MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIK

Teresa Jurlewicz
Zbigniew Skoczylas

Algebra liniowa 1

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie ósme

GiS

MATEMATYKA DLA STUDENTÓW POLITECHNIK

Semestr pierwszy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 1. Laboratorium komputerowe

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 1. Laboratorium komputerowe

Semestr drugi

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania

Oprac. Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Analiza matematyczna 2. Laboratorium komputerowe

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Definicje, twierdzenia, wzory

Teresa Jurlewicz, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Przykłady i zadania

Teresa Jurlewicz, Algebra liniowa 2. Kolokwia i egzaminy

Marian Gewert, Zbigniew Skoczylas, Algebra liniowa 2. Laboratorium komputerowe

ISBN 83-85941-79-7

9 788385 941798

www.gis.wroc.pl

GiS

ALGEBRA LINIOWA 1

Teresa Jurlewicz   Zbigniew Skoczylas

ALGEBRA LINIOWA 1

Definicje, twierdzenia, wzory

Wydanie ósme zmienione

Oficyna Wydawnicza **GiS**
Wrocław 2001

Recenzent wydania VII

dr hab. Tomasz Downarowicz

Projekt okładki

IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Printed in Poland

Skład skryptu wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 83-85941-79-7

Wydanie VIII zmienione, Wrocław 2001.
Oficyna Wydawnicza **GiS**, s.c.
Druk: TINTA Sp. z o.o.

Spis treści

WSTĘP

Podręcznik *„Algebra liniowa 1. Defnicje, twierdzenia, wzory”* jest pierwszą częścią zestawu książek do **Algebry liniowej 1**. Pozostałymi częściami tego zestawu są *„Przykłady i zadania”* oraz *„Kolokwia i egzaminy”*. Podręczniki te przeznaczone są głównie dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci akademii ekonomicznych i rolniczych oraz niektórych wydziałów uniwersytetów.

Opracowanie obejmuje liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych oraz geometrię analityczną w przestrzeni. Podręcznik został przygotowany w ten sposób, aby mógł służyć jako konspekt wykładu. Wszystkie zagadnienia teoretyczne zakończone są ćwiczeniami. Do większości twierdzeń podano dowody (twierdzenia te oznaczono ■). Dowody twierdzeń oraz odpowiedzi do wszystkich ćwiczeń umieszczone są na końcach poszczególnych rozdziałów. Fragmenty materiału oznaczone gwiazdką nieznacznie wykraczają poza aktualnie obowiązujący program przedmiotu. W ten sam sposób oznaczono trudniejsze ćwiczenia. Dodatkowy materiał oraz trudniejsze ćwiczenia dołączono z myślą o studentach, którzy chcą pogłębić swoje wiadomości.

Równolegle do materiału omawianego na wykładzie studenci powinni przerabiać listę zadań. Aby to ułatwić listę tę podzielono na 14 części, które należy zrealizować w kolejnych tygodniach semestru. Listę zadań oraz metody ich rozwiązywania można znaleźć w drugiej części podręcznika. Lista ta, program kursu oraz zasady jego zaliczania są dostępne na stronach internetowych Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej pod adresem

`www.im.pwr.wroc.pl`

Ćwiczenia z tego podręcznika oraz zadania z listy zadań są podobnych typów i mają ten sam stopień trudności jak zadania, które zwykle pojawiają na kolokwiach i egzaminach. Zestawy zadań, które w poprzednich latach studenci rozwiązywali na kolokwiach i egzaminach, są umieszczone w trzeciej części podręcznika.

Do tego wydania dołączono wybrane wiadomości z logiki, teorii zbiorów oraz geometrii analitycznej na płaszczyźnie. Zagadnienia omawiane w dodatku będą wielokrotnie wykorzystywane zarówno na zajęciach z algebry liniowej, jak i analizy matematycznej. Z materiałem tym, znanym studentom częściowo ze szkoły średniej, należy zapoznać się przed rozpoczęciem semestru. Ponadto w tym wydaniu uzupełniono dowody twierdzeń, dodano nowe ćwiczenia wraz z odpowiedziami, umieszczono wiele rysunków oraz poprawiono zauważone błędy i usterki.

Serdecznie dziękujemy Koleżankom i Kolegom z Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi i sugestie o poprzednich wydaniach podręcznika. Szczególne podziękowania składamy recenzentowi siódmego wydania Panu dr. hab. Tomaszowi Downarowiczowi za opinie i spostrzeżenia, które pozwoliły usunąć wiele błędów i niejasności. Dziękujemy także Koleżankom i Kolegom z innych uczelni za komentarze dotyczące zakresu i sposobu ujęcia materiału.

Teresa Jurlewicz
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
tjurlew@im.pwr.wroc.pl

Zbigniew Skoczylas
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
z.skoczylas@im.pwr.wroc.pl

1

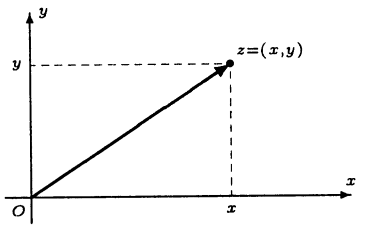
LICZBY ZESPOLONE

1.1 Podstawowe definicje i własności

● **Definicja 1.1.1** *(liczba zespolona, płaszczyzna zespolona)*
Liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych, np. (x, y), (u, v), (a, b). Liczby zespolone oznaczamy krótko przez z, w itp. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\boldsymbol{C}$. Mamy zatem

$$\boldsymbol{C} \stackrel{def}{=} \{z = (x, y) : x, y \in \boldsymbol{R}\}.$$

Uwaga. Liczbę zespoloną $z = (x, y)$ przedstawiamy na płaszczyźnie w postaci punktu o współrzędnych (x, y) lub w postaci wektora o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie (x, y). W tej interpretacji zbiór wszystkich liczb zespolonych nazywamy płaszczyzną zespoloną.



Rys. 1.1.1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej.

Notka historyczna. Liczby zespolone pojawiły się po raz pierwszy w XVI wieku. Wykorzystywano je (używając formalnie symbolu $\sqrt{-1}$) do obliczania pierwiastków rzeczywistych wielomianów stopnia trzeciego (wzory Cardana*). Pierwszy opis tych liczb podał w 1579 roku Bombelli†. Liczby zespolone odtąd były stosowane do obliczeń, choć ich istnienie wywoływało spory. Jak podaje Laurence Young w 1820 roku studenci inżynierii w Paryżu wzniecili bunt przeciwko liczbom zespolonym twierdząc, że są one zupełnie bezużyteczne, a ponadto w ogóle nie istnieją.

*Geronimo Cardano (1501-1576), matematyk, filozof i lekarz włoski.

†Raffaele Bombelli (1530-1572), matematyki włoski

Nie dziwi zatem fakt, że trzy wieki wcześniej pionier ich użycia – Cardano – został uwięziony pod zarzutem uprawiania czarnej magii. Pierwszą ścisłą teorię liczb zespolonych podał w XIX wieku Gauss‡. Jego interpretacja geometryczna liczb zespolonych oraz wprowadzona symbolika są stosowane współcześnie.

○ **Ćwiczenie 1.1.2**

Narysować na płaszczyźnie zespolonej liczby:

a) $z_1 = (3, 2)$; b) $z_2 = (-3, 1)$; c) $z_3 = (10, 0)$; d) $z_4 = (0, -4)$.

● **Definicja 1.1.3** *(równość, suma i iloczyn liczb zespolonych)*

Niech $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ będą liczbami zespolonymi.

