi = 1/2$, $\sin\varphi = -\sqrt{3}/2$. Stąd $\varphi = 5/3\,\pi$. Zatem punkt P o współrzędnych kartezjańskich $\left(1, -\sqrt{3}\right)$ ma współrzędne biegunowe $\left(r, \varphi\right) = \left(2, 5/3\,\pi\right)$.

Przykład

Wyznaczyć współrzędne kartezjańskie punktu P, który we współrzędnych biegunowych jest określony przez $\left(r, \varphi\right) = \left(5/2\,, 3/4\,\pi\right)$.

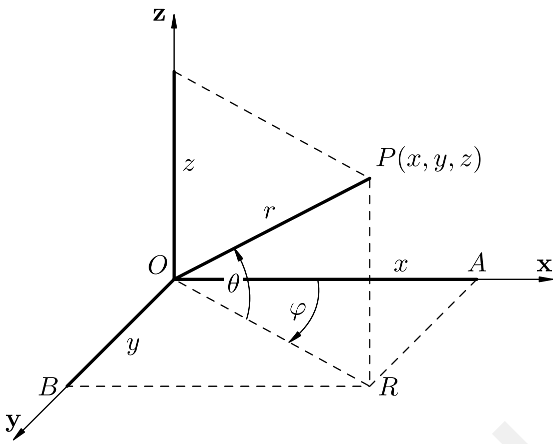
Z zależności (7.1) mamy:

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{2}\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{5}{2\sqrt{2}}, \\ y &= \frac{5}{2}\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{5}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

7.2.10. Współrzędne sferyczne w przestrzeni

W przestrzennym układzie współrzędnych $O\mathbf{xyz}$ niech będzie dany punkt P o współrzędnych $\left(x, y, z\right)$ i niech punkt R będzie rzutem punktu P na płaszczyznę $O\mathbf{xy}$ (rys. 7.19).

BG AGH



Rys. 7.19. Przestrzenny układ współrzędnych $O\mathbf{xyz}$

Liczby:

$$r = |\overline{OP}|,$$
$$\varphi = \sphericalangle(O\mathbf{x}, \overline{OR}) \text{ — miara kąta skierowanego } \sphericalangle(O\mathbf{x}, \overline{OR}),$$
$$\theta = \sphericalangle(\overline{OR}, \overline{OP}) \text{ — miara kąta skierowanego } \sphericalangle(\overline{OR}, \overline{OP}),$$

nazywamy współrzędnymi sferycznymi punktu P.

Przyjmujemy, że

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi, \qquad -\frac{1}{2}\pi \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi.$$

Kąt θ jest dodatni, gdy wektor $\overline{RP}$ ma taką samą orientację jak oś $O\mathbf{z}$ oraz θ ma wartość ujemną, gdy wektor $\overline{RP}$ i oś $O\mathbf{z}$ mają przeciwną orientację. Dla punktu $P \neq O$ leżącego na osi $O\mathbf{z}$ przyjmujemy, że kąt φ jest dowolny. Natomiast dla punktu O przyjmujemy, że $r = 0$, φ, θ — dowolne.

Współrzędne sferyczne r, φ, θ punktu P mają następujące nazwy:

r — promień wodzący,

φ — długość geograficzna,

θ — szerokość geograficzna.

Widać, że między współrzędnymi prostokątnymi (x, y, z) i sferycznymi (r, φ, θ) punktu P zachodzą związki:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= r\sin\varphi\cos\theta \\ z &= r\sin\theta \end{aligned} \tag{7.2}$$

Przykład

Punkt P ma następujące współrzędne sferyczne

$$r = 2, \qquad \varphi = \frac{1}{4}\pi, \qquad \theta = \frac{1}{3}\pi.$$

Wyznaczyć współrzędne kartezjańskie tego punktu.

Z zależności (7.2) mamy:

$$x = 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$y = 2\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$z = 2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \sqrt{3}.$$

Zatem punkt P o współrzędnych sferycznych $(r, \varphi, \theta) = (2, {}^1\!/_4\,\pi, {}^1\!/_3\,\pi)$ ma następujące współrzędne kartezjańskie $(x, y, z) = ({}^1\!/_{\sqrt{2}}, {}^1\!/_{\sqrt{2}}, \sqrt{3})$.

7.2.11. Kombinacja liniowa wektorów

Weźmy pod uwagę wektory $\mathbf{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, gdzie każdy z tych wektorów jest określony przez współrzędne: dwie współrzędne w prostokątnym układzie współrzędnych $O\mathbf{xy}$ lub trzy współrzędne w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$. Przez $\mathbf{0}$ oznaczamy wektor zerowy: $\mathbf{0} = (0, 0)$ na płaszczyźnie lub $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ w przestrzeni.

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ będą liczbami rzeczywistymi.

Definicja. *Wektor*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n,$$

gdzie $\lambda_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *nazywamy kombinacją liniową wektorów* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Przykład

Niech $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$.

Wektor

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$$

jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, gdzie λ, μ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Wektor

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$$

jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, gdzie α, β, $\gamma \in R$.

BG AGH

Wektor

$$\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} + \lambda_4\mathbf{d}$$

jest kombinacją liniową wektorów **a**, **b**, **c**, **d**, gdzie $\lambda_i \in R$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Widać, że kombinację liniową $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ możemy przedstawić w postaci

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \lambda\big(a_x, a_y, a_z\big) + \mu\big(b_x, b_y, b_z\big) = \big(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\big) + \big(\mu a_x, \mu a_y, \mu a_z\big) = \\ = \big(\lambda a_x + \mu b_x, \lambda a_y + \mu b_y, \lambda a_z + \mu b_z\big).$$

Przykład

Weźmy pod uwagę wektory: $\mathbf{a} = \big(2, -3\big)$, $\mathbf{b} = \big(1, 0\big)$, $\mathbf{c} = \big(-2, 1\big)$.

Kombinacja liniowa tych wektorów ma postać

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \alpha(2, -3) + \beta(1, 0) + \gamma(-2, 1) = \\ = (2\alpha, -3\alpha) + (\beta, 0) + (-2\gamma, \gamma) = (2\alpha + \beta - 2\gamma, -3\alpha + \gamma),$$

gdzie: α, β, γ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Z poprzednich rozważań wiemy, że jeżeli $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y\big)$, to wektor **a** możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j},$$

gdzie:

i, **j** — wersory w prostokątnym układzie współrzędnych $O\mathbf{xy}$,
a_x, a_y — współrzędne tego wektora.

Zapis $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}$ oznacza, że wektor **a** jest kombinacją liniową wersorów **i**, **j**.

Analogicznie, dla wektora $\mathbf{b} = \big(b_x, b_y, b_z\big)$ zapis

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

oznacza, że wektor **b** jest kombinacją liniową wersorów **i**, **j**, **k**.

Z tych i poprzednich rozważań wynika następujący

Wniosek. Każdy wektor $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y\big)$ w układzie współrzędnych $O\mathbf{xy}$ możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej wersorów **i**, **j**, czyli

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}.$$

Każdy wektor $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$ w układzie współrzędnych $O\mathbf{xyz}$ możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej wersorów **i**, **j**, **k**, czyli

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Definicja. *Wektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ nazywamy liniowo niezależnymi jeżeli stąd, że kombinacja liniowa*

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

gdzie $\mathbf{0}$ *— wektor zerowy, wynika, że* $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

BG AGH

Wektory, które nie są liniowo niezależne nazywamy wektorami liniowo zależnymi. Możemy powiedzieć inaczej, wektory $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ są liniowo zależne jeżeli istnieje kombinacja liniowa

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

dla $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n| > 0$.

Przykład

Weźmy pod uwagę wektory $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, -4)$. Widać, że dla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ kombinacja liniowa $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$ ma postać

$$2\mathbf{a} + 1\mathbf{b} = 2(1, 2) + 1(-2, -4) = (2, 4) + (-2, -4) = (0, 0) = \mathbf{0}.$$

Czyli dla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ kombinacja liniowa $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$ i $|\lambda_1| + |\lambda_2| = 3 > 0$. Zatem rozważane wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są liniowo zależne.

Przykład

Dla wektorów $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ są dowolnymi wektorami, kombinacja liniowa

$$0\mathbf{a} + 0\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

dla dowolnego $\lambda_3 \in R$, czyli dla $\lambda_3 \neq 0$ też. A to oznacza, że rozważana trójka wektorów jest liniowo zależna.

Przykład

Pokażemy teraz prosty przykład dwóch wektorów liniowo niezależnych. Niech $\mathbf{a} = (2, 4)$, $\mathbf{b} = (3, 1)$.

Udowodnimy, że jeżeli

$$\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} = \mathbf{0} = (0, 0) \tag{7.3}$$

to stąd wynika, że $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Łatwo widać, że zależność

$$\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} = (0, 0)$$

możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(2, 4) + \lambda_2(3, 1) = (0, 0), \\ &\big(2\lambda_1, 4\lambda_1\big) + \big(3\lambda_2, \lambda_2\big) = (0, 0), \\ &\big(2\lambda_1 + 3\lambda_2, 4\lambda_1 + \lambda_2\big) = (0, 0), \end{aligned}$$

czyli λ_1, λ_2 muszą spełniać układ równań

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

Po pomnożeniu pierwszego równania przez -2 i dodaniu do drugiego równania otrzymamy

$$-5\lambda_2 = 0,$$

czyli

$$\lambda_2 = 0.$$

Stąd i z pierwszego równania mamy $\lambda_1 = 0$. Zatem równanie (7.3) jest spełnione wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. To zaś oznacza, że wektory $\mathbf{a} = (2, 4)$, $\mathbf{b} = (3, 1)$ są liniowo niezależne.

Analogicznie, jak w ostatnim przykładzie, możemy łatwo sprawdzić, że wersory $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$ są liniowo niezależne. Wersory $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ również są liniowo niezależne.

Weźmy pod uwagę trzy wektory

$$\mathbf{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big), \qquad \mathbf{b} = \big(b_x, b_y, b_z\big), \qquad \mathbf{c} = \big(c_x, c_y, c_z\big).$$

Ze współrzędnych tych wektorów utwórzmy wyznacznik

$$W\big(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\big) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Udowodnimy następujące

TWIERDZENIE 7.3. *Wektory $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$, $\mathbf{b} = \big(b_x, b_y, b_z\big)$, $\mathbf{c} = \big(c_x, c_y, c_z\big)$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$W\big(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\big) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

DOWÓD. Dowód tego twierdzenia traktujemy jako powtórkę lub ćwiczenie układu równań liniowych.

WARUNEK WYSTARCZAJĄCY. Zakładamy, że $W\big(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\big) = 0$ i mamy udowodnić, że kombinacja liniowa

$$\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} + \lambda_3\mathbf{c} = \mathbf{0} \tag{7.4}$$

dla pewnych λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in R$, takich, że $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| > 0$. Równość (7.4) jest równoważna następującemu układowi równań

$$\begin{cases} a_x\lambda_1 + b_x\lambda_2 + c_x\lambda_3 = 0 \\ a_y\lambda_1 + b_y\lambda_2 + c_y\lambda_3 = 0 \\ a_z\lambda_1 + b_z\lambda_2 + c_z\lambda_3 = 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

BG AGH

Stąd, że $W\big(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\big) = 0$ i z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika, że istnieje niezerowe rozwiązanie układu równań (7.5). A to oznacza, że wektor **a**, **b** i **c** są liniowo zależne.

Warunek konieczny. Zakładamy, że wektory **a**, **b** i **c** są liniowo zależne, a udowodnimy, że $W\big(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\big) = 0$. Z założenia, że **a**, **b** i **c** są liniowo zależne wynika, że układ równań (7.5) ma niezerowe rozwiązanie. A stąd i z twierdzenia Kroneckera--Capelliego wynika że $W\big(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\big) = 0$.

7.2.12. Iloczyn skalarny wektorów

Weźmy pod uwagę dwa wektory: **a** i **b**. Mogą to być wektory na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ lub w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$. Jeżeli **a**, **b** są wektorami na płaszczyźnie, piszemy krótko $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^2$, to zakładamy, że

$$\mathbf{a} = \big(a_x, a_y\big), \qquad \mathbf{b} = \big(b_x, b_y\big).$$

Natomiast jeżeli **a**, **b** są w przestrzeni $O\mathbf{xyz}$, piszemy $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^3$, to zakładamy, że

$$\mathbf{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big), \qquad \mathbf{b} = \big(b_x, b_y, b_z\big).$$

Mówimy, że wektory **a** i **b** są do siebie prostopadłe lub ortogonalne jeżeli $\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = {}^{\pi}/_{2}$. Dodatkowo przyjmujemy, że wektor zerowy jest prostopadły do każdego wektora. Zapis $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ jest symboliczną notacją faktu, że wektory **a** i **b** są do siebie prostopadłe.

Padamy teraz definicję i własności iloczynu skalarnego wektorów **a** i **b**.

Definicja. *Iloczynem skalarnym niezerowego wektora* **a** *przez niezerowy wektor* **b***, oznaczamy ten iloczyn przez* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *lub* **ab***, nazywamy liczbę*

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}),$$

gdzie:

$|\mathbf{a}|$ — *długość wektora* **a***,*
$|\mathbf{b}|$ — *długość wektora* **b***,*
$\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$ — *kąt między wektorami* **a** *i* **b***.*

Jeżeli **a** lub **b** jest wektorem zerowym, to przyjmujemy, że $\mathbf{ab} = 0$.

Dowodzi się, że prawdziwe są następujące twierdzenia:

Twierdzenie 7.4.

1) *jeżeli* $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y\big)$, $\mathbf{b} = \big(b_x, b_y\big)$, *to* $\mathbf{ab} = a_xb_x + a_yb_y$,
2) *jeżeli* $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$, $\mathbf{b} = \big(b_x, b_y, b_z\big)$, *to* $\mathbf{ab} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.

BG AGH

TWIERDZENIE 7.5. *Jeżeli* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *są wektorami oraz* λ, $\mu \in R$, *to:*

1) $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$,
2) $\mathbf{a}\big(\mathbf{b}+\mathbf{c}\big) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}$,
3) $\big(\lambda\mathbf{a}\big)\big(\mu\mathbf{b}\big) = \big(\lambda\mu\big)\big(\mathbf{ab}\big)$.

TWIERDZENIE 7.6. *Wektory* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$ *są do siebie prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathbf{ab} = 0.$$

Dwa ostatnie twierdzenia są słuszne dla wektorów z R^2 lub R^3.

Widać, że iloczyn skalarny dwóch wektorów jest liczbą rzeczywistą dodatnią, ujemną lub zerem.

Jeżeli wektor $\mathbf{a}$ jest wektorem siły, natomiast $\mathbf{b}$ jest wektorem przesunięcia, to w interpretacji fizycznej iloczyn skalarny $\mathbf{ab}$ jest pracą, jaką wykona siła $\mathbf{a}$ wzdłuż wektora $\mathbf{b}$.

Z definicji iloczynu skalarnego $\mathbf{ab}$ wynika, że

$$\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \tag{7.6}$$

dla dowolnych wektorów $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Z zależności (7.6) można wyznaczyć cosinus kąta zawartego między wektorami $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Jeżeli $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y\big)$, $\mathbf{b} = \big(b_x, b_y\big)$, to z (7.6) otrzymamy

$$\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Natomiast w przypadku $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$, $\mathbf{b} = \big(b_x, b_y, b_z\big)$ mamy

$$\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Przykład

Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{a} = (2, 3, -4)$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ oraz cosinus kąta między tymi wektorami.

W tym przykładzie, mamy:

$$\mathbf{ab} = (2, 3, -4)(3, -4, 1) = -10,$$
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29},$$
$$|\mathbf{b}| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26},$$
$$\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{-10}{\sqrt{29}\sqrt{26}} \approx -0.364.$$

7.2.13. Iloczyn wektorowy wektorów

W układzie $O\mathbf{xyz}$ weźmy pod uwagę trzy wektory

$$\mathbf{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right), \qquad \mathbf{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right), \qquad \mathbf{c} = \left(c_x, c_y, c_z\right)$$

oraz wyznacznik

$$W\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Definicja. *Mówimy, że uporządkowana trójka wektorów* $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\right)$ *ma:*

1) *orientację zgodną z układem* $O\mathbf{xyz}$, *jeżeli* $W\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\right) > 0$,
2) *orientację niezgodną z układem* $O\mathbf{xyz}$, *jeżeli* $W\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\right) < 0$.

Z tej definicji i z własności wyznaczników wynika, że jeżeli uporządkowana trójka wektorów $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\right)$ ma orientację zgodną z układem $O\mathbf{xyz}$, to np. trójka $\left(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}\right)$ ma orientację niezgodną z układem $O\mathbf{xyz}$.

Łatwo zauważyć, że jeżeli $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ są wersorami, odpowiednio, osi $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, to uporządkowana trójka wektorów $\left(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\right)$ ma orientację zgodną z układem $O\mathbf{xyz}$, gdyż

$$W\left(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Mówimy, że trójka osi $\left(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}'\right)$ ma orientację zgodną (niezgodną) z układem $O\mathbf{xyz}$, jeżeli trójka wersorów, odpowiednio, osi $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$, $\mathbf{z}'$ ma orientację zgodną (niezgodną) z układem $O\mathbf{xyz}$.

Wprowadzimy teraz pojęcie iloczynu wektorowego wektorów

$$\mathbf{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right), \qquad \mathbf{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right).$$

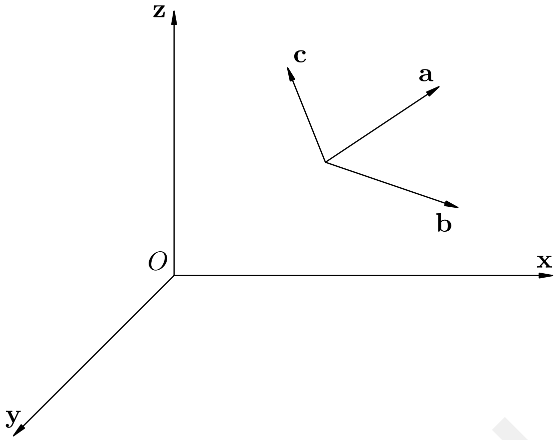
Definicja. *Niech wektory* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *będą niezerowe i nierównoległe. Iloczynem wektorowym wektora* $\mathbf{a}$ *przez wektor* $\mathbf{b}$, *oznaczamy go przez* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, *nazywamy taki wektor* $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, *że:*

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,
2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ *i* $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$ (*wektor* $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *jest prostopadły do wektora* $\mathbf{a}$ *i do wektora* $\mathbf{b}$),
3) *uporządkowana trójka* $\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\right)$ *ma orientację zgodną z układem* $O\mathbf{xyz}$, *czyli* $W\left(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\right) > 0$.

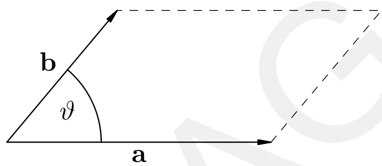
Jeżeli $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ lub $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ lub wektor $\mathbf{a}$ jest równoległy do wektora $\mathbf{b}$, to, z definicji, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Na rysunku 7.20 pokazano ilustrację wektora $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Długość wektora $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ma prostą interpretację geometryczną. Mianowicie, $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \nu$, gdzie $\nu = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, równa się polu równoległoboku o bokach $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ równoległych do wektorów $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ (rys. 7.21).

BG AGH



Rys. 7.20. Ilustracja iloczynu wektorowego $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$



Rys. 7.21. Ilustracja długości wektora $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Dowodzi się, że prawdziwe jest następujące

TWIERDZENIE 7.7. *Jeżeli* $\mathbf{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\mathbf{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$, $\mathbf{c} = \left(c_x, c_y, c_z\right)$, *to:*

1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,
2) $\mathbf{a} \times \left(\mathbf{b} + \mathbf{c}\right) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$,
3) $\left(\lambda \mathbf{a}\right) \times \mathbf{b} = \lambda\left(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right)$ *dla dowolnego* $\lambda \in R$,
4) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ *lub* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ *lub wektor* $\mathbf{a}$ *jest równoległy do wektora* $\mathbf{b}$.

Z definicji $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ wynika, że jeżeli $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ są wersorami osi $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ w układzie $O\mathbf{xyz}$, to:

$$\begin{aligned} &\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \end{aligned} \tag{7.7}$$

Niech $\mathbf{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\mathbf{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$.

Powstaje naturalne pytanie: jak obliczyć współrzędne wektora $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, gdy są zadane współrzędne wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$?

Odpowiedź na to pytanie daje następujące

Twierdzenie 7.8. *Jeżeli* $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$, $\mathbf{b} = \big(b_x, b_y, b_z\big)$, *to współrzędne wektora* $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \big(c_x, c_y, c_z\big)$ *wyrażają się zależnościami*

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \qquad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \qquad c_z = a_x b_y - a_y b_x \tag{7.8}$$

lub zapisane w formie wyznacznika

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \big(a_y b_z - a_z b_y\big)\mathbf{i} + \big(a_z b_x - a_x b_z\big)\mathbf{j} + \big(a_x b_y - a_y b_x\big)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{7.9}$$

Dowód. Wzór (7.9) służy do łatwego zapamiętania współrzędnych wektora $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ w zależności od współrzędnych wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. W celu obliczenia c_x, c_y, c_z, wyznacznik we wzorze (7.9) rozwijamy według pierwszego wiersza i otrzymujemy zależność (7.9). Wzory (7.8) i (7.9) różnią się tylko sposobem zapisu.

Udowodnimy, że

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \big(a_y b_z - a_z b_y\big)\mathbf{i} + \big(a_z b_x - a_x b_z\big)\mathbf{j} + \big(a_x b_y - a_y b_x\big)\mathbf{k}.$$

Widać, że

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \big(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\big) \times \big(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}\big).$$

Stąd i z zależności $\mathbf{a} \times \big(\mathbf{b} + \mathbf{c}\big) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = {} & a_x b_x\big(\mathbf{i} \times \mathbf{i}\big) + a_x b_y\big(\mathbf{i} \times \mathbf{j}\big) + a_x b_z\big(\mathbf{i} \times \mathbf{k}\big) + \\ & + a_y b_x\big(\mathbf{j} \times \mathbf{i}\big) + a_y b_y\big(\mathbf{j} \times \mathbf{j}\big) + a_y b_z\big(\mathbf{j} \times \mathbf{k}\big) + \\ & + a_z b_x\big(\mathbf{k} \times \mathbf{i}\big) + a_z b_y\big(\mathbf{k} \times \mathbf{j}\big) + a_z b_z\big(\mathbf{k} \times \mathbf{k}\big), \end{aligned}$$

a to, wobec (7.7), oznacza, że

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = {} & a_x b_y\mathbf{k} + a_x b_z\big(-\mathbf{j}\big) + a_y b_x\big(-\mathbf{k}\big) + a_y b_z\mathbf{i} + a_z b_x\,\mathbf{j} + a_z b_y\big(-\mathbf{i}\big) = \\ & = \big(a_y b_z - a_z b_y\big)\mathbf{i} + \big(a_z b_x - a_x b_z\big)\mathbf{j} + \big(a_x b_y - a_y b_x\big)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Zatem zależność (7.9) jest udowodniona.

Przykład

Dla wektorów $\mathbf{a} = \big(2, -3, 1\big)$, $\mathbf{b} = \big(1, -2, 2\big)$ obliczymy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Z twierdzenia 7.7 mamy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-6 + 2)\mathbf{i} + (1 - 4)\mathbf{j} + (-4 + 3)\mathbf{k} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Zatem wektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-4, -3, -1)$.

Stąd i z zależności $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ otrzymamy

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = (1, -2, 2) \times (2, -3, 1) = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (4, 3, 1).$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\big(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\big)\mathbf{a} = (-4, -3, -1)(2, -3, 1) = 0,$$

czyli $\big(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\big) \perp \mathbf{a}$.

Z definicji $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ widać, że:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

$$\sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \tag{7.10}$$

dla $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ i $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Przykład

Weźmy pod uwagę wektory $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, -2, 3)$. Chcemy obliczyć $\sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. W tym celu wykorzystamy zależność (7.10).

Łatwo zauważyć, że:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k} = (1, -5, -3),$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{1 + (-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{35},$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{6}, \qquad |\mathbf{b}| = \sqrt{14}.$$

Stąd:

$$\sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} \approx 0.6455,$$

$$\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx 0.7016 \text{ [radianów]}$$

lub

$$\varphi \approx 2.4399 \text{ [radianów]}.$$

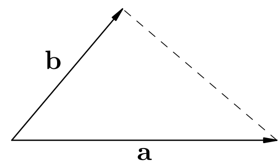
Natomiast iloczyn skalarny $\mathbf{ab} = -7 < 0$, czyli $\cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < 0$. A zatem $\varphi = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx 2.4399$ [radianów].

Weźmy pod uwagę trójkąt wyznaczony przez wektory $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ (rys. 7.22).

Z interpretacji geometrycznej $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ wynika, że pole S trójkąta wyznaczonego przez wektor $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ wyraża się wzorem

$$S = \frac{1}{2}\,|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \tag{7.11}$$

BG AGH



Rys. 7.22. Interpretacja geometryczna $^1/_2\,|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$

Przykład

W układzie współrzędnych $O\mathbf{xyz}$ weźmy pod uwagę trójkąt o wierzchołkach

$$A(2,1,3),\qquad B(2,3,-1),\qquad C(0,5,3).$$

Chcemy obliczyć pole S tego trójkąta. Widać (rys. 7.23), że

$$\overline{AB}=(0,2,-4),\qquad \overline{AC}=(-2,4,0),$$

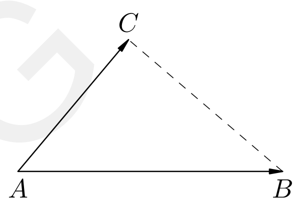
czyli:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=(0,2,-4)\times(-2,4,0)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ 0&2&-4\\ -2&4&0\end{vmatrix}=(16,8,4),$$

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=4\sqrt{21}.$$

Stąd i ze wzoru (7.11) mamy

$$S=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{BC}\right|=2\sqrt{21}.$$



Rys. 7.23. Obliczanie pola trójkąta o wierzchołkach A, B i C

7.2.14. Iloczyn mieszany trójki wektorów

Weźmy pod uwagę trzy wektory

$$\mathbf{a}=\big(a_x,a_y,a_z\big),\qquad \mathbf{b}=\big(b_x,b_y,b_z\big),\qquad \mathbf{c}=\big(c_x,c_y,c_z\big).$$

Definicja. *Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów* $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ *nazywamy liczbę*

$$\mathbf{a}\big(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\big).$$

BG AGH

Iloczyn mieszany oznaczamy symbolem $(\mathbf{abc})$, czyli

$$(\mathbf{abc}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c},$$

gdyż można sprawdzić, że $\mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$.

Przykład

Niech $\mathbf{a} = (1,-1,0)$, $\mathbf{b} = (2,1,1)$, $\mathbf{c} = (1,0,1)$. Obliczymy iloczyn mieszany $(\mathbf{abc})$. Zgodnie z przyjętą definicją mamy

$$(\mathbf{abc}) = (1,-1,0)\big((2,1,1)\times(1,0,1)\big) = (1,-1,0)\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1,-1,0)(1,-1,-1) = 2.$$

Udowodnimy następujące

Twierdzenie 7.9. *Jeżeli* $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, *to*

$$(\mathbf{abc}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{7.12}$$

Dowód. Na podstawie definicji iloczynu mieszanego wektorów mamy

$$(\mathbf{abc}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\left[(b_yc_z - b_zc_y)\mathbf{i} + (b_zc_x - b_xc_z)\mathbf{j} + (b_xc_y - b_yc_x)\mathbf{k}\right] =$$

$$= a_x(b_yc_z - b_zc_y)\mathbf{ii} + a_y(b_zc_x - b_xc_z)\mathbf{jj} + a_z(b_xc_y - b_yc_x)\mathbf{kk} =$$

$$= a_x(b_yc_z - b_zc_y) + a_y(b_zc_x - b_xc_z) + a_z(b_xc_y - b_yc_x) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

a to kończy dowód twierdzenia 7.9.