1. Równość liczb zespolonych określamy przez warunek:

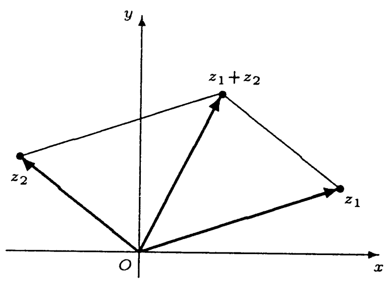
$$z_1 = z_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

2. Sumę liczb zespolonych określamy wzorem:

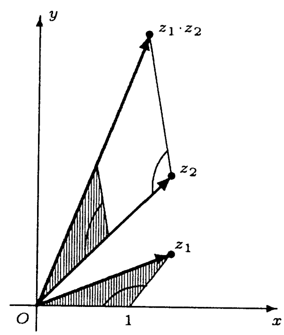
$$z_1 + z_2 \overset{def}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

3. Iloczyn liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 \cdot z_2 \overset{def}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$



Rys. 1.1.2. Interpretacja geometryczna sumy liczb zespolonych.



Rys. 1.1.3. Konstrukcja iloczynu liczb zespolonych.

Uwaga. Iloczyn $z \cdot z \cdot \ldots \cdot z$ złożony z n czynników zespolonych oznaczamy tradycyjnie przez z^n.

○ **Ćwiczenie 1.1.4**

Niech $z_1 = (0, 1)$, $z_2 = (3, -4)$ oraz $z_3 = \left(\sqrt{2}, -3\right)$. Obliczyć

a) $z_1 + z_2$, $z_2 + z_3$; b) $z_1 \cdot z_2$, $z_2 \cdot z_3$.

---

‡Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matematyk, astronom i fizyk niemiecki.

○ **Ćwiczenie 1.1.5**
Uzasadnić, dlaczego w zbiorze liczb zespolonych nie można wprowadzić relacji nierówności ($<$) tak, aby zachowane były jej własności ze zbioru liczb rzeczywistych.

● **Fakt 1.1.6** *(własności działań w zbiorze liczb zespolonych)*
Niech z_1, z_2, z_3 będą dowolnymi liczbami zespolonymi. Wtedy:

1. dodawanie liczb zespolonych jest przemienne, tzn.
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$
2. dodawanie liczb zespolonych jest łączne, tzn.
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$$
3. dla każdej liczby zespolonej z liczba zespolona $\mathbf{0} \stackrel{def}{=} (0,0)$ spełnia równość
$$z + \mathbf{0} = z;$$
4. dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y)$ liczba zespolona $-z \stackrel{def}{=} (-x, -y)$ spełnia równość
$$z + (-z) = \mathbf{0};$$
5. mnożenie liczb zespolonych jest przemienne, tzn.
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$
6. mnożenie liczb zespolonych jest łączne, tzn.
$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$$
7. dla każdej liczby zespolonej z liczba zespolona $\mathbf{1} \stackrel{def}{=} (1,0)$ spełnia równość
$$z \cdot \mathbf{1} = z;$$
8. dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y) \neq \mathbf{0}$ liczba zespolona
$$\frac{1}{z} \stackrel{def}{=} \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$
spełnia równość
$$z \cdot \frac{1}{z} = \mathbf{1};$$
9. mnożenie liczb zespolonych jest rozdzielne względem dodawania, tzn.
$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Uwaga. Liczby zespolone $\mathbf{0}$, $-z$, $\mathbf{1}$ oraz $\frac{1}{z}$, wprowadzone odpowiednio w punktach

3., 4., 7. oraz 8. powyższego faktu, są jedynymi liczbami o żądanych w tych punktach własnościach. Liczby te nazywamy odpowiednio: elementem neutralnym dodawania, elementem przeciwnym do liczby z, elementem neutralnym mnożenia oraz elementem odwrotnym do liczby z.

○ **Ćwiczenie* 1.1.7**

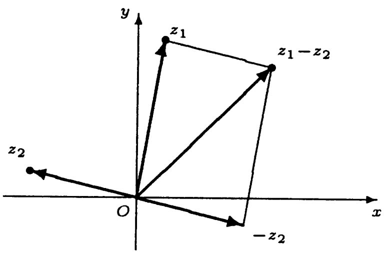
Sprawdzić warunki podane w punktach **1.**–**9.** Uzasadnić stwierdzenia podane w uwadze.

● **Definicja 1.1.8** *(różnica i iloraz liczb zespolonych)*

Niech $z_1, z_2 \in C$ będą dowolnymi liczbami zespolonymi.

1. Różnicę liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 - z_2 \stackrel{def}{=} z_1 + (-z_2).$$



Rys. 1.1.4. Interpretacja geometryczna różnicy liczb zespolonych.

2. Iloraz liczb zespolonych określamy wzorem:

$$\frac{z_1}{z_2} \stackrel{def}{=} z_1 \cdot \frac{1}{z_2}, \quad \text{o ile } z_2 \neq 0.$$

Uwaga. Wszystkie reguły czterech podstawowych działań algebraicznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie) znane dla liczb rzeczywistych obowiązują także w zbiorze liczb zespolonych. W szczególności prawdziwe są wzory skróconego mnożenia, wzór dwumianowy Newtona, wzory na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego itp.

○ **Ćwiczenie 1.1.9**

Obliczyć:

a) $(4,-1)-(-3,5)$; b) $\dfrac{(-1,-2)}{(3,4)}$; c) $\dfrac{(0,-6)}{(0,2)}$.

● **Fakt 1.1.10** *(zbiór liczb rzeczywistych jako podzbiór zbioru liczb zespolonych)*

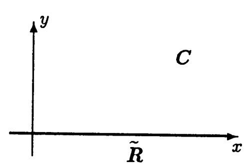
Liczby zespolone postaci $(x,0)$, gdzie $x \in R$, mają następujące własności:

1. $(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$;

2. $(x_1,0)-(x_2,0)=(x_1-x_2,0)$;

3. $(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1\cdot x_2,0)$;

4. $\dfrac{(x_1,0)}{(x_2,0)}=\left(\dfrac{x_1}{x_2},0\right)$, gdzie $x_2 \neq 0$.



Rys. 1.1.5. Zbiór $\tilde{R}$ jest podzbiorem C.

Uwaga. Z własności tych wynika, że zbiór $\tilde{\boldsymbol{R}} \overset{def}{=} \{(x,0) : x \in \boldsymbol{R}\}$ można utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$. Będziemy pisali zatem x zamiast $(x,0)$.

1.2 Postać algebraiczna i sprzężenie liczby zespolonej

● **Definicja 1.2.1** *(jednostka urojona)*

Liczbę zespoloną $(0,1)$ nazywamy jednostką urojoną i oznaczamy ją przez i;

$$i \overset{def}{=} (0,1).$$

○ **Ćwiczenie 1.2.2**

Uzasadnić, że liczba i jest rozwiązaniem równania $z^2+1=0$.

■ **Fakt 1.2.3** *(postać algebraiczna liczby zespolonej)*

Każdą liczbę zespoloną można jednoznacznie zapisać w postaci:

$$z = x + iy, \quad \text{gdzie } x, y \in \boldsymbol{R}.$$

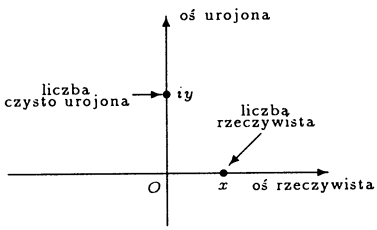
Uwaga. Ten sposób przedstawiania liczb zespolonych nazywamy ich postacią algebraiczną. Nie każde przedstawienie liczby zespolonej w formie $x+iy$ jest jej postacią algebraiczną. Niezbędne jest dodanie warunku $x, y \in \boldsymbol{R}$. Np. przedstawienie $1 + i(-2i)$ nie jest postacią algebraiczną liczby 3.

● **Definicja 1.2.4** *(część rzeczywista i urojona liczby zespolonej)*

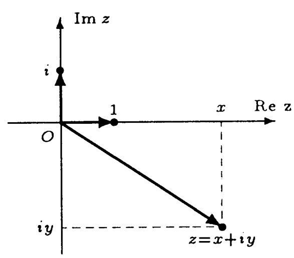
Niech $x+iy$ będzie postacią algebraiczną liczby zespolonej z. Wówczas:

1. liczbę x nazywamy częścią rzeczywistą (z łac. *realis*) liczby zespolonej z, co zapisujemy
$$\operatorname{Re} z \overset{def}{=} x;$$
2. podobnie liczbę y nazywamy częścią urojoną (z łac. *imaginalis*) liczby zespolonej z, co zapisujemy
$$\operatorname{Im} z \overset{def}{=} y.$$

Liczbę zespoloną postaci iy, gdzie $y \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, nazywamy czysto urojoną.