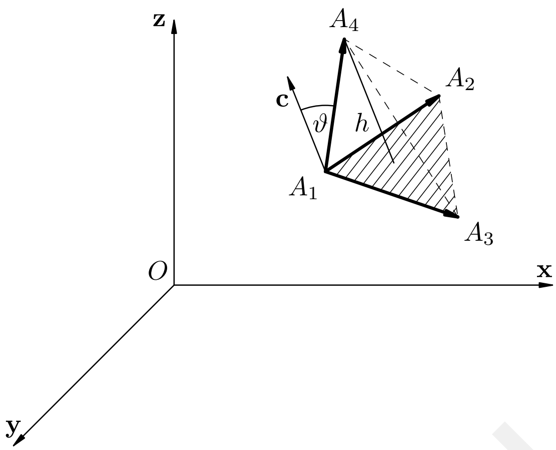
Ze wzoru (7.12) i z własności wyznaczników wynikają nastepujące zależności

$$(\mathbf{abc}) = (\mathbf{bca}) = (\mathbf{cab}) = -(\mathbf{bac}) = -(\mathbf{acb}) = -(\mathbf{cba}).$$

Pokażemy teraz interpretację geometryczną i zastosowanie iloczynu mieszanego wektorów. W tym celu weźmy pod uwagę czworościan o wierzchołkach $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$, $A_4(x_4,y_4,z_4)$ (rys. 7.24).

Widać, że $\overline{A_1A_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, $\overline{A_1A_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$. Niech wektor $\mathbf{c} = \overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3} = (c_x, c_y, c_z)$, gdzie

$$c_x = \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}, \qquad c_y = \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ z_3-z_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}, \qquad c_z = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$



Rys. 7.24. Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego wektorów

Pole S trójkąta o wierzchołkach A_1, A_2, A_3 wyraża się wzorem

$$S = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\left|\mathbf{c}\right|.$$

Natomiast objętość V czworościanu o wierzchołkach A_1, A_2, A_3 i A_4 obliczamy ze wzoru

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

gdzie h jest wysokością tego czworościanu opuszczoną z wierzchołka A_4.

Można zauważyć, że

$$h = \left|\overline{A_1A_4}\right| \left|\cos\vartheta\right|,$$

gdzie $\vartheta = \sphericalangle\left(\overline{A_1A_4}, \mathbf{c}\right)$. Stąd otrzymamy

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\mathbf{c}\right| \left|\overline{A_1A_4}\right| \left|\cos\vartheta\right| = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_4}\left(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right)\right|.$$

Wzór

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{A_1A_4}\left(\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3}\right)\right| \tag{7.13}$$

możemy przekształcić do postaci

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\right| \tag{7.14}$$

Przykład

Obliczymy objętość V czworościanu o wierzchołkach $A_1\big(3,1,2\big)$, $A_2\big(5,1,4\big)$, $A_3\big(0,2,5\big)$, $A_4\big(-2,0,6\big)$.

W tym przykładzie mamy

$$\overline{A_1A_2} = \big(2,0,2\big), \qquad \overline{A_1A_3} = \big(-3,1,3\big), \qquad \overline{A_1A_4} = \big(-5,-1,4\big).$$

Stąd

$$V = \frac{1}{6}\left|(-5,-1,4)\big((2,0,2)\times(-3,1,3)\big)\right| = \frac{1}{6}\left|(-5,-1,4)(-2,-12,2)\right| = \\ = \frac{1}{6}\left|(10+12+8)\right| = 5.$$

Dowodzi się, że prawdziwy jest następujący

Wniosek. Wektory $\mathbf{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$, $\mathbf{b} = \big(b_x, b_y, b_z\big)$, $\mathbf{c} = \big(c_x, c_y, c_z\big)$ są liniowo zależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\big(\mathbf{abc}\big) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Zadania

1. Wyznaczyć odległość punktu $P(3,-5,1)$ od początku układu współrzędnych $O\mathbf{xyz}$ oraz od osi współrzędnych.

2. Dane są punkty: $A(-1,2,4)$, $B(1,6,-1)$, $C(3,0,1)$, $D(2,1,2)$. Obliczyć odległość środków odcinków AB i CD.

3. Na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ dane są punkty $A(1,2)$ i $B(2,1)$. Naszkicuj wektory $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ oraz $\overline{OA}+\overline{OB}$, $\overline{OB}-\overline{OA}$ i $\overline{AB}$.

4. Dane są punkty $A(-2,1)$ i $B(2,3)$. Naszkicuj rzut wektora $\overline{AB}$ na oś $O\mathbf{x}$ oraz rzut wektora $\overline{BA}$ na oś $O\mathbf{y}$.

5. Dane są punkty $A(2,3)$, $B(2,4)$, $C(1,2)$. Naszkicuj:

   a) wektory $\mathbf{a} = \overline{AB}$, $\mathbf{b} = \overline{AC}$ i $\mathbf{c} = \overline{BC}$,

   b) kąty skierowane $\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\sphericalangle(\mathbf{b},\mathbf{a})$ i $\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{c})$.

6. Dla jakich $x_0, y_0, z_0 \in R$ punkt $P\big(x_0, y_0, z_0\big)$ leży:

   a) na jednej z płaszczyzn układu współrzędnych $O\mathbf{xyz}$,

   b) na jednej z osi współrzędnych.

7. Wyznaczyć $\cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, jeżeli:

   a) $\mathbf{a} = (8, 4, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, -1)$,

   b) $\mathbf{a} = (3, 0, 4)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$,

   c) $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$.

8. Znaleźć cosinusy kierunkowe wektora $\overline{OA}$, jeżeli $O(0, 0, 0)$, $A(2, 1, 3)$.

9. Wyznaczyć cosinusy kierunkowe wektora wodzącego punktu $A(-2, 1, 2)$.

10. Wyznaczyć iloczyn skalarny wektorów $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, gdzie $A(2, 1, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-1, 2, 3)$ i $D(1, 2, 3)$.

11. Dane są wektory: $\mathbf{a} = (5, -3, 4)$, $\mathbf{b} = (2, 1, -2)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 2)$. Obliczyć:

    a) $\mathbf{ab}$,

    b) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$,

    c) $\big(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\big) \times \mathbf{c}$,

    d) $\big(\mathbf{bac}\big)$,

    e) $\mathbf{a}\big(\mathbf{bc}\big)$,

    f) $|\mathbf{c} \times \mathbf{a}|$,

    g) $|\mathbf{c} \times \mathbf{a}| \times \mathbf{b}$.

12. Dane są wektory: $\mathbf{a} = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 3, 5)$ i $\mathbf{c} = (1, -1, 2)$. Obliczyć:

    a) $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$,

    b) $\mathbf{a} \times \big(5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}\big)$,

    c) $\mathbf{a}\big(2\mathbf{a} + 4\mathbf{c}\big)$,

    d) $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \big(\mathbf{ba}\big)\big(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\big)$,

    e) $\big(2\mathbf{a}\big) \times \big(\mathbf{a} \times \mathbf{c}\big)$,

    f) $|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}| \sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,

    g) $|\mathbf{a}|\ |\mathbf{c}| \cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{c})$,

    h) $|3\mathbf{a} - 4\mathbf{b}| \sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

BG AGH

13. Dane są punkty: $A(1,2,4)$, $B(5,1,2)$ i $C(3,4,1)$. Wyznaczyć współrzędne iloczynu wektorowego $\overline{AB} \times \overline{AC}$.

14. Dla wektorów $\mathbf{a} = \big(a_x, b_x\big)$, $\mathbf{b} = \big(b_x, b_y\big)$ dane są: $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\sphericalangle\big(\mathbf{a}, \mathbf{b}\big) = {}^2\!/_3\,\pi$. Obliczyć:

    a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$,

    b) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

15. Sprawdzić, czy trójkąt ABC o wierzchołkach $A(3,2)$, $B(6,5)$ i $C(1,10)$ jest prostokątny.

16. Dany jest trójkąt o wierzchołkach: $P_1(2,-1,1)$, $P_2(0,1,-3)$, $P_3(2,1,2)$. Obliczyć:

    a) obwód i pole tego trójkąta,

    b) wysokość poprowadzoną z wierzchołka P_2.

17. Na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ punkty $A(4,0)$, $B(3,3)$, $C(0,2)$ i $D(2,-1)$ są wierzchołkami czworokąta. Obliczyć pole tego czworokąta.

18. Na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ punkt $C(1,1)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A(x,5)$, $B(-2,y)$. Obliczyć: x i y.

19. Punkty $A(6,3,7)$, $B(2,3,1)$, $C(-5,-4,8)$ i $D(4,1,-2)$ są wierzchołkami czworościanu. Obliczyć:

    a) objętość tego czworościanu,

    b) wysokość h opuszczoną z wierzchołka C.

20. Na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ znaleźć:

    a) współrzędne biegunowe $\big(r, \varphi\big)$ punktu o współrzędnych prostokątnych $(-3,4)$,

    b) współrzędne prostokątne punktu o współrzędnych biegunowych $\big(r, \varphi\big) = \big(4, {}^1\!/_6\,\pi\big)$.

21. Udowodnić, że dla dowolnych wektorów:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (p_x, p_y, p_z), \\ \mathbf{a} &= (a_x, a_y, a_z), \\ \mathbf{b} &= (b_x, b_y, b_z), \\ \mathbf{c} &= (c_x, c_y, c_z), \end{aligned}$$

wektory $\mathbf{p} \times \mathbf{a}$, $\mathbf{p} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{p} \times \mathbf{c}$ są liniowo zależne.

BG AGH

7.3. Geometria analityczna na płaszczyźnie

7.3.1. Wiadomości ogólne o równaniach linii

W podręcznikach ze szkoły średniej zależność między zmiennymi x i y, postaci

$$y = ax + b \tag{7.15}$$

nazywa się równaniem prostej, gdzie a, b — stałe, niezależne od x i y.

Zapis

równanie (7.15) *jest równaniem prostej* p

oznacza, że:

1) współrzędne $\big(x, y\big)$ dowolnego punktu prostej p spełniają równanie (7.15),
2) każda uporządkowana para $\big(x, y\big)$, która spełnia równanie (7.15) reprezentuje punkt leżący na prostej p.

W ogólnym przypadku zależność

$$y = f(x) \qquad \text{lub} \qquad F(x, y) = 0,$$

gdzie $f(x)$ lub $F(x, y)$ są funkcjami ciągłymi, jest równaniem pewnej linii (krzywej), np. prostej, okręgu.

Przykład
Zależność

$$y = 3x + 2$$

jest równaniem prostej przechodzącej przez punkty $(0, 2)$, $(1, 5)$.
Natomiast zależność

$$x^2 + y^2 = 4$$

jest równaniem okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu $r = 2$. Na tym okręgu leżą wszystkie punkty o współrzędnych (x, y), które spełniają zależność (równanie) $x^2 + y^2 = 4$.

Dwa różne równania mogą przedstawiać tę samą linię. Na przykład równania $y = 2x$ i $2y - 4x = 0$ przedstawiają tę samą prostą.

7.3.2. Równania parametryczne linii

Ze szkoły średniej wiemy już, że dwa równania

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases} \tag{7.16}$$

gdzie $t \in R$, opisują prostą przechodzącą przez punkt $P_0\big(x_0, y_0\big)$ i równoległą do wektora $\mathbf{v} = \big(\alpha, \beta\big)$. Mówimy, że (7.16) są równaniami parametrycznymi prostej.

Rozważamy przypadek ogólny. Niech $g(t)$ i $h(t)$ będą funkcjami określonymi i ciągłymi zmiennej $t \in \big(\alpha, \beta\big)$.

Weźmy pod uwagę równania

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}, \qquad t \in \big(\alpha, \beta\big) \tag{7.17}$$

Dla każdego $t \in \big(\alpha, \beta\big)$ funkcje $g(t)$, $h(t)$ określają punkt $\big(x, y\big) = \big(g(t), h(t)\big)$ leżący na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$. Mówimy, że równania (7.17) są równaniami parametrycznymi linii l. Oznacza to, że:

1) dla dowolnego punktu $P\big(x_0, y_0\big)$ leżącego na linii l istnieje $t_0 \in \big(\alpha, \beta\big)$ takie, że

$$\begin{cases} x_0 = g(t_0) \\ y_0 = h(t_0) \end{cases}$$

oraz

2) dla każdego $t \in \big(\alpha, \beta\big)$ punkt o współrzędnych $\big(x, y\big) = \big(g(t), h(t)\big)$ leży na linii l.

Przykład

Weźmy pod uwagę równania

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \qquad t \in \big\langle 0, 2\pi\big) \tag{7.18}$$

gdzie r — ustalona stała dodatnia, np. $r = 5$.

Linia opisana tymi równaniami jest okręgiem o promieniu $r > 0$ i środku w początku układu współrzędnych. Odległość d punktu $\big(x, y\big) = \big(r\cos t, r\sin t\big)$ od punktu $(0, 0)$ wynosi

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} = r,$$

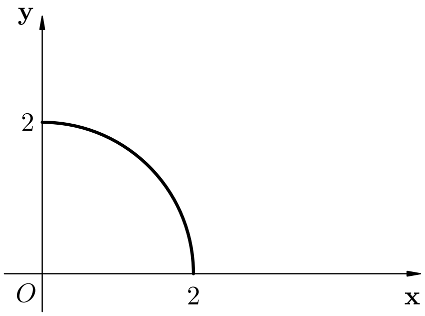
dla dowolnego $t \in \big\langle 0, 2\pi\big)$.

Przykład

Równania

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \qquad t \in \Big\langle 0, \frac{\pi}{2}\Big\rangle \tag{7.19}$$

opisują łuk okręgu przedstawionego na rysunku 7.25.



Rys. 7.25. Łuk okręgu opisany równaniami (7.19)

7.3.3. Punkty wspólne dwóch linii

Rozważmy dwie linie (krzywe) l_1 i l_2 o równaniach:

$$l_1: \quad y = f_1(x) \tag{7.20}$$

$$l_2: \quad y = f_2(x) \tag{7.21}$$

Punkt o współrzędnych (x_0, y_0) jest punktem wspólnym linii l_1 i l_2 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$y_0 = f_1(x_0) \qquad \text{i} \qquad y_0 = f_2(x_0).$$

Przykład

Weźmy pod uwagę proste l_1 i l_2 o równaniach:

$$l_1: \quad y = 2x + 6,$$
$$l_2: \quad y = -3x + 1.$$

Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 4)$ spełnia równocześnie równania prostych l_1 i l_2. Zatem jest punktem wspólnym tych prostych — punktem przecięcia się prostych.

Punkt $(x_0, y_0) = (-1, 4)$ jest rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -3x + 1 \end{cases}.$$

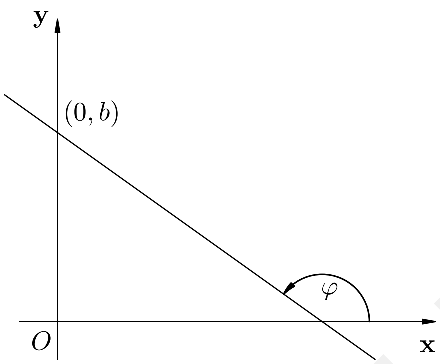
7.3.4. Równanie kierunkowe prostej na płaszczyźnie

Równanie postaci

$$y = mx + b \tag{7.22}$$

gdzie: m, b — stałe, nazywamy równaniem kierunkowym prostej.

W interpretacji geometrycznej punkt $(0, b)$ jest punktem przecięcia się rozważanej prostej z osią $O\mathbf{y}$, natomiast $m = \operatorname{tg}\varphi$, gdzie φ jest kątem nachylenia tej prostej do osi $O\mathbf{x}$ (rys. 7.26).



Rys. 7.26. Prosta o równaniu $y = mx + b$, gdzie $m = \operatorname{tg}\varphi$

Liczbę m nazywamy współczynnikiem kierunkowym prostej (7.22). Łatwo zauważyć, że $m > 0$ dla $0 < \varphi < {}^1\!/_2\,\pi$ oraz $m < 0$ dla ${}^1\!/_2\,\pi < \varphi < \pi$. Dla $m = 0$ prosta ma równanie $y = b$ i jest równoległa do osi $O\mathbf{x}$.

Dowodzi się, że dowolna prosta nierównoległa do osi $O\mathbf{y}$ ma równanie postaci (7.22). Natomiast prosta równoległa do osi $O\mathbf{y}$, przecinająca oś $O\mathbf{x}$ w punkcie $(a, 0)$, ma równanie

$$x = a.$$

7.3.5. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty

Na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ weźmy pod uwagę dwa punkty $A\big(x_1, y_1\big)$ i $B\big(x_2, y_2\big)$, gdzie $x_1 \neq x_2$.

Prosta przechodząca przez punkty A i B ma następujące równanie

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\big(x - x_1\big) \tag{7.23}$$

Łatwo sprawdzić, że punkty $\big(x_1, y_1\big)$, $\big(x_2, y_2\big)$ spełniają równanie (7.23).

Oprócz tego widać, że równanie (7.23) jest równaniem kierunkowym prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych $\big(x_1, y_1\big)$, $\big(x_2, y_2\big)$ dla $x_1 \neq x_2$.

Przykład

Napiszemy równanie prostej przechodzącej przez punkty: $A(3, 5)$, $B(6, 2)$. Dla tych punktów równanie (7.23) ma postać:

$$y - 5 = \frac{2 - 5}{6 - 3}(x - 3),$$

$$y - 5 = -1(x - 3),$$
$$y = -x + 8.$$

Ostatnia zależność jest równaniem kierunkowym prostej przechodzącej przez punkt $A(3, 5)$ i $B(6, 2)$.

7.3.6. Równanie ogólne prostej na płaszczyźnie

Równanie postaci

$$Ax + By + C = 0 \tag{7.24}$$

gdzie: A, B, $C \in R$, $A^2 + B^2 > 0$, nazywamy równaniem ogólnym prostej. Dowodzi się, że każdą prostą na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ można opisać równaniem (7.24).

Jeżeli $C = 0$, to prosta o równaniu (7.24) przechodzi przez początek układu współrzędnych — punkt $(0, 0)$ spełnia równanie tej prostej.

Jeżeli $A = 0$, to prosta (7.24) jest równoległa do osi $O\mathbf{x}$ Jeżeli $B = 0$, to prosta (7.24) jest równoległa do osi $O\mathbf{y}$.

Jeżeli $A \neq 0$, $B \neq 0$ i $C \neq 0$, to równanie (7.24) możemy zapisać w postaci

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{7.25}$$

gdzie:

$$a = -\frac{C}{A},$$
$$b = -\frac{C}{B}.$$

Równanie (7.25) nazywamy równaniem odcinkowym prostej.

Prosta o równaniu odcinkowym $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ przecina oś $O\mathbf{x}$ w punkcie $(a, 0)$ i oś $O\mathbf{y}$ w punkcie $(0, b)$.

Przykład

Prostą o równaniu ogólnym

$$5x + 2y - 10 = 0$$

możemy zapisać w postaci równania kierunkowego

$$y = -\frac{5}{2}x + 5$$

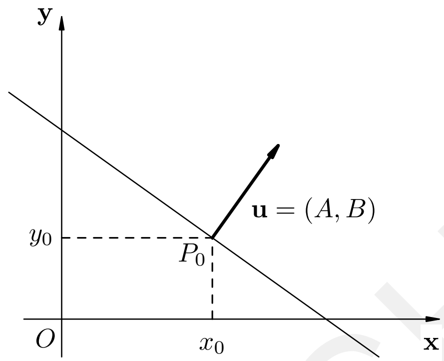
lub w postaci równania odcinkowego

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1.$$

W równaniu ogólnym prostej

$$Ax + By + C = 0$$

wektor $\mathbf{u} = (A, B)$ jest prostopadły do tej prostej. Ta geometryczna interpretacja parametrów A i B jest ważna i często wykorzystywana w zadaniach.



Rys. 7.27. Prosta przechodząca przez punkt $P_0(x_0, y_0)$ i prostopadła do wektora $\mathbf{u} = (A, B)$

Prosta przechodząca przez punkt $P_0(x_0, y_0)$ i prostopadła do niezerowego wektora $\mathbf{u} = (A, B)$ (ilustruje ro rysunek 7.27) ma następujące równanie

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{7.26}$$

Równanie (7.26) również nazywamy równaniem ogólnym prostej.

Przykład

Napisać równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty $P(6, 3)$ i $Q(2, 4)$. Innymi słowy, mamy wyznaczyć takie A, B, $C \in R$, $A^2 + B^2 > 0$, aby punkty $P(6, 3)$, $Q(2, 4)$ spełniały równanie

$$Ax + By + C = 0 \tag{7.27}$$

Po wstawieniu współrzędnych punktów P i Q do równania (7.27) otrzymamy

$$\begin{cases} 6A + 3B + C = 0 \\ 2A + 4B + C = 0 \end{cases}.$$

Jest to układ dwóch równań liniowych o trzech niewiadomych: A, B i C. Taki układ równań może mieć nieskończenie wiele rozwiązań. Jedną z niewiadomych, np. C, możemy dobrać w sposób dowolny, a pozostałe niewiadome wyznaczyć. Jednak musi być spełniony warunek $A^2 + B^2 > 0$.

W tym przykładzie, dla $C = 1$, otrzymamy

$$A = -\frac{1}{18}, \qquad B = -\frac{2}{9}.$$

BG AGH

Czyli prosta przechodząca przez punkty $P(6,3)$ i $Q(2,4)$ ma następujące równanie w postaci ogólnej

$$-\frac{1}{18}x - \frac{2}{9}y + 1 = 0.$$

Równanie to możemy również zapisać w postaci

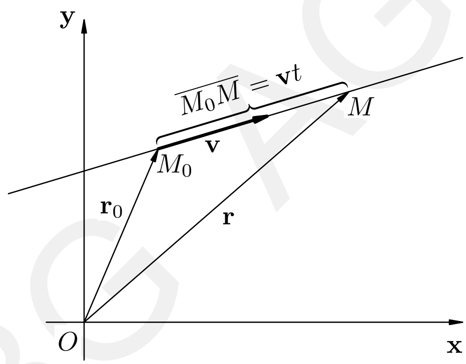
$$x + 4y - 18 = 0.$$

Z tego przykładu widać, że dana prosta może mieć nieskończenie wiele równań w postaci ogólnej.

7.3.7. Równanie wektorowe i parametryczne prostej na płaszczyźnie

Na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ weźmy pod uwagę punkt $M_0\big(x_0, y_0\big)$ i wektor $\mathbf{v} = \big(\alpha, \beta\big)$, przy czym zakładamy, że $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Chcemy napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt M_0 i równoległej do wektora $\mathbf{v}$ (rys. 7.28).



Rys. 7.28. Prosta przechodząca przez punkt M_0 i równoległa do wektora $\mathbf{v}$

Równanie to zapiszemy w postaci zależności między wektorami. Niech $\mathbf{r}_0$ będzie wektorem wodzącym punktu M_0, $\mathbf{r}_0 = \overline{OM_0}$, natomiast $\mathbf{r}$ niech będzie wektorem wodzącym dowolnego punktu $M\big(x, y\big)$ na szukanej prostej, $\mathbf{r} = \overline{OM}$. Wektor $\overline{M_0M}$ możemy napisać w postaci $\overline{M_0M} = \mathbf{v} \cdot t$, gdzie $t \in R$.

Widać, że punkt M leży na prostej przechodzącej przez punkt M_0 i równoległej do wektora $\mathbf{v}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t \tag{7.28}$$

Zależność (7.28) nazywamy równaniem wektorowym prostej przechodzącej przez punkt M_0, o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_0$, i równoległej do wektora $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. W równaniu tym $\mathbf{r}$ jest wektorem wodzącym dowolnego punktu M, punktu bieżącego na tej prostej, a $t \in R$. Wartości parametru $t \in R$ wyznaczają punkty na prostej.

BG AGH

Przy oznaczeniach:

$$\mathbf{r}_0 = \big(x_0, y_0\big),$$
$$\mathbf{v} = \big(\alpha, \beta\big),$$
$$\mathbf{r} = \big(x, y\big),$$

równanie (7.28) możemy zapisać w postaci

$$\big(x, y\big) = \big(x_0, y_0\big) + \big(\alpha, \beta\big)t.$$

Stąd, po rozpisaniu na współrzędne, otrzymamy

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \qquad t \in R \tag{7.29}$$

Mówimy, że (7.29) są równaniami parametrycznymi prostej przechodzącej przez punkt $\big(x_0, y_0\big)$ i równoległej do wektora $\big(\alpha, \beta\big) \neq (0, 0)$. Liczby α i β, współrzędne wektora $\mathbf{v}$, nazywamy współczynnikami kierunkowymi prostej zapisanej w postaci parametrycznej.

Prosta przechodząca przez punkty $P\big(x_1, y_1\big)$ i $Q\big(x_2, y_2\big)$ ma następujące równania parametryczne

$$\begin{cases} x = x_1 + \big(x_2 - x_1\big)t \\ y = y_1 + \big(y_2 - y_1\big)t \end{cases}, \qquad t \in R.$$

Przykład

Równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P(2, 3)$ i równoległej do wektora $\mathbf{v} = (-4, 1)$ mają postać

$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + \ \ t \end{cases}, \qquad t \in R.$$

Przykład

Prostą o równaniu w postaci ogólnej

$$4x - 3y + 9 = 0 \tag{7.30}$$

zapisać w postaci parametrycznej.

W tym celu wyznaczymy dwa różne punkty leżące na prostej (7.30). Łatwo widać, że punkty $P(-9/4, 0)$ i $Q(0, 3)$ spełniają równanie rozważanej prostej. Zatem możemy przyjąć, że wektor $\overline{PQ} = (9/4, 3)$ jest równoległy do szukanej prostej — jako jeden z możliwych wektorów równoległych. Oprócz tego szukana prosta przechodzi przez punkt $Q(0, 3)$.

Równania parametryczne prostej (7.30) mają postać

$$\begin{cases} x = \dfrac{9}{4}t \\ y = 3 + 3t \end{cases}, \qquad t \in R.$$

Przykład

Prosta l zadana jest równaniami parametrycznymi

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}, \qquad t \in R \tag{7.31}$$

Napisać równanie ogólne tej prostej.

Z równania $x = 2 - 3t$ wyznaczamy parametr t, jako funkcję zmiennej x, a następnie tak obliczone t wstawiamy do drugiego równania parametrycznego tej prostej. Otrzymamy:

$$t = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3},$$
$$y = 1 + 4\left(-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right),$$

czyli

$$4x + 3y - 11 = 0. \tag{7.32}$$

Ostatnia zależność jest równaniem ogólnym prostej o równaniach parametrycznych (7.31). Oznacza to, że dla każdego punktu (x_0, y_0) spełniającego równanie (7.32) istnieje $t_0 \in R$ takie, że

$$\begin{cases} x_0 = 2 - 3t_0 \\ y_0 = 1 + 4t_0 \end{cases}.$$

Z drugiej strony, łatwo widać, że $x = 2 - 3t$, $y = 1 + 4t$ spełniają równanie (7.32) dla każdego $t \in R$.

7.3.8. Odległość punktu od prostej na płaszczyźnie

Na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ (rys. 7.29) weźmy pod uwagę prostą p o równaniu w postaci ogólnej

$$Ax + By + C = 0$$

i punkt $M(x_0, y_0)$.

Odległość punktu $M(x_0, y_0)$ od prostej p jest długością odcinka MM', gdzie M' jest rzutem punktu M na prostą p.

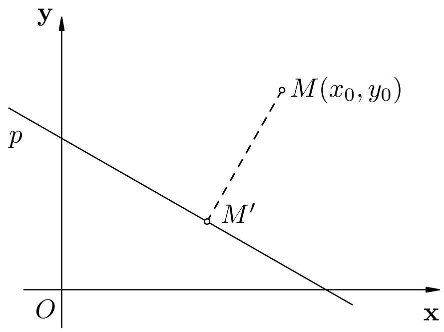
Dowodzi się, że prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 7.10. *Odległość d punktu $M(x_0, y_0)$ od prostej p o równaniu*

$$Ax + Bx + C = 0$$

wyraża się wzorem

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{7.33}$$



Rys. 7.29. Ilustracja odległości punktu M od prostej p

BG AGH

Przykład

Obliczyć odległość początku układu współrzędnych $O\mathbf{xy}$ od prostej

$$3x + 4y - 2 = 0.$$

W tym przykładzie mamy $M(0,0)$ i ze wzoru (7.33) otrzymamy

$$d = \frac{|-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{2}{5}.$$

7.3.9. Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie

Rozważmy proste l_1 i l_2 o równaniach w postaci ogólnej:

$$\begin{aligned} l_1 &: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ l_2 &: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned}$$

Proste l_1 i l_2 mogą:

– być do siebie prostopadłe ($l_1 \perp l_2$),
– być równoległe ($l_1 \parallel l_2$),
– pokrywać się (są identyczne),
– przecinać się w jednym punkcie, w szczególności pod kątem prostym.