Rys. 1.2.1. Osie rzeczywista i urojona na płaszczyźnie zespolonej.



Rys. 1.2.2. Interpretacja geometryczna postaci algebraicznej liczby zespolonej.

Uwaga. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej wykonujemy tak jak dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów zmiennej i, przy warunku $i^2 = -1$. Przy dzieleniu przez liczbę zespoloną $x + iy$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$, należy dzielną i dzielnik pomnożyć przez liczbę $x - iy$, aby w mianowniku uzyskać liczbę rzeczywistą.

○ **Ćwiczenie 1.2.5**
Obliczyć:

a) $\left(1 - \sqrt{3}i\right) + \left(1 + \sqrt{2}i\right)$; b) $(3i - 2) - (1 - 2i)$; c) $(1 + 2i)(-3 + 4i)$; d) $\dfrac{4 + 5i}{2 - i}$.

○ **Ćwiczenie 1.2.6**
Niech $z, z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$. Uzasadnić równości:

a) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$; b) $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$;

c) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$; d) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$.

● **Fakt 1.2.7** *(o równości liczb zespolonych w postaci algebraicznej)*
Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i urojone są równe, tzn.

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2. \end{cases}$$

○ **Ćwiczenie 1.2.8**
Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające podane warunki:

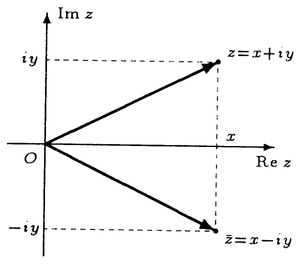
a) $z^2 + 4i = 0$; b) $\operatorname{Re} z - 3\operatorname{Im} z = 2$; c) $\operatorname{Re}(iz) \geqslant 1$;

d) $\dfrac{z + 2}{i - 1} = \dfrac{3z + i}{2 + i}$; e) $z^2 - 6z + 10 = 0$.

● **Definicja 1.2.9** *(sprzężenie liczby zespolonej)*
Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$, nazywamy liczbę zespoloną $\overline{z}$ określoną wzorem:

$$\overline{z} \stackrel{def}{=} x - iy.$$

Liczba sprzężona do liczby zespolonej jest jej obrazem w symetrii względem osi $\operatorname{Re} z$ (rys. 1.2.3).



Rys. 1.2.3. Interpretacja geometryczna sprzężenia liczby zespolonej.

■ **Fakt 1.2.10** *(własności sprzężenia liczb zespolonych)*
Niech z, z_1, $z_2 \in C$. Wtedy

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; **2.** $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; **4.** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, o ile $z_2 \neq 0$;

5. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$; **6.** $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$;

7. $\overline{(\overline{z})} = z$; **8.** $\mathrm{Im}\,(\overline{z}) = -\,\mathrm{Im}\,(z)$.

Uwaga. Równości podane w punktach **1.** i **3.** są prawdziwe także dla dowolnej liczby odpowiednio składników i czynników.

○ **Ćwiczenie 1.2.11**
Rozwiązać równania:

a) $2z + (3 - i)\overline{z} = 5 + 4i$; b) $z + i = \overline{z + i}$;

c) $z \cdot \overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i$; d) $z + \overline{z} + i(z - \overline{z}) = 5 + 3i$.

○ **Ćwiczenie 1.2.12**
Uzasadnić podane równoważności:

a) liczba zespolona z jest liczbą rzeczywistą $\Longleftrightarrow$ $z = \overline{z}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, z = 0$;

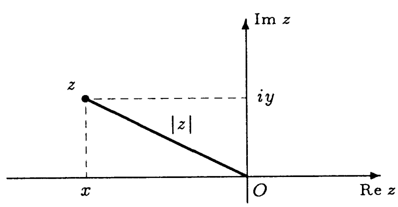
b) liczba zespolona $z \neq 0$ jest liczbą czysto urojoną $\Longleftrightarrow$ $z = -\overline{z}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Re}\, z = 0$.

1.3 Moduł i argument liczby zespolonej

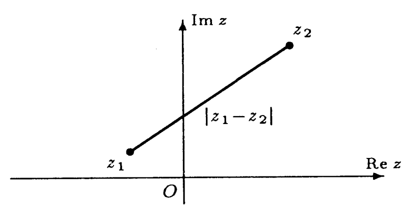
● **Definicja 1.3.1** *(moduł liczby zespolonej)*
Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$, nazywamy liczbę rzeczywistą $|z|$ określoną wzorem:

$$|z| \overset{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Uwaga. Moduł liczby zespolonej jest uogólnieniem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Geometrycznie moduł liczby zespolonej z jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych (rys. 1.3.1). Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 płaszczyzny zespolonej (rys. 1.3.2).



Rys. 1.3.1. Interpretacja geometryczna modułu liczby zespolonej.



Rys. 1.3.2. Interpretacja geometryczna modułu różnicy liczb zespolonych.

○ **Ćwiczenie 1.3.2**
Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych:

a) $z = -i$; b) $z = -1 + 3i$; c) $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $z = -5 - 12i$.

■ **Fakt 1.3.3** *(własności modułu liczby zespolonej)*
Niech z, z_1, $z_2 \in \boldsymbol{C}$. Wtedy

1. $|\overline{z}| = |z| = |-z|$; **2.** $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

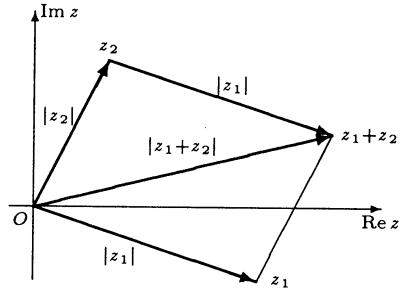
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; **4.** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, o ile $z_2 \neq 0$;

5. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$; **6.** $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|$;

7. $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$; **8.** $|\mathrm{Re}\,(z_1 z_2)| \leqslant |z_1|\,|z_2|$.

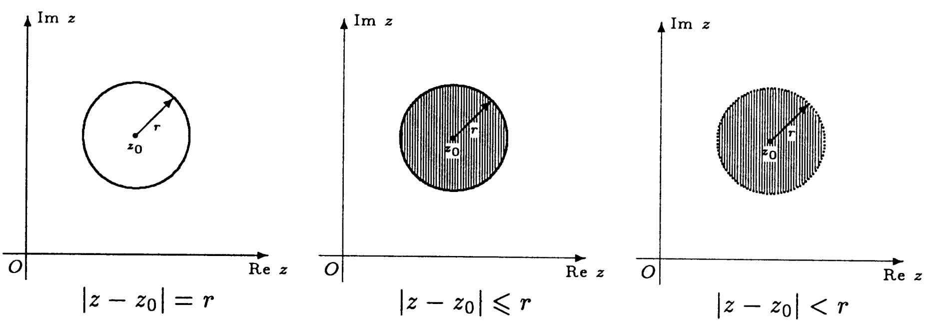
Uwaga. Warunki podane w punktach **3.** i **5.** powyższego faktu prawdziwe są także dla dowolnej liczby odpowiednio czynników i składników. W szczególności mamy $|z^n| = |z|^n$ dla $n \in \boldsymbol{N}$. Nierówność **5.** jest nazywana *nierównością trójkąta* (rys. 1.3.3). Przy obliczaniu ilorazu liczb zespolonych z_1 i $z_2 \neq 0$ wygodnie jest zastosować tożsamość:

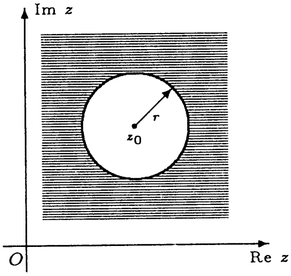
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}.$$



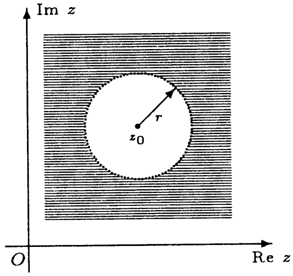
Rys. 1.3.3. Interpretacja geometryczna nierówności trójkąta.

Interpretacje geometryczne równań i nierówności z modułem

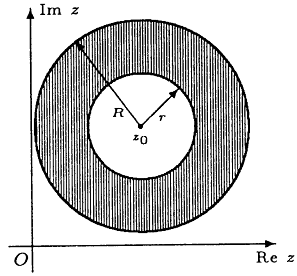




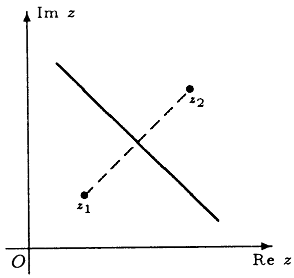
$|z - z_0| \geqslant r$



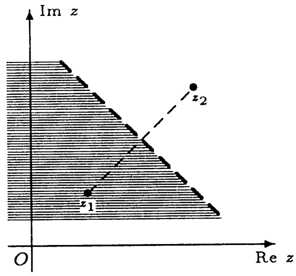
$|z - z_0| > r$



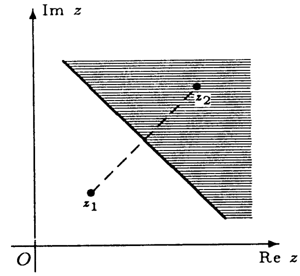
$r \leqslant |z - z_0| \leqslant R$



$|z - z_1| = |z - z_2|$



$|z - z_1| < |z - z_2|$



$|z - z_1| \geqslant |z - z_2|$

○ **Ćwiczenie 1.3.4**

Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:

a) $|z + i| = 3$; b) $|2iz + 6| \leqslant 4$; c) $2 < |z + 2 - i| \leqslant 3$;

d) $|z + 5| = |3i - z|$; e) $\left|\dfrac{z-3}{z-3i}\right| > 1$; f) $\left|\dfrac{z+i}{z^2+1}\right| \leqslant 1$;

g*) $|z+i|+|z-i| = 2$; h) $|\overline{z} + 2 - i| \leqslant |z|$; i) $3|z-1| \leqslant \left|z^2 - 1\right| < 6|z+1|$.

○ **Ćwiczenie 1.3.5**

Uzasadnić, że równość $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb zespolonych z_1, z_2. Podać interpretację geometryczną tej tożsamości.

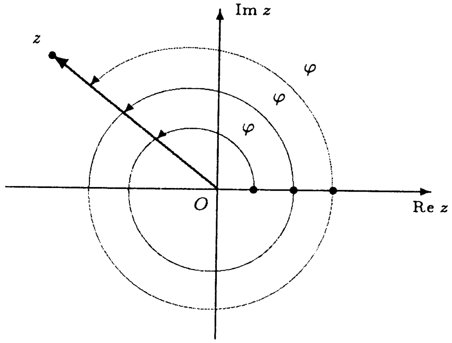
● **Definicja 1.3.6** *(argument i argument główny liczby zespolonej)*

Argumentem liczby zespolonej $z = x + iy \neq 0$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$, nazywamy każdą liczbę $\varphi \in \boldsymbol{R}$ spełniającą układ równań:

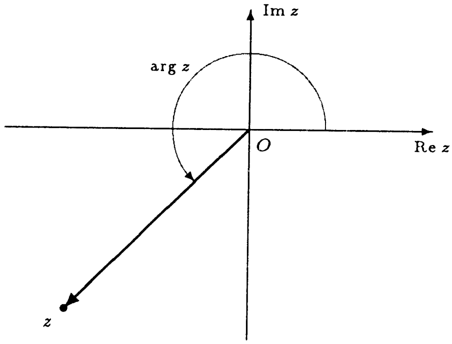
$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Przyjmujemy, że argumentem liczby $z = 0$ jest każda liczba $\varphi \in \boldsymbol{R}$. Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument φ tej liczby spełniający nierówności $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Przyjmujemy, że argumentem głównym liczby $z = 0$ jest 0. Argument główny liczby zespolonej z oznaczamy przez $\arg z$. Każdy argument φ liczby zespolonej $z \neq 0$ ma postać

$$\varphi = \arg z + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



Rys. 1.3.4. Argumenty liczby zespolonej.



Rys. 1.3.5. Argument główny liczby zespolonej.

Uwaga. Argumenty liczby zespolonej są miarami kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej i wektor wodzący tej liczby (rys. 1.3.4). Argument główny liczby zespolonej jest najmniejszą nieujemną miarą kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej i wektor wodzący tej liczby (rys. 1.3.5). Czasem wygodnie jest przyjąć, że argument główny liczby zespolonej jest liczbą z przedziału $(-\pi, \pi]$.

○ Ćwiczenie 1.3.7

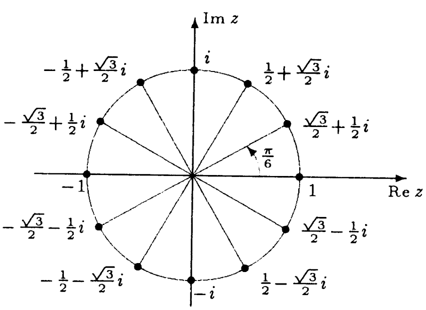
Znaleźć argumenty główne podanych liczb zespolonych:

a) $z = 2$; b) $z = i$; c) $z = -\pi$;

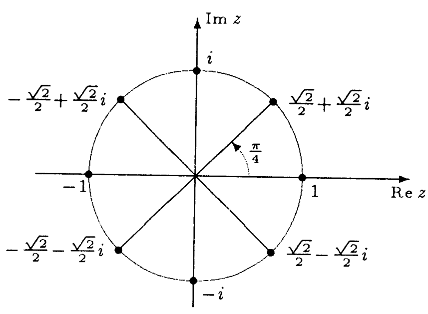
d) $z = 3 - 3i$; e) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; f) $z = -3 + 4i$.

W ćwiczeniu f) wykorzystać kalkulator.

Postacie algebraiczne liczb zespolonych o argumentach $k\frac{\pi}{6}$ i $k\frac{\pi}{4}$



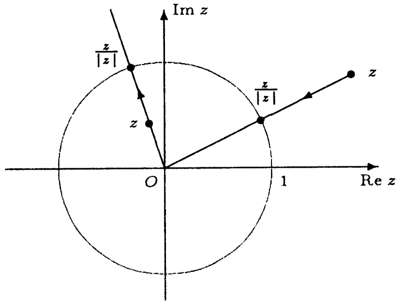
Rys. 1.3.6. Liczby zespolone o module 1 i argumentach postaci $k\frac{\pi}{6}$.



Rys. 1.3.7. Liczby zespolone o module 1 i argumentach postaci $k\frac{\pi}{4}$.

Uwaga. Podzielenie liczby zespolonej $z \neq 0$ przez jej moduł pozwala uzyskać liczbę zespoloną o module 1 i tym samym argumencie;

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1 \text{ dla } z \neq 0.$$



Rys. 1.3.8. Przekształcenie liczb zespolonych do postaci o module 1.