Kątem nachylenia prostych l_1 i l_2 nazywamy kąt, nie większy od kąta prostego, o ramionach równoległych do tych prostych.

Dowodzi się, że jeżeli proste zadane są równaniami:

$$\begin{aligned} l_1 &: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ l_2 &: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{aligned}$$

to:

1) proste l_1 i l_2 są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$,
2) proste l_1 i l_2 są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$,
3) mają dokładnie jeden punkt przecięcia wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$,
4) cosinus kąta nachylenia tych prostych wyraża się wzorem

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \tag{7.34}$$

Przykład

Zbadać, czy punkty $A(2,4)$, $B(5,6)$ i $C(1,2)$ leżą na jednej prostej.

Najpierw napiszemy równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B, a następnie sprawdzimy, czy punkt C leży na tej prostej. Prosta przechodząca przez punkty A i B, na podstawie wzoru (7.23), ma następujące równanie

$$y - 4 = \frac{6-4}{5-2}(x-2),$$

a po przekształceniach

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Widać, że punkt $C(1,2)$ nie leży na prostej $y = {}^2\!/_3\,x + {}^8\!/_3$, gdyż $2 \neq {}^2\!/_3 + {}^8\!/_3$. Zatem punkty $A(2,4)$, $B(5,6)$, $C(1,2)$ nie leżą na jednej prostej.

Przykład

Wyznaczyć kąt nachylenia prostych

$$3x + y - 3 = 0 \qquad \text{i} \qquad 6x + 12y - 11 = 0.$$

Skorzystamy z zależności (7.34) i otrzymamy

$$\cos\alpha = \frac{|18 + 12|}{\sqrt{9+1}\,\sqrt{36+144}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Stąd rozważane proste tworzą kąt ostry, $\alpha = {}^1\!/_4\,\pi$.

Przykład

Obliczyć odległość między prostymi

$$3x + 4y + 25 = 0 \qquad \text{i} \qquad 6x - 8y + 45 = 0.$$

Z warunku równoległości prostych ($A_1B_2 - A_2B_1 = 0$), w tym przykładzie $-24 - (-24) = 0$, wynika, że rozważane proste są równoległe.

Odległość między prostymi równoległymi, to odległość dowolnego punktu na jednej prostej od drugiej prostej.

Łatwo zauważyć, że punkt $M(-7,1)$ leży na prostej o równaniu $3x-4y+25=0$. Odległość punktu M od prostej $6x-8y+45=0$, na podstawie (7.33), obliczymy z zależności

$$d=\frac{|6(-7)-8(1)+45|}{\sqrt{36+64}}=\frac{1}{2}.$$

Zatem odległość między prostymi $3x-4y+25=0$ i $6x-8y+45=0$, $d={}^1\!/_2$.

Przykład

Przez punkt przecięcia prostych $4x+7y-15=0$ i $9x-14y-4=0$ poprowadzić prostą prostopadłą do prostej $9x-14y-4=0$.

Wyznaczymy najpierw punkt przecięcia się pierwszych dwóch prostych. Współrzędne punktu przecięcia się tych prostych będą rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} 4x+\ \ 7y-15=0 \\ 9x-14y-\ \ 4=0 \end{cases}.$$

Łatwo obliczyć, że uporządkowana para $\big(x_0,y_0\big)=(2,1)$ spełnia ten układ równań. Stąd wniosek, że proste $4x+7y-15=0$ i $9x-14y-4=0$ przecinają się w punkcie o współrzędnych $(2,1)$.

Wektor $\big(A_1,B_1\big)=(9,-14)$ jest prostopadły do prostej $9x-14y-4=0$. Natomiast wektor $(14,9)$ jest prostopadły do wektora $\big(A_1,B_1\big)=(9,-14)$, gdyż $(9,-14)\cdot(14,9)=0$ — warunek prostopadłości wektorów.

Zatem wektor $(14,9)$ jest prostopadły do szukanej prostej. Wiadomo, że prosta przechodząca przez punkt $\big(x_0,y_0\big)$ i prostopadła do wektora (A,B) ma następujące równanie w postaci ogólnej

$$A\big(x-x_0\big)+B\big(y-y_0\big)=0.$$

W naszym przypadku mamy $A=14$, $B=9$, $x_0=2$, $y_0=1$, czyli szukana prosta ma równanie

$$14(x-2)+9(y-1)=0,$$

a po przekształceniach

$$14x+9y-37=0.$$

Zadania

1. Wyznaczyć równanie prostej, która przechodzi przez punkty A i B:
   a) $A(1,0)$, $B(-7,1)$,
   b) $A(0,-1)$, $B(7,-1)$,
   c) $A(3,5)$, $B(2,1)$.

2. Napisać równania parametryczne prostej $3x + 2y - 3 = 0$.
3. Napisać równanie wektorowe prostej przechodzącej przez punkty $A(1, 0)$, $B(-6, 1)$.
4. Napisać równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $A(2, -1)$ i równoległej do prostej $2x - y + 1 = 0$.
5. Znaleźć wektor równoległy do prostej $3x - 2y + 6 = 0$.
6. Znaleźć wektor prostopadły do prostej $3y + 2 = 0$.
7. Obliczyć pole trójkąta ograniczonego osiami współrzędnych układu $O\mathbf{xy}$ i prostą $4x - 3y + 5 = 0$.
8. Obliczyć odległość punktu $P(1, 3)$ od środka odcinka AB, gdzie $A(4, 7)$, $B(-2, -3)$.
9. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $O(0, 0)$ oraz:
   a) równoległej do prostej $y = x + 1$,
   b) prostopadłej do prostej $y = {}^1\!/\!_3\, x + 10$,
   c) tworzącej kąt ${}^1\!/\!_4\, \pi$ z prostą $y = 2x + 8$.
10. Sprawdzić, czy punkty $A(2, 4)$, $B(6, 8)$ i $C(11, 13)$ leżą na jednej prostej.
11. Wyznaczyć odległość początku układu współrzędnych $O\mathbf{xy}$ od prostej

    $3x + 5y - 7 = 0$.
12. Obliczyć odległość punktu $P(-3, 2)$ od prostej $4x - 7y + 10 = 0$.
13. Sprawdzić, czy punkty $(-4, 1)$, $(0, 0)$ leżą po tej samej stronie prostej

    $3x - 2y + 5 = 0$.
14. Znaleźć odległość między prostymi: $12x - 5y - 78 = 0$, $12x - 5y - 52 = 0$.
15. Wyznaczyć kąt między prostymi: $y = 4x + 5$, $y = -2x + 10$.
16. Na płaszczyźnie $O\mathbf{xy}$ dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach: $A(1, 2)$, $B(0, 5)$ i $C(-2, 2)$. Wyznaczyć punkt przecięcia się środkowych tego trójkąta.
17. Punkty A, B, C i D są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Obliczyć współrzędne wierzchołka $D\big(x_0, y_0\big)$ jeżeli wiadomo, że $A(4, 3)$, $B(1, 1)$ i $C(6, -5)$.
18. Wyznaczyć współrzędne $\big(x_0, y_0\big)$ środka ciężkości trójkąta o wierzchołkach: $A(0, 0)$, $B(7, 0)$ i $C(4, 4)$.
19. Obliczyć współrzędne środka ciężkości trójkąta ABC wykonywanego z blachy jednorodnej, jeżeli $A(1, 1)$, $B(2, -2)$ i $C(5, -1)$.

7.4. Geometria analityczna w przestrzeni

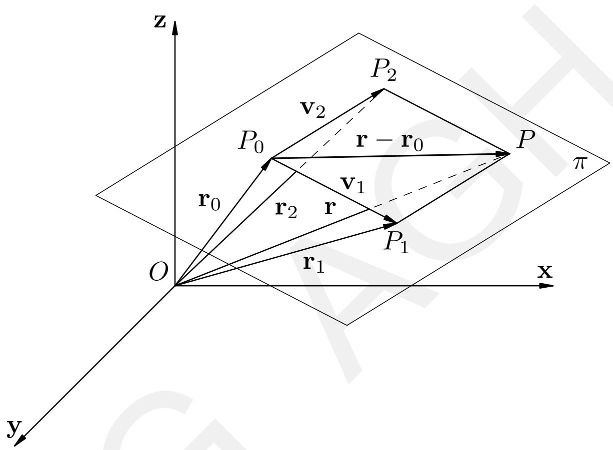
7.4.1. Równania płaszczyzny w przestrzeni

W układzie współrzędnych $O\mathbf{xyz}$ rozważmy punkty P_0, P_1 i P_2 o wektorach wodzących, odpowiednio, $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ (rys. 7.30).

Zakładamy, że punkty P_0, P_1 i P_2 nie leżą na jednej prostej, a zatem wyznaczają płaszczyznę π. Chcemy napisać równanie tej płaszczyzny. Przyjmujemy oznaczenia

$$\mathbf{v}_1 = \overline{P_0P_1}, \qquad \mathbf{v}_2 = \overline{P_0P_2}, \qquad \mathbf{r} = \overline{OP}.$$

Weźmy pod uwagę wektor $\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$, gdzie $\times$ — oznacza iloczyn wektorowy wektorów.



Rys. 7.30. Płaszczyzna przechodząca przez punkty P_0, P_1 i P_2

Punkt P, o wektorze wodzącym $\mathbf{r}$, leży na płaszczyźnie π, wyznaczonej przez P_0, P_1 i P_2, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{V}\big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\big) = 0 \tag{7.35}$$

Ostatnia zależność oznacza, że wektory $\mathbf{V}$ i $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ są do siebie prostopadłe.

Zależność

$$\mathbf{V}\big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\big) = 0 \tag{7.36}$$

nazywamy równaniem wektorowym płaszczyzny przechodzącej przez punkt P_0, o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_0$, i prostopadłej do wektora $\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$. W równaniu tym $\mathbf{r}$ jest wektorem wodzącym dowolnego punktu P leżącego na płaszczyźnie π.

Przyjmujemy oznaczenia:

$$\mathbf{V} = \big(A, B, C\big),$$

$$\mathbf{r}_0 = \big(x_0, y_0, z_0\big),$$
$$\mathbf{r} = \big(x, y, z\big).$$

Wówczas równanie (7.36) możemy napisać w postaci:

$$\big(A, B, C\big)\Big(\big(x, y, z\big) - \big(x_0, y_0, z_0\big)\Big) = 0,$$
$$\big(A, B, C\big)\big(x - x_0, y - y_0, z - z_0\big) = 0,$$
$$A\big(x - x_0\big) + B\big(y - y_0\big) + C\big(z - z_0\big) = 0 \tag{7.37}$$

Ostatnie równanie nazywamy równaniem ogólnym płaszczyzny.

W równaniu

$$A\big(x - x_0\big) + B\big(y - y_0\big) + C\big(z - z_0\big) = 0,$$

$\big(A, B, C\big)$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny, $\big(x_0, y_0, z_0\big)$ jest punktem, przez który ta płaszczyzna przechodzi, a $\big(x, y, z\big)$ jest dowolnym punktem leżącym na tej płaszczyźnie.

Równanie (7.37) możemy zapisać w postaci

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{7.38}$$

gdzie $D = -\big(Ax_0 + By_0 + Cz_0\big)$, które również nazywamy równaniem ogólnym płaszczyzny.

W przypadku gdy $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ i $D \neq 0$ równaniu (7.38) możemy nadać postać

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{7.39}$$

gdzie:

$$a = -\frac{D}{A}, \qquad b = -\frac{D}{B}, \qquad c = -\frac{D}{C},$$

które nazywamy równaniem odcinkowym płaszczyzny. W równaniu tym parametry a, b, c mają prostą interpretację geometryczną. Mianowicie, punkty o współrzędnych

$$\big(a, 0, 0\big), \qquad \big(0, b, 0\big), \qquad \big(0, 0, c\big)$$

są punktami przecięcia się płaszczyzny z osiami współrzędnych, odpowiednio, $O\mathbf{x}$, $O\mathbf{y}$ i $O\mathbf{z}$.

Weźmy pod uwagę trzy punkty nie leżące na jednej prostej

$$P_0\big(x_1, y_1, z_1\big), \qquad P_1\big(x_2, y_2, z_2\big), \qquad P_2\big(x_3, y_3, z_3\big).$$

Punkty te wyznaczają płaszczyznę. Dowodzi się, że płaszczyzna ta jest opisana równaniem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7.40}$$

BG AGH

lub równaniem

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Przykład

Napisać równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy punkty

$$P_0(2,0,0), \qquad P_1(0,2,0), \qquad P_2(0,0,3).$$

Równanie tej płaszczyzny napiszemy w trzech postaciach: odcinkowej, ogólnej i przy wykorzystaniu zależności (7.40).

I. Równanie odcinkowe. Z interpretacji geometrycznej parametrów a, b, c w równaniu (7.39) widać, że płaszczyzna π ma następujące równanie odcinkowe

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

II. Równanie ogólne. Wektor

$$\mathbf{V} = \overline{P_0P_1} \times \overline{P_0P_2} = (-2,2,0) \times (-2,0,3) = (6,6,4)$$

jest wektorem prostopadłym do poszukiwanej płaszczyzny. Oprócz tego płaszczyzna ta przechodzi przez punkt $P_0(2,0,0)$. Stąd i z interpretacji parametrów w równaniu (7.37) otrzymujemy, że

$$6(x-2) + 6(y-0) + 4(z-0) = 0$$

jest równaniem ogólnym płaszczyzny przechodzącej przez punkty P_0, P_1 i P_2.