- **Fakt 1.3.8** *(o argumentach sprzężenia, liczby przeciwnej oraz odwrotności)*

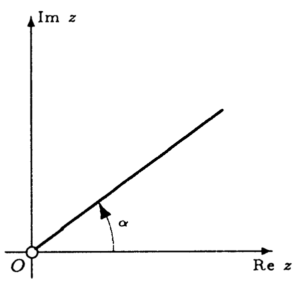
Niech $z \neq 0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Wtedy

1. $\arg(\overline{z}) = 2\pi - \arg z$;

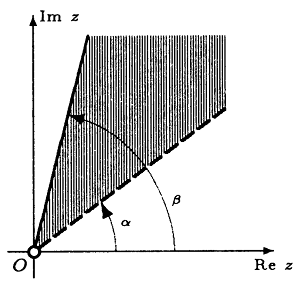
2. $\arg(-z) = \begin{cases} \arg z + \pi, & \text{gdy} \quad 0 \leqslant \arg z < \pi, \\ \arg z - \pi, & \text{gdy} \quad \pi \leqslant \arg z < 2\pi; \end{cases}$

3. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = 2\pi - \arg z$.

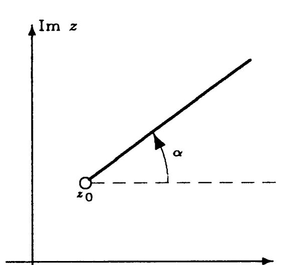
Interpretacje geometryczne równań i nierówności z argumentem



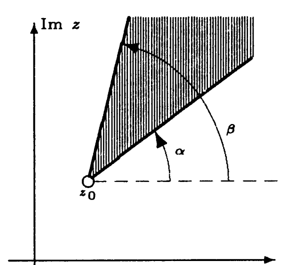
$\arg z = \alpha$



$\alpha < \arg z \leqslant \beta$



$\arg(z - z_0) = \alpha$



$\alpha \leqslant \arg(z - z_0) \leqslant \beta$

○ **Ćwiczenie 1.3.9**
Narysować zbiory liczb zespolonych, które spełniają podane warunki:

a) $\arg z = \frac{\pi}{4}$; b) $\arg(z+i) = \pi$; c) $\arg(-z) = \frac{2\pi}{3}$;

d) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5\pi}{6}$; e) $\arg(\bar{z}) = \frac{3\pi}{4}$; f) $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z < \frac{3\pi}{2}$;

g) $\frac{\pi}{6} \leqslant \arg(2+i-z) \leqslant \pi$; h) $\frac{\pi}{4} < \arg(\bar{z}) \leqslant \frac{3\pi}{4}$; i) $\frac{\pi}{6} \leqslant \arg\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{\pi}{2}$;

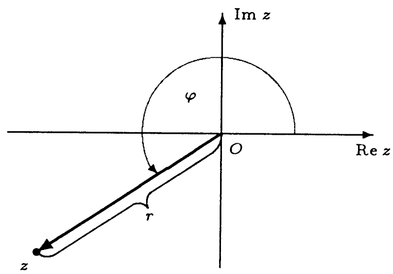
j) $\arg(-\bar{z}) \geqslant \frac{\pi}{2}$; k) $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z+1) \leqslant \frac{\pi}{4}$; l) $\arg\left(\frac{1}{z+i}\right) < \pi$.

1.4 Postać trygonometryczna liczby zespolonej

■ **Fakt 1.4.1** *(postać trygonometryczna liczby zespolonej)*
Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie $r \geqslant 0$ oraz $\varphi \in \boldsymbol{R}$. Liczba r jest wówczas modułem liczby z, a φ jednym z jej argumentów (rys. 1.4.1).



Rys. 1.4.1. Interpretacja geometryczna postaci trygonometrycznej liczby zespolonej.

○ **Ćwiczenie 1.4.2**
Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej (w razie potrzeby wykorzystać kalkulator):

a) $z = -1$; b) $z = 1 + i$; c) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
d) $z = 3 + i$; e) $z = 4 - i$; f) $z = -2 + i$.

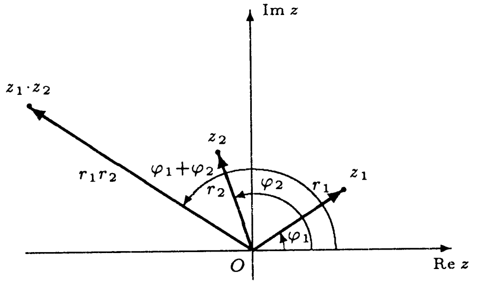
● **Fakt 1.4.3** *(równość liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej)*
Liczby zespolone $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, gdzie $r_1, r_2 \geqslant 0$ oraz $\varphi_1, \varphi_2 \in \boldsymbol{R}$, są równe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$r_1 = r_2 = 0 \text{ albo } r_1 = r_2 > 0 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi \text{ dla pewnego } k \in \boldsymbol{Z}.$$

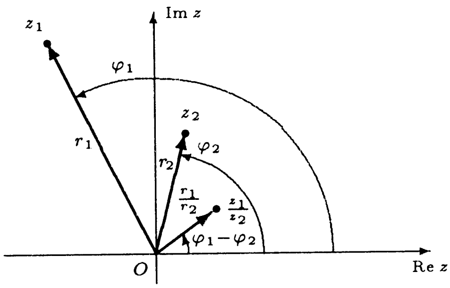
● **Fakt 1.4.4** *(mnożenie i dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej)*
Niech $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, gdzie r_1, $r_2 \geqslant 0$ oraz φ_1, $\varphi_2 \in \boldsymbol{R}$, będą liczbami zespolonymi. Wtedy

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right], \quad \text{o ile } z_2 \neq 0.$$



Rys. 1.4.2. Mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.



Rys. 1.4.3. Dzielenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.

Inaczej mówiąc, przy mnożeniu liczb zespolonych ich moduły mnożymy, a argumenty dodajemy (rys. 1.4.2). Podobnie, przy dzieleniu liczb zespolonych ich moduły dzielimy, a argumenty odejmujemy (rys. 1.4.3).

Uwaga. Pierwszy ze wzorów w ostatnim fakcie jest prawdziwy także dla dowolnej liczby czynników.

○ **Ćwiczenie 1.4.5**
Korzystając z postaci trygonometrycznej obliczyć podane iloczyny:
a) $(1-i)\left(\sqrt{3}+i\right)$; b) $(4+4i)(-3+3i)$; c) $\left(10-10\sqrt{3}i\right)(2-2i)$.

○ **Ćwiczenie 1.4.6**
Korzystając z postaci trygonometrycznej obliczyć podane ilorazy:
a) $\dfrac{2+2i}{1-i}$; b) $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$; c) $\dfrac{3i}{1+i}$.

● **Fakt 1.4.7** *(o argumentach iloczynu, potęgi oraz ilorazu)*
Niech z, z_1, $z_2 \in \boldsymbol{C}$ oraz niech $n \in \boldsymbol{N}$. Wtedy

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ dla $k = 0$ lub $k = -1$;
2. $\arg(z^n) = n\arg z + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \boldsymbol{Z}$;
3. $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$ dla $k = 0$ lub $k = 1$, o ile $z_2 \neq 0$.

Uwaga. Liczbę k dobieramy (w zależności od wartości z, z_1, z_2 oraz n) w ten sposób, aby argument główny należał do przedziału $[0, 2\pi)$.

○ **Ćwiczenie 1.4.8**
Znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

a) $z^2 = (\overline{z})^2$; b) $z^3 = -\overline{z}$; c) $z^3 = -8i$; d) $\overline{z} \cdot z^4 = \frac{1}{z}$.

○ **Ćwiczenie 1.4.9**
Znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

a) $\arg\left[(1+i)z\right] = \frac{3\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4} \leqslant \arg\frac{i}{z} \leqslant \frac{\pi}{2}$; c) $\arg\left(z^4\right) = \pi$; d) $\arg\left(z^3\right) < \frac{\pi}{2}$.

○ **Ćwiczenie* 1.4.10**
Obliczyć $(5-i)^4(1+i)$ i następnie uzasadnić równość

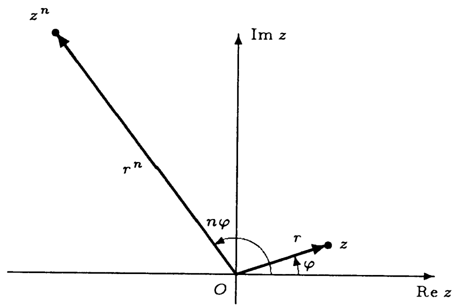
$$\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}.$$

Równość tę zwaną wzorem Machina stosuje się do obliczeń przybliżonych liczby π. Korzysta się przy tym z rozwinięcia funkcji $\mathrm{arctg}\,x$ w szereg potęgowy

$$\mathrm{arctg}\,x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

■ **Fakt 1.4.11** *(wzór de Moivre'a[§])*
Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r \geqslant 0$, $\varphi \in \boldsymbol{R}$ oraz niech $n \in \boldsymbol{N}$. Wtedy

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$



Rys. 1.4.4. Ilustracja do wzoru de Moivre'a.

○ **Ćwiczenie 1.4.12**
Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć podane potęgi liczb zespolonych:
a) $(1+i)^{10}$; b) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{60}$; c) $\left(\sqrt{2}i - \sqrt{2}\right)^{44}$.

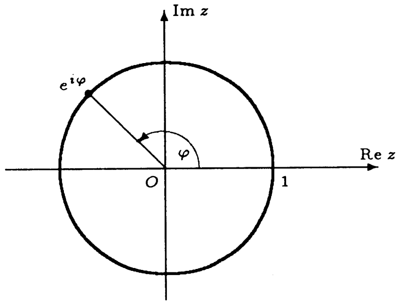
○ **Ćwiczenie 1.4.13**
Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić podane funkcje kąta φ przez $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$:
a) $\cos 3\varphi$; b) $\sin 4\varphi$; c) $\cos 6\varphi$.

[§] Abraham de Moivre (1667– 1754), matematyk angielski pochodzenia francuskiego.

1.5 Postać wykładnicza liczby zespolonej

• **Definicja 1.5.1** *(symbol $e^{i\varphi}$)*
Dla $\varphi \in \boldsymbol{R}$ liczbę zespoloną $\cos\varphi + i\sin\varphi$ oznaczamy krótko przez $e^{i\varphi}$;

$$e^{i\varphi} \stackrel{def}{=} \cos\varphi + i\sin\varphi.$$



Rys. 1.5.1. Interpretacja geometryczna liczby $e^{i\varphi}$.

○ **Ćwiczenie 1.5.2**
Obliczyć wartości podanych wyrażeń i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej:

a) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; b) $e^{\pi i}$; c) $e^{2\pi i}$; d) $e^{-\frac{4}{3}\pi i}$; e) e^{i}; f) e^{-2i}.

• **Fakt 1.5.3** *(własności symbolu $e^{i\varphi}$)*
Niech φ, φ_1, φ_2 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz niech k będzie dowolną liczbą całkowitą. Wtedy

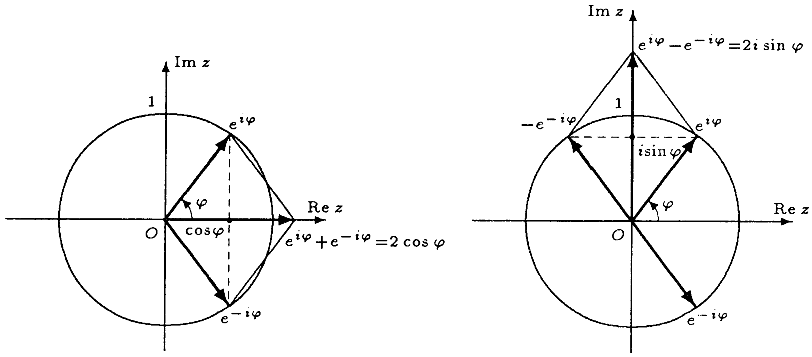
1. $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$;
2. $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}$;
3. $\left(e^{i\varphi}\right)^k = e^{ik\varphi}$;
4. $e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{i\varphi}$;
5. $e^{i\varphi} \neq 0$;
6. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \Longleftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2l\pi$, gdzie $l \in \boldsymbol{Z}$;
7. $\left|e^{i\varphi}\right| = 1$;
8. $\arg\left(e^{i\varphi}\right) = \varphi + 2l\pi$ dla pewnego $l \in \boldsymbol{Z}$.

○ **Ćwiczenie* 1.5.4**
Uzasadnić wzory podane w powyższym fakcie.

• **Fakt 1.5.5** *(wzory Eulera¶)*
Niech $x \in \boldsymbol{R}$. Wówczas zachodzą wzory:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

¶Leonard Euler (1707–1783), matematyk, fizyk i astronom szwajcarski.



Rys. 1.5.2. Ilustracja wzorów Eulera.

○ **Ćwiczenie 1.5.6**

Korzystając ze wzorów Eulera wyrazić podane funkcje w zależności od sinusów i cosinusów wielokrotności kąta x:

a) $\sin^2 x$; b) $\cos^3 x$; c) $\sin^4 x$; d) $\cos^5 x$; e) $\sin^6 x$.

Uwaga. Otrzymane zależności wykorzystuje się do obliczania całek postaci:

$$\int \sin^n x\, dx, \quad \int \cos^n x\, dx, \quad \text{gdzie } n \in \boldsymbol{N}.$$

○ **Ćwiczenie 1.5.7**

Korzystając ze wzorów Eulera przedstawić podane iloczyny w postaci sum sinusów i cosinusów:

a) $\sin\alpha\cos\beta$; b) $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; c) $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta$.

○ **Ćwiczenie* 1.5.8**

Obliczyć sumy:

a) $1+\cos 2x+\cos 4x+\ldots+\cos 2nx$; b) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$.

● **Fakt 1.5.9** *(postać wykładnicza liczby zespolonej)*

Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci wykładniczej, tj. w postaci

$$z = re^{i\varphi},$$

gdzie $r \geqslant 0$ oraz $\varphi \in \boldsymbol{R}$. Liczba r jest wówczas modułem liczby z, a φ jej argumentem.

○ **Ćwiczenie 1.5.10**

Podane liczby zespolone zapisać w postaci wykładniczej:

a) $z=-1$; b) $z=1+i$; c) $z=-i$; d) $z=1-\sqrt{3}i$; e) $z=-2+7i$.

W ćwiczeniu e) wykorzystać kalkulator.

- **Fakt 1.5.11** *(o równości liczb zespolonych w postaci wykładniczej)*
Niech $r_1, r_2 \geqslant 0$ oraz $\varphi_1, \varphi_2 \in \boldsymbol{R}$. Wówczas

$$r_1 e^{i\varphi_1} = r_2 e^{i\varphi_2} \iff r_1 = r_2 = 0 \text{ albo } r_1 = r_2 > 0 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \boldsymbol{Z}.$$

- **Fakt 1.5.12** *(działania na liczbach zespolonych w postaci wykładniczej)*
Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, gdzie $r, r_1, r_2 \geqslant 0$ oraz $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \boldsymbol{R}$, będą liczbami zespolonymi. Ponadto niech k będzie liczbą całkowitą. Wtedy

1. $\overline{z} = re^{-i\varphi}$;

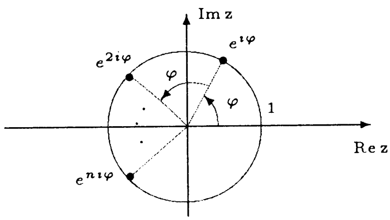
2. $-z = re^{i(\varphi+\pi)}$;

3. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\varphi}$, o ile $z \neq 0$;

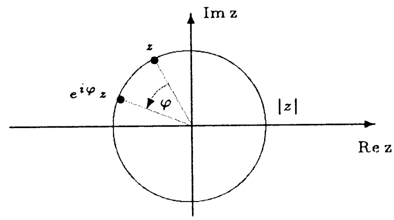
4. $z^k = r^k e^{ik\varphi}$;

5. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;

6. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$, o ile $z_2 \neq 0$.