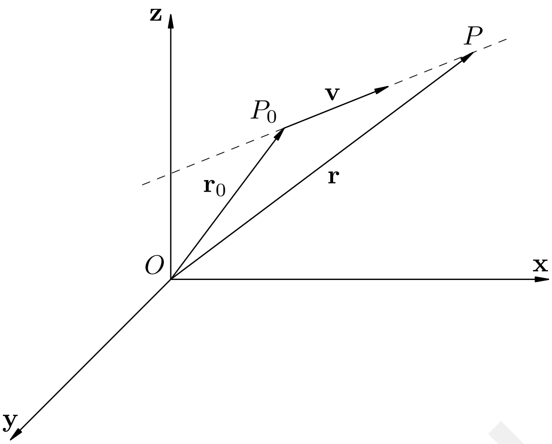
III. Równanie w postaci (7.40). Dla punktów $P_0(2,0,0)$, $P_1(0,2,0)$ i $P_2(0,0,3)$ równanie (7.40) przyjmuje postać

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozwinięciu tego wyznacznika względem pierwszego wiersza otrzymamy następujące równanie

$$6x + 6y + 4z - 12 = 0.$$

BG AGH



Rys. 7.31. Prosta przechodząca przez punkt P_0 i równoległa do wektora $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

7.4.2. Równania prostej w przestrzeni

W układzie współrzędnych $O\mathbf{xyz}$ weźmy pod uwagę punkt P_0 o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_0$ oraz wektor $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$, przy czym $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ (rys. 7.31).

Napiszemy równanie prostej, która przechodzi przez punkt P_0 i jest równoległa do wektora $\mathbf{v}$.

Dowodzi się, że punkt P, o wektorze wodzącym $\mathbf{r}$, leży na poszukiwanej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t \tag{7.41}$$

gdzie t jest parametrem, $t \in R$.

Równanie (7.41) nazywa się równaniem wektorowym prostej przechodzącej przez punkt o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_0$ i równoległej do wektora $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Przyjmujemy oznaczenia:

$$\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0),$$
$$\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma),$$
$$\mathbf{r} = (x, y, z).$$

Wówczas równanie (7.41) przyjmuje postać:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (\alpha, \beta, \gamma)t,$$
$$(x, y, z) = (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t, z_0 + \gamma t),$$

lub inaczej

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, \qquad t \in R \tag{7.42}$$

BG AGH

Zależności (7.42) nazywamy równaniami parametrycznymi prostej przechodzącej przez punkt o współrzędnych $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ i równoległej do wektora $\mathbf{v} = \left(\alpha, \beta, \gamma\right)$.

Rozpatrzmy dwie nierównoległe płaszczyzny o równaniach wektorowych:

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad \mathbf{V}_1\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\right) = 0, \\ \pi_2: &\quad \mathbf{V}_2\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2\right) = 0, \end{aligned}$$

lub o równaniach w postaci ogólnej:

$$\begin{aligned} \pi_1: &\quad A_1\left(x - x_1\right) + B_1\left(y - y_1\right) + C_1\left(z - z_1\right) = 0, \\ \pi_2: &\quad A_2\left(x - x_2\right) + B_2\left(y - y_2\right) + C_2\left(z - z_2\right) = 0. \end{aligned}$$

Stąd, że płaszczyzny π_1 i π_2 nie są równoległe wynika, że $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 \neq \mathbf{0}$ oraz płaszczyzny te przecinają się wzdłuż prostej, która jest krawędzią ich przecięcia.

Układ równań

$$\begin{cases} A_1\left(x - x_1\right) + B_1\left(y - y_1\right) + C_1\left(z - z_1\right) = 0 \\ A_2\left(x - x_2\right) + B_2\left(y - y_2\right) + C_2\left(z - z_2\right) = 0 \end{cases}$$

nazywamy równaniem krawędziowym prostej, która powstaje w wyniku przecięcia się płaszczyzn π_1 i π_2.

Przykład

Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(3, 6, 8)$ i $B(2, 3, 5)$.

Wektor $\mathbf{v} = \overline{AB} = (-1, -3, -3)$ jest równoległy do prostej przechodzącej przez punkt A i B. Zatem równania parametryczne poszukiwanej prostej mają postać

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 3t \end{cases}, \qquad t \in R.$$

Przykład

Prostą

$$L: \begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 3x + y - z - 5 = 0 \end{cases}$$

napisać w postaci równań parametrycznych.

Widać, że prosta L jest krawędzią przecięcia się płaszczyzn

$$\pi_1: \quad x - 2y + 3z + 1 = 0, \qquad \pi_2: \quad 3x + y - z - 5 = 0.$$

Aby napisać równania parametryczne prostej L musimy znać punkt $\left(x_0, y_0, z_0\right)$, przez który ta prosta przechodzi oraz wektor $\mathbf{v}$ równoległy do tej prostej.

Punkt $\left(x_0, y_0, z_0\right)$jest dowolnym punktem, który jednocześnie leży na płaszczyźnie π_1 i π_2. A zatem $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ możemy wyznaczyć jako dowolne rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 3x + y - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

BG AGH

Możemy przyjąć, że np. $z_0 = 0$ i otrzymamy

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}.$$

A stąd $x_0 = {}^9\!/_7$, $y_0 = {}^8\!/_7$. Czyli $\big(x_0, y_0, z_0\big) = \big({}^9\!/_7, {}^8\!/_7, 0\big)$.

Na podstawie interpretacji geometrycznej parametrów równania płaszczyzny widać, że wektor $(1, -2, 3)$ jest prostopadły do płaszczyzny π_1, a wektor $(3, 1, -1)$ jest prostopadły do płaszczyzny π_2. Zatem wektor

$$\mathbf{v} = (1, -2, 3) \times (3, 1, -1) = (-1, 10, 7)$$

jest równoległy do krawędzi przecięcia się płaszczyzn π_1 i π_2. Stąd i z (7.42) otrzymamy następujące równania parametryczne prostej L

$$\begin{cases} x = \dfrac{9}{7} - t \\ y = \dfrac{8}{7} + 10t \\ z = 7t \end{cases}, \qquad t \in R.$$

Łatwo sprawdzić, że $x = {}^9\!/_7 - t$, $y = {}^8\!/_7 + 10t$, $z = 7t$ spełniają równania krawędziowe prostej L dla każdego $t \in R$.

Przykład

Znaleźć równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $M(-3, 1, 0)$ i prostą

$$L\colon \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in R.$$

Punkt $M(-3, 1, 0)$ nie leży na prostej L, gdyż nie istnieje takie $t \in R$, że

$$\begin{cases} -3 = 3 + 2t \\ 1 = 1 - t \\ 0 = t \end{cases}.$$

Aby napisać równanie płaszczyzny π musimy znać wektor prostopadły do tej płaszczyzny. Punkty $A(3, 1, 0)$, $B(5, 0, 1)$ leżą na prostej L. Pierwszy z tych punktów otrzymujemy dla $t = 0$, a drugi dla $t = 1$. Wektory $\overline{AM} = (-6, 0, 0)$, $\overline{BM} = (-8, 1, -1)$ są równoległe do płaszczyzny π. Zatem wektor

$$\mathbf{V} = \overline{AM} \times \overline{BM} = (-6, 0, 0) \times (-8, 1, -1) = (0, -6, -6)$$

jest prostopadły do szukanej płaszczyzny. Stąd płaszczyzna π ma następujące równanie

$$0\big(x - (-3)\big) - 6\big(y - 1\big) - 6\big(z - 0\big) = 0,$$

czyli

$$-6y - 6z + 6 = 0.$$

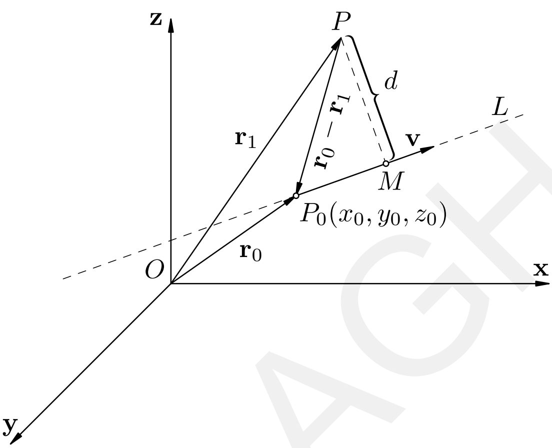
BG AGH

7.4.3. Odległość punktu od prostej lub płaszczyzny w przestrzeni

W prostokątnym układzie współrzędnych $O\mathbf{xyz}$ weźmy pod uwagę prostą o równaniach parametrycznych

$$L\colon \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, \qquad t \in R$$

oraz punkt P o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_1$ (rys. 7.32).



Rys. 7.32. Odległość d punktu P od prostej L

Odległością punktu P od prostej L jest długość odcinka $|PM| = d$, gdzie M jest rzutem prostopadłym punktu P na prostą L. Niech $\mathbf{r}_0$ będzie wektorem wodzącym punktu $P_0\big(x_0, y_0, z_0\big)$ leżącego na prostej L. Widać, że d jest wysokością równoległoboku utworzonego przez wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$, gdzie $\mathbf{v} = \big(\alpha, \beta, \gamma\big)$. Stąd, że pole równoległoboku utworzonego przez wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1$ jest równe $\big|\big(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1\big) \times \mathbf{v}\big|$ wynika, że

$$d = \frac{\big|\big(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1\big) \times \mathbf{v}\big|}{|\mathbf{v}|} \tag{7.43}$$

Podamy teraz wzór na odległość punktu od płaszczyzny. Rozważmy płaszczyznę π o równaniu

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

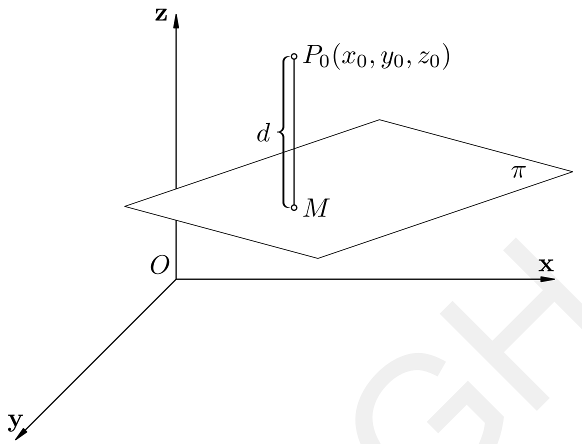
oraz punkt $P\big(x_0, y_0, z_0\big)$. Niech M będzie rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π (rys. 7.33).

Długość odcinka $|PM| = d$ jest odległością punktu P od płaszczyzny π. Dowodzi się, że odległość punktu $P\big(x_0, y_0, z_0\big)$ od płaszczyzny o równaniu

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

wyraża się wzorem

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{7.44}$$



Rys. 7.33. Odległość d punktu $P\big(x_0, y_0, z_0\big)$ od płaszczyzny π

Przykład

Obliczyć odległość punktu $M(3, 1, -1)$ od płaszczyzny o równaniu

$$4x + 5y + 2z + 10 = 0.$$

Ze wzoru (7.44) otrzymamy

$$d = \frac{|12 + 5 - 2 + 10|}{\sqrt{16 + 25 + 4}} = \frac{25}{\sqrt{45}}.$$

Przykład

Wyznaczyć odległość punktu $M(1, 2, 5)$ od prostej

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases}, \qquad t \in R.$$

Wykorzystamy wzór (7.43). W tym przykładzie mamy:

$$\mathbf{r}_0 = (0, 1, 3), \qquad \mathbf{r}_1 = (1, 2, 5), \qquad \mathbf{v} = (1, -2, 4),$$
$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 = (-1, -1, -2),$$
$$\big(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1\big) \times \mathbf{v} = (-1, -1, -2) \times (1, -2, 4) = (-8, 2, 3),$$

$$\left|(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{v}\right| = \sqrt{64+4+9} = \sqrt{77},$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}.$$

Stąd i z (7.43) otrzymamy $d = \frac{\sqrt{77}}{\sqrt{21}}$.

7.4.4. Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych w przestrzeni

Będziemy rozpatrywać wzajemne położenie dwóch prostych, dwóch płaszczyzn oraz prostej i płaszczyzny w układzie współrzędnych $O\mathbf{xyz}$. Wiemy, że dwie proste przecinają się, jeżeli mają dokładnie jeden punkt wspólny. Jeżeli dwie proste nie mają punktu wspólnego i leżą w jednej płaszczyźnie, to mówimy że są one równoległe. Natomiast proste nazywamy skośnymi jeżeli nie są równoległe i nie mają punktów wspólnych.

Dwie płaszczyzny nazywamy równoległymi jeżeli nie mają punktów wspólnych lub są identyczne. Jeżeli dwie płaszczyzny nie mają punktów wspólnych, to mówimy, że są równoległe w sensie ścisłym.

Weźmy pod uwagę prostą o równaniach parametrycznych

$$l\colon \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, \qquad t \in R \tag{7.45}$$

lub równaniu wektorowym

$$l\colon \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t, \qquad t \in R \tag{7.46}$$

gdzie:

$\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq \mathbf{0}$,

$\mathbf{r}_0$ — wektor wodzący punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Oprócz tego rozpatrzmy płaszczyznę o równaniu

$$\pi\colon \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \tag{7.47}$$

gdzie:

wektor $\mathbf{V} = (A, B, C) \neq \mathbf{0}$,

$P_1(x_1, y_1, z_1)$.

Prosta l i płaszczyzna π mogą spełniać następujące warunki:

– mieć dokładnie jeden punkt wspólny (punkt przebicia płaszczyzny π prostą l),
– mieć nieskończenie wiele punktów wspólnych (prosta l leży na płaszczyźnie π),
– nie mieć punktów wspólnych (prosta l jest ściśle równoległa do płaszczyzny π).

BG AGH

Omówimy teraz szczegółowo każdą z tych możliwości.