Rys. 1.5.3. Interpretacja potęgowania liczby $e^{i\varphi}$.



Rys. 1.5.4. Interpretacja mnożenia liczby zespolonej przez liczbę $e^{i\varphi}$.

○ **Ćwiczenie 1.5.13**
Korzystając z postaci wykładniczej liczby zespolonej znaleźć i narysować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:
a) $z^2 = \overline{z}$; b) $\left|z^4\right| = z$; c) $z^3 \cdot (\overline{z})^2 = -1$; d) $z^3 = (\overline{z})^3$; e) $z^3 = (2+2i)^6$.

1.6 Pierwiastkowanie liczb zespolonych

- **Definicja 1.6.1** *(pierwiastek z liczby zespolonej)*
Pierwiastkiem stopnia $n \in \boldsymbol{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą równość:

$$w^n = z.$$

Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Uwaga. Symbol $\sqrt[n]{\ }$ ma inne znaczenie w odniesieniu do liczb rzeczywistych, a inne do liczb zespolonych (w tym także rzeczywistych traktowanych jak zespolone). Pierwiastek w dziedzinie rzeczywistej jest określony jednoznacznie i jest to funkcja $\boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ dla n nieparzystych oraz funkcja $[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dla n parzystych. Pierwiastkowanie w dziedzinie zespolonej jest natomiast szukaniem rozwiązań równania $w^n = z$, zatem $\sqrt[n]{z}$ jest zbiorem rozwiązań tego równania. Symbolu pierwiastka w dziedzinie zespolonej **nie wolno używać** do obliczeń, gdyż jest on niejednoznaczny, a podstawowe wzory dla pierwiastków, prawdziwe w dziedzinie rzeczywistej, tutaj nie mają sensu. Poniższe zestawienie ilustruje omawiane różnice:

w $\boldsymbol{R}$	w $\boldsymbol{C}$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{4}=\{-2,2\}$
$\sqrt[4]{1}=1$	$\sqrt[4]{1}=\{1,i,-1,-i\}$
$\sqrt{-1}$ nie istnieje	$\sqrt{-1}=\{i,-i\}$
$\sqrt{x^4}=x^2$	$\sqrt{z^4}=\left\{z^2,-z^2\right\}$
$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$	$\sqrt{z^2}=\{z,-z\}$

○ **Ćwiczenie 1.6.2**

Wybierając dogodną postać liczb zespolonych obliczyć z definicji podane pierwiastki:

a) $\sqrt{-7+24i}$; b) $\sqrt[4]{-1}$; c) $\sqrt[3]{-2-2i}$; d) $\sqrt[3]{1+5i}$.

W ćwiczeniu d) wykorzystać kalkulator.

■ **Fakt 1.6.3** *(wzór na pierwiastki z liczby zespolonej)*

Każda liczba zespolona $z=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gdzie $r>0$ oraz $\varphi\in\boldsymbol{R}$, ma dokładnie n pierwiastków stopnia n. Zbiór tych pierwiastków ma postać:

$$\sqrt[n]{z}=\{z_0,z_1,\ldots,z_{n-1}\},$$

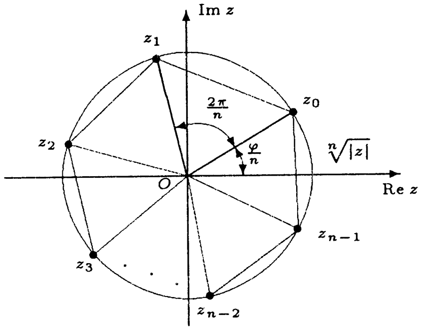
gdzie $z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ dla $k=0,1,\ldots,n-1$.

Uwaga. Zbiór pierwiastków nie zależy od wyboru argumentu liczby zespolonej. Jeżeli φ jest jej argumentem głównym, to pierwiastek $z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$ ma najmniejszy nieujemny argument. Dla innych argumentów pierwiastek z_0 może być położony w dowolnym z n miejsc. Ponadto dla $k=0,1,\ldots,n-2$ prawdziwa jest zależność:

$$z_{k+1}=z_k\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z_0\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{k+1}.$$

Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków

Zbiór pierwiastków stopnia $n\geqslant 3$ z liczby zespolonej $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, gdzie $r=\lvert z\rvert$ oraz $\varphi=\arg z$, pokrywa się ze zbiorem wierzchołków n–kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{r}$ i środku w początku układu współrzędnych. Jeden z wierzchołków tego wielokąta jest w punkcie $z_0=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$, a kąty między promieniami wodzącymi kolejnych wierzchołków są równe $\dfrac{2\pi}{n}$ (rys. 1.6.1).



Rys. 1.6.1. Interpretacja geometryczna zbioru pierwiastków z liczby zespolonej.

○ **Ćwiczenie 1.6.4**
Obliczyć i narysować podane pierwiastki z liczb zespolonych:

a) $\sqrt[3]{8i}$; b) $\sqrt[6]{-27}$; c) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$; d) $\sqrt[8]{1}$; e) $\sqrt[5]{3+7i}$.
W ćwiczeniu e) wykorzystać kalkulator.

○ **Ćwiczenie 1.6.5**
Rozwiązać podane równania kwadratowe:
a) $z^2+3z+3-i=0$; b) $z^2+(2i-1)z+1+5i=0$.

○ **Ćwiczenie 1.6.6**
Znaleźć wszystkie rozwiązania podanych równań:
a) $z^6=(1+2i)^{12}$; b) $z^3=(1-i)^3$; c) $(z-i)^4=(iz+3)^4$; d*) $(z+1)^6+z^6=0$.

1.7 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Faktu 1.2.3** *(postać algebraiczna liczby zespolonej)*
Zauważmy, że $(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)$, co po utożsamieniu liczb postaci $(x,0)$ z liczbami x oznacza, że $z=x+iy$ dla $x,y\in \boldsymbol{R}$. Jednoznaczność tego przedstawienia wynika z tego, że gdyby jednocześnie zachodził związek $z=x_1+iy_1$ dla $x_1,y_1\in\boldsymbol{R}$, to mielibyśmy $(x_1,0)+(0,1)(y_1,0)=(x_1,y_1)=(x,y)$, a więc $x_1=x$, $y_1=y$.

■ **Dowód Faktu 1.2.10** *(własności sprzężenia liczb zespolonych)*
Udowodnimy własności **1.**, **4.** i **5.** pozostawiając pozostałe Czytelnikowi. Niech $z=x+iy$, $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, gdzie $x,y,x_1,y_1,x_2,y_2\in\boldsymbol{R}$. Wtedy

1. $$\overline{z_1+z_2}=\overline{x_1+iy_1+x_2+iy_2}=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}$$
$$=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=x_1-iy_1+x_2-iy_2=\overline{z}_1+\overline{z}_2.$$

4. $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{\left(\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\right)}=\overline{\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2^2+y_2^2)}}=\overline{\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}-\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i=\frac{(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}.$$

5. $z+\overline{z}=(x+iy)+(x-iy)=2x=2\,\mathrm{Re}\,z$.

■ **Dowód Faktu 1.3.3** *(własności modułu liczby zespolonej)*
Niech $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, gdzie $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \boldsymbol{R}$. Wtedy

1. $$|\overline{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|,$$
$$|-z| = |-x - iy| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

2. $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2 = |z|^2$.

3. Korzystając z własności 2. otrzymamy
$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = (z_1 \overline{z}_1)(z_2 \overline{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1|\,|z_2|)^2 .$$
Pierwiastkując obustronnie dostaniemy żądaną równość.