Jeżeli prosta l i płaszczyzna π mają dokładnie jeden punkt wspólny, to istnieje $t_0 \in R$ takie, że punkt $\big(x_0+\alpha t_0,\ y_0+\beta t_0,\ z_0+\gamma t_0\big)$ spełnia równanie płaszczyzny π, czyli:

$$A\big(x_0+\alpha t_0-x_1\big)+B\big(y_0+\beta t_0-y_1\big)+C\big(z_0+\gamma t_0-z_1\big)=0,$$

$$t_0\big(A\alpha+B\beta+C\gamma\big)=A\big(x_1-x_0\big)+B\big(y_1-y_0\big)+C\big(z_1-z_0\big) \tag{7.48}$$

$$t_0=\frac{A\big(x_1-x_0\big)+B\big(y_1-y_0\big)+C\big(z_1-z_0\big)}{A\alpha+B\beta+C\gamma}=\frac{\mathbf{V}\big(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0\big)}{\mathbf{V}\mathbf{v}} \tag{7.49}$$

gdzie:

$\mathbf{r}_1$ — wektor wodzący punktu P_1,
$\mathbf{r}_0$ — wektor wodzący punktu P_0.

Jeżeli prosta l i płaszczyzna π mają nieskończenie wiele punktów wspólnych, to punkt $\big(x_0+\alpha t,\ y_0+\beta t,\ z_0+\gamma t\big)$ spełnia równanie płaszczyzny π dla każdego $t \in R$, czyli

$$A\big(x_0+\alpha t-x_1\big)+B\big(y_0+\beta t-y_1\big)+C\big(z_0+\gamma t-z_1\big)=0$$

dla każdego $t \in R$. To zaś oznacza, że

$$\mathbf{V}\mathbf{v}=0 \qquad \text{i} \qquad \mathbf{V}\big(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0\big)=0.$$

Jeżeli prosta l i płaszczyzna π nie mają punktów wspólnych, to znaczy, że nie istnieje $t_0 \in R$ takie, że punkt $\big(x_0+\alpha t_0,\ y_0+\beta t_0,\ z_0+\gamma t_0\big)$ spełnia równanie płaszczyzny π.

Przykład

Wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia się prostej

$$l\colon \begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \\ z=1+t \end{cases}, \qquad t\in R$$

z płaszczyzną $\pi\colon 3x+5y+z+2=0$.

Szukamy takiego $t \in R$, aby punkt $\big(12+4t,\ 9+3t,\ 1+t\big)$ spełniał równanie płaszczyzny π, czyli

$$3(12+4t)+5(9+3t)+(1+t)+2=0,$$

a stąd $t=-3$.

Zatem dla $t=-3$ punkt prostej l spełnia równania płaszczyzny π, czyli prosta l i płaszczyzna π mają punkt wspólny o współrzędnych $(0,0,-2)$.

BG AGH

Przykład

Sprawdzić, czy prosta

$$l\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \\ z = -2 + 5t \end{cases}, \qquad t \in R$$

leży na płaszczyźnie $\pi\colon 8x + 6y - 2z + 6 = 0$.

Prosta l leży na płaszczyźnie π wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt tej prostej należy do rozpatrywanej płaszczyzny. Innymi słowy, prosta l leży na płaszczyźnie π jeżeli dla każdego $t \in R$ punkt $\left(1+2t,\ -3-t,\ -2+5t\right)$ spełnia równanie płaszczyzny, czyli:

$$8(1 + 2t) + 6(-3 - t) - 2(-2 + 5t) + 6 = 0,$$

$$16t - 16t + 10 - 10 = 0.$$

Ostatnie równanie jest spełnione dla każdego $t \in R$. Zatem rozważana prosta leży na płaszczyźnie π.

Przykład

Weźmy pod uwagę prostą

$$l\colon \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 + 4t \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in R$$

oraz płaszczyznę $\pi\colon 9x - 6y - 3z + 45 = 0$. Zbadać wzajemne położenie prostej l i płaszczyzny π.

Łatwo zauważyć, że wektor $\mathbf{v} = (3, 4, 1)$ jest równoległy do prostej l, natomiast wektor $\mathbf{V} = \left(9, -6, -3\right)$ jest prostopadły do płaszczyzny π.

Oprócz tego iloczyn skalarny $\mathbf{vV} = (3, 4, 1)(9, -6, -3) = 0$. To oznacza, że wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{V}$ są prostopadłe, a zatem prosta l i płaszczyzna π są równoległe.

Stąd wynika, że rozważana prosta leży na płaszczyźnie π lub nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną. Weźmy dowolny punkt leżący na prostej l, np. punkt $P(-2, 5, 0)$. Łatwo sprawdzić, że współrzędne punktu P nie spełniają równania płaszczyzny π. Zatem rozważana w przykładzie prosta nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną π.

Weźmy pod uwagę dwie proste dane równaniami wektorowymi:

$$l_1\colon \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t,$$

$$l_2\colon \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 s,$$

gdzie:

$$t, s \in R,$$

$$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}.$$

BG AGH

Jeżeli $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, to prosta l_1 i l_2 są równoległe lub identyczne, a z warunku $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = 0$ wynika, że rozważane proste są prostopadłe.

Kątem nachylenia prostych l_1 i l_2 nazywamy kąt (zwykły) między wektorami równoległymi do tych prostych, czyli kąt między wektorami $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. Jeżeli przez φ oznaczamy kąt ostry między prostymi l_1 i l_2, to

$$\cos\varphi = \frac{|\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2|} \tag{7.50}$$

Proste l_1 i l_2 mają punkt wspólny, punkt przecięcia się prostych, jeżeli punkt ten leży na obu prostych. Analitycznie oznacza to, że istnieje takie $t_0 \in R$ oraz $s_0 \in R$, że

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t_0 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 s_0.$$

Zajmiemy się teraz odległością miedzy dwiema prostymi. Powstaje jednak pytanie, co rozumiemy przez „odległość” między prostymi? Niech $P_1\big(x_1, y_1, z_1\big)$, $P_2\big(x_2, y_2, z_2\big)$ będą punktami w R^3. Wiemy już, że liczbę

$$|P_1P_2| = \sqrt{\big(x_1 - x_2\big)^2 + \big(y_1 - y_2\big)^2 + \big(z_1 - z_2\big)^2}$$

nazywamy odległością między punktami P_1 i P_2.

Weźmy pod uwagę punkt $P \in l_1$ i punkt $Q \in l_2$. Liczbę

$$d = \min_{P\in l_1,\, Q\in l_2} |PQ|$$

nazywamy odległością między prostymi l_1 i l_2.

Innymi słowy, odległość między dwiema prostymi jest to najmniejsza odległość między punktami należącymi do tych prostych. Widać stąd, że jeżeli dwie proste przecinają się, to odległość między tymi prostymi wynosi zero.

W przypadku, gdy proste są równoległe, to odległość między nimi obliczamy w ten sposób, że na jednej z tych prostych obieramy dowolny punkt, i na podstawie wzoru (7.43), wyznaczamy odległość tego punktu od drugiej prostej. Jeżeli proste są równoległe, czyli:

$$\begin{aligned} l_1: &\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}t, \\ l_2: &\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}s, \end{aligned}$$

to dowodzi się, że odległość d między tymi prostymi wyraża się wzorem

$$d = \frac{\big|\big(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\big) \times \mathbf{v}\big|}{|\mathbf{v}|} \tag{7.51}$$

Podamy teraz metodę wyznaczania odległości między prostymi skośnymi:

$$\begin{aligned} l_1: &\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t, \\ l_2: &\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 s, \end{aligned}$$

gdzie:

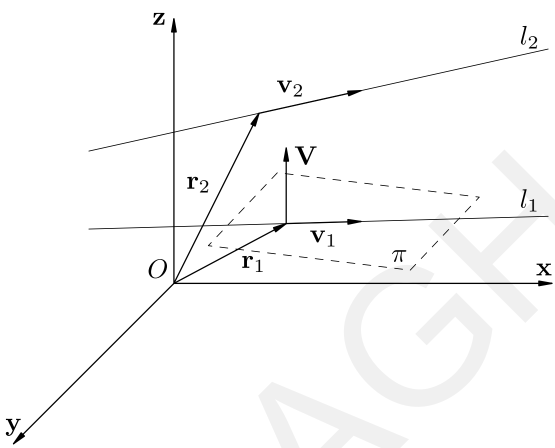
$t, s \in R$,

$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$.

Ilustruje to rysunek 7.34. W tym celu rozważmy płaszczyznę o równaniu wektorowym

$$\pi: \quad \mathbf{V}\big(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\big) = 0,$$

gdzie $\mathbf{V} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$.



Rys. 7.34. Odległość między prostymi skośnymi

Prosta l_1 leży na płaszczyźnie π, gdyż punkt o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_1$ leży na tej płaszczyźnie oraz wektor $\mathbf{V}$ jest prostopadły do wektora $\mathbf{v}_1$. Oprócz tego prosta l_2 jest równoległa do płaszczyzny π. Stąd wynika, że odległość między prostymi l_1 i l_2 jest równa odległości punktu o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_2$ od płaszczyzny π.

Dowodzi się, że odległość d między prostymi skośnymi:

$$l_1: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t,$$

$$l_2: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 s,$$

wyraża się wzorem

$$d = \frac{\big|\big(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\big)\big(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\big)\big|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|} \tag{7.52}$$

Przykład

Sprawdzić, czy proste

$$l_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 5 + 4t \end{cases}, \quad t \in R; \qquad l_2: \begin{cases} x = 6 + 3s \\ y = -1 - 2s \\ z = s \end{cases}, \quad s \in R$$

przecinają się.

Proste przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt leżący na obu prostych. Zatem szukamy takich $t, s \in R$, aby spełniony był układ równań

$$\begin{cases} 1 + 2t = 6 + 3s \\ 7 + t = -1 - 2s \\ 5 + 4t = s \end{cases}.$$

Proste rachunki prowadzą do wniosku, że ten układ równań jest spełniony dla $t = -2$ i $s = -3$. Stąd wynika, że proste l_1 i l_2 przecinają się w punkcie o współrzędnych $(-3, 5, -3)$.

Przykład

Wyznaczyć kąt φ między prostymi:

$$l_1: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t,$$
$$l_2: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{v}_2 s,$$

gdzie: $\mathbf{r}_1 = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{r}_2 = (2, 3, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 3, -1)$.

Skorzystamy ze wzoru (7.50). W tym przykładzie mamy

$$\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = (2, -1, 3) \cdot (3, 3, -1) = 0,$$

$\cos\varphi = 0$. Stąd $\varphi = {}^1\!/_2\,\pi$.

Przykład

Wyznaczyć odległość punktu $P(1, 2, 5)$ od prostej

$$l_1: \begin{cases} 2x + 2y - 2z + 4 = 0 \\ \phantom{2x + {}} 4x - 3z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Widać, że prosta l_1 jest dana w postaci równania krawędziowego. Zapiszemy tę prostą w postaci równania wektorowego. Łatwo zauważyć, że wektor

$$\mathbf{v} = (2, 2, -2) \times (4, 0, -3) = (-6, -2, -8)$$

jest równoległy do prostej l_1. Oprócz tego punkt $(0, -1, 1)$ leży na prostej l_1, gdyż spełnia równanie krawędziowe tej prostej. Zatem prosta l_1 ma następujące równanie wektorowe

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t, \qquad t \in R,$$

gdzie: $\mathbf{r}_0 = (0, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (-6, -2, -8)$.

Stąd i ze wzoru (7.43) otrzymamy, że odległość d punktu $P(1, 2, 5)$ od prostej l_1 wynosi

$$d = \frac{\left|\big(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1\big) \times \mathbf{v}\right|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\left|\big((0, -1, 1) - (1, 2, 5)\big) \times \big(-6, -2, -8\big)\right|}{\sqrt{36 + 4 + 64}} =$$
$$= \frac{|(-1, -3, -4) \times (-6, -2, -8)|}{\sqrt{104}} = \frac{|(16, 16, -16)|}{\sqrt{104}} = 8\sqrt{\frac{3}{26}}.$$

BG AGH

Przykład

Proste

$$l_1\colon \begin{cases} x = \ \ 1+t \\ y = -1+2t \\ z = \ \ t \end{cases}, \quad t\in R; \qquad l_2\colon \begin{cases} x = \ \ 2+s \\ y = -1+2s \\ z = \ \ 1+s \end{cases}, \quad s\in R.$$

są równoległe (dlaczego?). Obliczyć odległość d między tymi prostymi.

Z faktu, że rozpatrywane proste są równoległe wynika, że szukana odległość d jest równa odległości dowolnego punktu prostej l_1 od prostej l_2. Widać, że punkt $M(1,-1,0)\in l_1$ oraz $\mathbf{r}_1=(1,-1,0)$ jest wektorem wodzącym tego punktu. Natomiast równanie wektorowe prostej l_2 ma postać

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}s,$$

gdzie $\mathbf{r}_0=(2,-1,1)$, $\mathbf{v}=(1,2,1)$. Stąd i ze wzoru (7.43) otrzymamy, że odległość d między prostymi l_1 i l_2 wyraża się wzorem

$$d=\frac{\left|\left(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1\right)\times\mathbf{v}\right|}{|\mathbf{v}|},$$

czyli

$$d=\frac{\left|\left((2,-1,1)-(1,-1,0)\right)\times(1,2,1)\right|}{|(1,2,1)|}=\frac{|(1,0,1)\times(1,2,1)|}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Przykład

Obliczyć odległość między prostymi

$$l_1\colon \begin{cases} 2x+2y-2z-2=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}, \qquad l_2\colon \begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ 3x+6y+6z+12=0 \end{cases}.$$

Obie te proste zapiszemy w postaci równań wektorowych:

$$\begin{aligned} l_1\colon &\quad \mathbf{r}=(1,0,0)+(0,-2,-2)t,\\ l_2\colon &\quad \mathbf{r}=(0,0,-2)+(18,-9,0)s. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że proste te nie są równoległe (dlaczego?) oraz nie mają punktów wspólnych (dlaczego?). Wobec tego są to proste skośne i odległość d między nimi możemy wyznaczyć ze wzoru (7.52).

W tym przykładzie mamy:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1&=(1,0,0), &\qquad \mathbf{v}_1&=(0,-2,-2),\\ \mathbf{r}_2&=(0,0,-2), &\qquad \mathbf{v}_2&=(18,-9,0). \end{aligned}$$

Dla tych danych ze wzoru (7.52) otrzymamy

$$d=\frac{\left|\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2\right)\left(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2\right)\right|}{|\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2|}=\frac{|(1,0,2)(-18,-36,36)|}{54}=1.$$

7.4.5. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Weźmy pod uwagę prostą l o równaniach parametrycznych

$$l\colon \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, \qquad t \in R \tag{7.53}$$

gdzie $(\alpha, \beta, \gamma) \neq \mathbf{0}$, oraz płaszczyznę π o równaniu

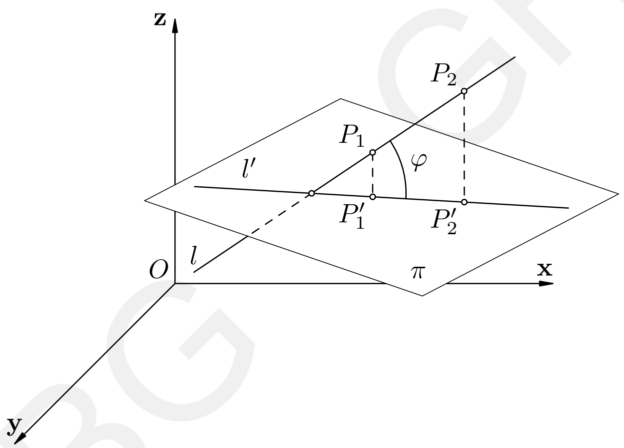
$$\pi\colon \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \tag{7.54}$$

Prostą l możemy też zapisać w postaci wektorowej

$$l\colon \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t, \qquad t \in R \tag{7.55}$$

gdzie: $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Niech P_1 i P_2 będą dowolnymi, różnymi punktami na prostej l, a P_1' i P_2' rzutami prostokątnymi tych punktów na płaszczyznę π (rys. 7.35).



Rys. 7.35. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Jeżeli $P_1' \neq P_2'$, to prostą l', przechodzącą przez punkty P_1' i P_2', nazywamy rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę π. Jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to rzutem prostokątnym tej prostej na płaszczyznę jest punkt — punkt przecięcia się tej prostej z płaszczyzną.

Kątem między prostą l i płaszczyzną π nazywamy kąt (kąt zwykły) jaki tworzy ta prosta z prostą l'. W przypadku gdy prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to kąt między prostą i płaszczyzną wynosi $1/2\,\pi$.

Kąt między prostą i płaszczyzną nazywa się kątem nachylenia prostej do płaszczyzny. Z tych określeń wynika, że kąt φ między prostą i płaszczyzną spełnia nierówność

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{1}{2}\pi$$

oraz

$$\sin\varphi = \frac{|\mathbf{V}\mathbf{v}|}{|\mathbf{V}|\,|\mathbf{v}|} \tag{7.56}$$

gdzie: $\mathbf{V} = \big(A, B, C\big)$, $\mathbf{v} = \big(\alpha, \beta, \gamma\big)$.

Przykład

Wyznaczyć kąt φ między prostą

$$l_1: \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = 1 - 3t \ , \qquad t \in R \\ z = 2 + t \end{cases}$$

i płaszczyzną $7x + 2y - 3z + 5 = 0$.

Zastosujemy wzór (7.56). W tym przykładzie mamy $\mathbf{V} = (7, 2, -3)$, $\mathbf{v} = (6, -3, 1)$. Stąd i z (7.56) otrzymamy

$$\sin\varphi = \frac{|(7, 2, -3)(6, -3, 1)|}{\sqrt{62}\sqrt{46}} = \frac{33}{\sqrt{46}\sqrt{62}}.$$

7.4.6. Kąt między dwiema płaszczyznami

Rozważmy dwie płaszczyzny o równaniach:

$$\pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\pi_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Wektor $\mathbf{V}_1 = \big(A_1, B_1, C_1\big)$ jest prostopadły do płaszczyzny π_1, a wektor $\mathbf{V}_2 = \big(A_2, B_2, C_2\big)$ jest prostopadły do płaszczyzny π_2.

Kątem między płaszczyznami π_1 i π_2 nazywamy kąt φ, nie większy od kąta prostego, o ramionach równoległych do wektorów $\mathbf{V}_1$ i $\mathbf{V}_2$.

Dowodzi się, że

$$\cos\alpha = \frac{|\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2|}{|\mathbf{V}_1|\,|\mathbf{V}_1|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{7.57}$$

Przykład

Obliczyć kąt φ, jaki tworzą ze sobą płaszczyzny

$$3x - y + 2z + 15 = 0 \qquad \text{i} \qquad 5x + 9y - 3z - 1 = 0.$$

Wektor $\mathbf{V}_1 = (3, -1, 2)$ jest prostopadły do pierwszej z tych płaszczyzn, a wektor $\mathbf{V}_2 = (5, 9, -3)$ do drugiej.

Stąd i ze wzoru (7.57) otrzymamy

$$\cos\varphi = \frac{|(3, -1, 2)(5, 9, -3)|}{\sqrt{14}\,\sqrt{115}} = 0.$$

Zatem rozważane płaszczyzny są do siebie prostopadłe.

BG AGH

Przykład

Wyznaczyć kąt między płaszczyznami

$$x - y - \sqrt{2}z - 5 = 0 \qquad \text{i} \qquad x = 0.$$

Z zapisu tych płaszczyzn widać, że wektor $\mathbf{V}_1 = (1, -1, \sqrt{2})$ jest prostopadły do płaszczyzny o równaniu $x - y + \sqrt{2}z - 5 = 0$, a wektor $\mathbf{V}_2 = (1, 0, 0)$ jest prostopadły do płaszczyzny $x = 0$.

Zatem ze wzoru (7.57) otrzymamy

$$\cos\varphi = \frac{\left|(1, -1, \sqrt{2})(1, 0, 0)\right|}{\sqrt{4}\,\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

Stąd łatwy wniosek, że poszukiwany kąt $\varphi = {}^1\!/_3\,\pi$.

Zadania

1. Znaleźć punkty przecięcia płaszczyzny $2x - 4y - 3z + 10 = 0$ z osiami układu współrzędnych $O\mathbf{xyz}$.

2. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty:

   a) $P_1(1, 0, 1)$, $P_2(0, 2, 0)$ i $P_3(0, 0, 4)$,

   b) $P_1(1, -2, 1)$, $P_2(2, 1, 3)$ i $P_3(1, 1, 1)$.

3. Sprawdzić, które z zadanych czterech punktów leżą na jednej płaszczyźnie:

   a) $(3, 1, 0)$, $(0, 14, 2)$, $(-1, 0, 5)$, $(4, 1, 6)$,

   b) $(-1, 1, -1)$, $(0, 2, -4)$, $(1, -3, -3)$, $(1, 0, -1)$.

4. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $M(1, 2, 3)$ i równoległej do płaszczyzny $x - 2y + 3z + 1 = 0$.

5. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $M(1, -2, 3)$ i prostopadłej do wektora $\mathbf{V}(4, 2, 1)$.

6. Obliczyć odległość punktu $M(3, 1, -1)$ od płaszczyzny $3x + 2y - 5z + 1 = 0$.

7. Wyznaczyć odległość między płaszczyznami

   $$3x + 4y - 12z + 13 = 0 \quad \text{i} \quad 6x + 8y - 24z + 30 = 0.$$

8. Określić wzajemne położenia dwóch płaszczyzn:

   a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, $6x - 12y + 2 = 0$,

   b) $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z + {}^3\!/_2 = 0$.

BG AGH

9. Znaleźć kąt między płaszczyznami:

   a) $x + 2y - z = 0,\ \ 4x + 2y + 8z + 6 = 0,$

   b) $2x - 2y + 2\sqrt{2}z - 10,\ \ x = 0.$

10. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $O(0,0,0)$, $B(1,2,3)$ i prostopadłej do płaszczyzny $2x - 2y + 4z - 8 = 0$.

11. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-3,2,1)$ i równoległej do wektora $\mathbf{v} = (2,3,-2)$.

12. Napisać równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkty: $A(3,6,8)$, $B(1,4,3)$.

13. Napisać równanie wektorowe prostej przechodzącej przez punkty: $A(1,2,-1)$, $B(2,1,-3)$.

14. Prostą

$$l\colon \begin{cases} 2x - 2y + 4z - 2 = 0 \\ 3x + \ \ y - \ \ z - 6 = 0 \end{cases}$$

zapisać w postaci równań parametrycznych.

15. Wyznaczyć kąt między prostymi

$$l_1\colon \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = \ \ 2 + 3t \end{cases}, \qquad l_2\colon \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}.$$

16. Wyznaczyć kąt między prostymi

$$l_1\colon \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x - 3y - 6 = 0 \end{cases}, \qquad l_2\colon \begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases}.$$

17. Znaleźć współrzędne punktu przecięcia prostej

$$l\colon \begin{cases} x = \ \ 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, \qquad t \in R$$

z płaszczyzną $3x + 3y - 3z + 3 = 0$.

18. Znaleźć odległość punktu $P(1,2,1)$ od prostej

$$l\colon \begin{cases} x = \ \ 2 + 4t \\ y = \ \ 1 + 3t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, \qquad t \in R.$$

19. Znaleźć odległość punktu $P(1,3,5)$ od prostej

$$l\colon \begin{cases} 4x+2y+2z-2=0 \\ 9x+3y+6z-9=0 \end{cases}.$$

20. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(-1,2,4)$ i prostopadłej do płaszczyzny $4x-2y+3z+2=0$.

21. Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(1,-2,3)$ i prostą

$$l\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}, \qquad t \in R.$$

22. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(2,-3,1)$ i przecinającej prostą

$$l\colon \begin{cases} x = -1+2t \\ y = -t \\ z = 2+3t \end{cases}, \qquad t \in R$$

pod kątem prostym.

23. Napisać równanie rzutu prostej

$$l\colon \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -1+2t \\ z = t \end{cases}, \qquad t \in R$$

na płaszczyznę $3x-y+2z-10=0$.

24. Wyznaczyć rzut punktu $P(4,-3,1)$ na płaszczyznę $2x+2y-2z-6=0$.

25. Znaleźć odległość dwóch prostych

$$l_1\colon \begin{cases} x = -3+t \\ y = 6-3t \\ z = 3+2t \end{cases}, \quad t \in R; \qquad l_2\colon \begin{cases} x = 4+16t \\ y = -1-6t \\ z = -7+6t \end{cases}, \quad t \in R.$$

26. Wyznaczyć punkt przecięcia się trzech płaszczyzn:

$$2x+y-z-2=0, \qquad x-3y+z+1=0, \qquad x+y+z-3=0.$$

27. Znaleźć kąt między prostą

$$l\colon \begin{cases} 2x+2y-2z=0 \\ 4x-6y+2z=0 \end{cases}$$

i płaszczyzną $6x+10y-8z+4=0$.

28. Napisać równanie płaszczyzny, której punkt $(1, 2, -1)$ jest prostokątnym rzutem punktu $(0, 0, 0)$.

29. Dla jakich wartości parametrów p, $q \in R$ płaszczyzny

$$2x + py + 3z - 5 = 0, \qquad qx - 6y - 6z + 2 = 0$$

są równoległe, a przy jakich prostopadłe?

30. Obliczyć objętość czworościanu ograniczonego płaszczyznami układu współrzędnych $O\mathbf{xyz}$ oraz płaszczyzną $6x - 9y + 18z - 36 = 0$.

31. Obliczyć odległość punktu $P(2, 3, 1)$ od płaszczyzny $x = y$.

32. Napisać równanie płaszczyzny $O\mathbf{xz}$.

33. Co przedstawiają w przestrzeni następujące równania:

a) $x = -4$,

b) $x + y = 0$,

c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2}. \end{cases}$

BG AGH

Skorowidz oznaczeń

R – zbiór liczb rzeczywistych

N – zbiór liczb naturalnych

C – zbiór liczb zespolonych

Z – zbiór liczb całkowitych

Q – zbiór liczb wymiernych

$\varnothing$ – zbiór pusty

$\overset{\mathrm{df}}{=}$ – równa się z definicji

$a \in D$ – a należy do D

$a \notin D$ – a nie należy do D

$\bigwedge\limits_{x \in D}$ – dla każdego $x \in D$

$\bigvee\limits_{x \in D}$ – istnieje $x \in D$

$A \cup B$ – suma mnogościowa zbiorów A i B

$A \cap B$ – część wspólna zbiorów A i B

$A \setminus B$ – różnica zbioru A i zbioru B

$A \subset B$ – A zawiera się w B

$A \times B$ – iloczyn kartezjański zbioru A przez zbiór B

$\overline{z}$ – liczba zespolona sprzężona do z

$\mathrm{Re}(z)$ – część rzeczywista liczby zespolonej z

$\mathrm{Im}(z)$ – część urojona liczby zespolonej z

$\mathrm{Arg}(z)$ – argument liczby zespolonej z

$|a|$ – wartość bezwzględna (moduł) liczby rzeczywistej lub zespolonej a

$p \wedge q$ – iloczyn logiczny (koniunkcja)

$p \vee q$ – suma logiczna (alternatywa)

$p \Rightarrow q$ – implikacja (jeżeli p, to q)

$p \Leftrightarrow q$ – równoważność (p wtedy i tylko wtedy, gdy q)

BG AGH

$\overline{AB}$ – wektor o punkcie początkowym A i końcowym B

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ – iloczyn wektorowy wektora **a** przez wektor **b**

(a, b) – przedział otwarty lub para uporządkowana

$D(f)$ – dziedzina funkcji f

$\text{ᗡ}(f)$ – przeciwdziedzina funkcji f

f^{-1} – funkcja odwrotna

$f\colon X \to Y$ – funkcja określona w zbiorze X o wartościach w Y

R^n – przestrzeń euklidesowa n-wymiarowa

$\left[a_{ij}\right]_{n\times m}$ – macierz o n wierszach i m kolumnach

$\mathbf{A}^T$ – macierz transponowana do **A**

$\mathbf{A}^{-1}$ – macierz odwrotna do **A**

$\det \mathbf{A}$ lub $|\mathbf{A}|$ – wyznacznik z macierzy **A**

$\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ – ślad macierzy **A**

$\operatorname{rz}(\mathbf{A})$ – rząd macierzy **A**

M_{ij} – minor macierzy odpowiadający elementowi a_{ij}

A_{ij} – dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij}

I – macierz jednostkowa

$R^{n\times m}$ – zbiór macierzy rzeczywistych o wymiarach $n \times m$

$C^{n\times m}$ – zbiór macierzy zespolonych o wymiarach $n \times m$

BG AGH