4. Wykorzystując poprzednie własności mamy
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1 \overline{z}_2}{|z_2|^2}\right| = \frac{1}{|z_2|^2}\,|z_1 \overline{z}_2| = \frac{1}{|z_2|^2}\,|z_1|\,|z_2| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

5. Wykorzystamy interpretację geometryczną liczb zespolonych. Rozważana nierówność jest relacją między długościami boków trójkąta o wierzchołkach w punktach 0, z_1, $z_1 + z_2$. Bezpośrednie uzasadnienie tej nierówności ma postać
$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| &\iff \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\
&\iff x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 \\
&\qquad \leqslant x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} + x_2^2 + y_2^2 \iff
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
&\iff x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\
&\Longleftarrow (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leqslant \left(x_1^2 + y_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2\right) \\
&\iff (x_1x_2)^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + (y_1y_2)^2 \\
&\qquad\qquad \leqslant (x_1x_2)^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + (y_1y_2)^2 \\
&\iff (x_1y_2)^2 - 2(x_1y_1)(x_2y_1) + (x_2y_1)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

6. Z poprzedniej nierówności wynika, że
$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$$
oraz
$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leqslant |z_2 - z_1| + |z_1|.$$
Zatem
$$-|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|, \quad \text{więc} \quad \big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|.$$

7. Mamy
$$\operatorname{Re} z = x \leqslant |x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad \operatorname{Im} z = y \leqslant |y| = \sqrt{y^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

8. Uzasadnieniem tej nierówności jest podany niżej ciąg równoważnych nierówności

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)| \leqslant |z_1||z_2| &\iff |x_1x_2 + y_1y_2| \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_1^2}\\
&\iff (x_1x_2+y_1y_2)^2 \leqslant \left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)\\
&\iff (x_1x_2)^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + (y_1y_2)^2\\
&\qquad\qquad \leqslant (x_1x_2)^2 + x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 + (y_1y_2)^2\\
&\iff (x_1y_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (x_2y_1)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

■ **Dowód Faktu 1.4.1** *(postać trygonometryczna liczby zespolonej)*

Dla liczby $z = 0$ mamy $r = |z| = 0$ i równość zachodzi dla dowolnej wartości $\varphi \in \boldsymbol{R}$. Dla $z \neq 0$ mamy

$$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie r jest modułem, a φ argumentem liczby z. Gdyby równość $z = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ zachodziła dla innych liczb $r_1 \geqslant 0$, $\varphi \in \boldsymbol{R}$, to mielibyśmy

$$|z| = \sqrt{(r_1\cos\varphi_1)^2 + (r_1\sin\varphi_1)^2} = r_1 = r.$$

Z układu równań $\cos\varphi_1 = \cos\varphi$, $\sin\varphi_1 = \sin\varphi$ wynika związek $\varphi_1 = \varphi + 2k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$. Zatem liczba φ_1 też jest argumentem liczby z.

■ **Dowód Faktu 1.4.11** *(wzór de Moivre'a)*

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ wzór jest oczywisty. Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla liczby naturalnej n. Mamy zatem

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Pokażemy, że wzór ten jest prawdziwy dla liczby naturalnej $n + 1$. Mamy

$$
\begin{aligned}
z^{n+1} = z^n \cdot z &\underset{\text{ind.}}{\overset{\text{zał.}}{=}} [r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)][r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]\\
&= r^{n+1}[\cos n\varphi\cos\varphi - \sin n\varphi\sin\varphi + i(\sin n\varphi\cos\varphi + \cos n\varphi\sin\varphi)]\\
&= r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi].
\end{aligned}
$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej n.

■ **Dowód Faktu 1.6.3** *(wzór na pierwiastki z liczby zespolonej)*

Szukamy wszystkich rozwiązań równania $w^n = z$. Niech $w = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, gdzie $\varrho > 0$ oraz $\alpha \in \boldsymbol{R}$, będzie rozwiązaniem tego równania. Wtedy, po zastosowaniu wzoru de Moivre'a, otrzymamy

$$w^n = \varrho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Stąd wynika, że $\varrho^n = r$ oraz $n\alpha = \varphi + 2k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$. Zatem $\varrho = \sqrt[n]{r}$ oraz $\alpha = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$. Niech $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$ będzie pierwiastkiem odpowiadającym wartości k. Z uwagi na okresowość funkcji trygonometrycznych pierwiastki z_k oraz z_{k+n} pokrywają się, więc istnieje tylko n parami różnych pierwiastków $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ liczby zespolonej z.

1.8 Odpowiedzi i wskazówki

1.1.4 a) $(3,-3)$, $\left(3+\sqrt{2},-7\right)$; b) $(4,3)$, $\left(3\sqrt{2}-12,-9-4\sqrt{2}\right)$.

1.1.9 a) $(7,-6)$; b) $\left(-\dfrac{11}{25},-\dfrac{2}{25}\right)$; c) $(-3,0)$.

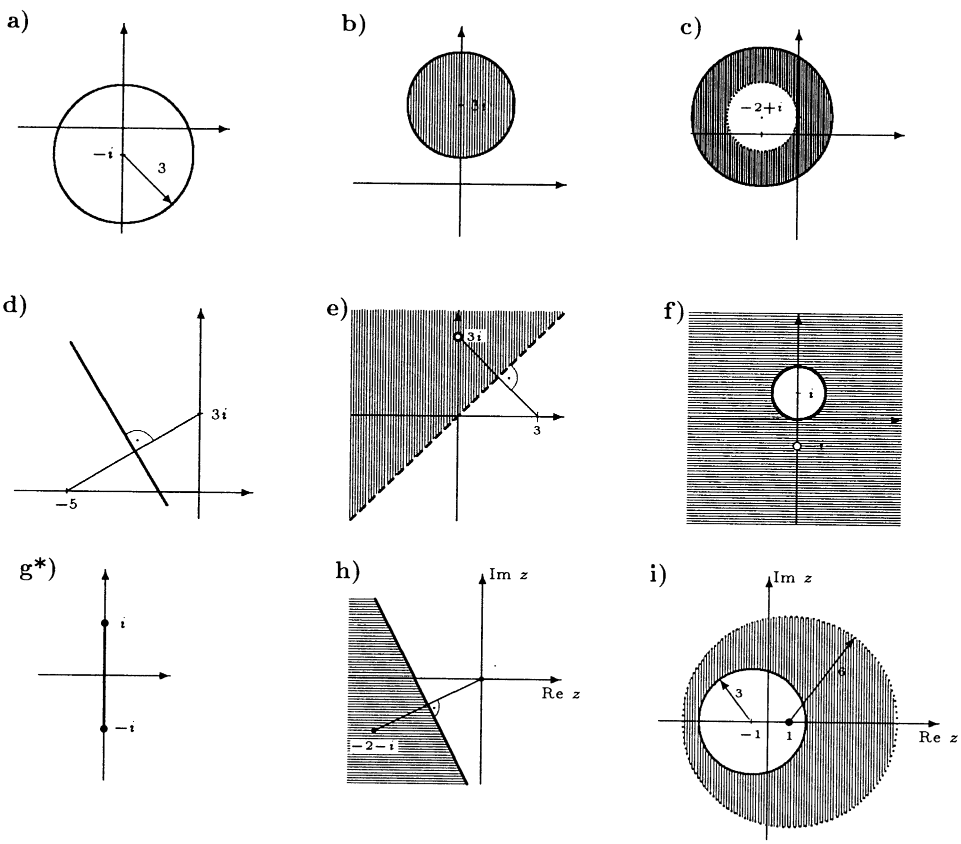
1.2.5 a) $2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)i$; b) $-3+5i$; c) $-11-2i$; d) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{14}{5}i$.

1.2.8 a) $\sqrt{2}\,(1-i)$, $-\sqrt{2}\,(1-i)$; b) $2+3y+iy$, $y\in \boldsymbol{R}$; c) $x+iy$, $x\in\boldsymbol{R}$, $y\leqslant -1$; d) $-\dfrac{19}{29}-\dfrac{25}{29}i$; e) $3-i$, $3+i$.

1.2.11 a) $\dfrac{1}{6}-\dfrac{25}{6}i$; b) $x-i$, $x\in\boldsymbol{R}$; c) $\sqrt{2}+i$, $-\sqrt{2}+i$; d) $\emptyset$.

1.3.2 a) 1; b) $\sqrt{10}$; c) 1; d) 13.

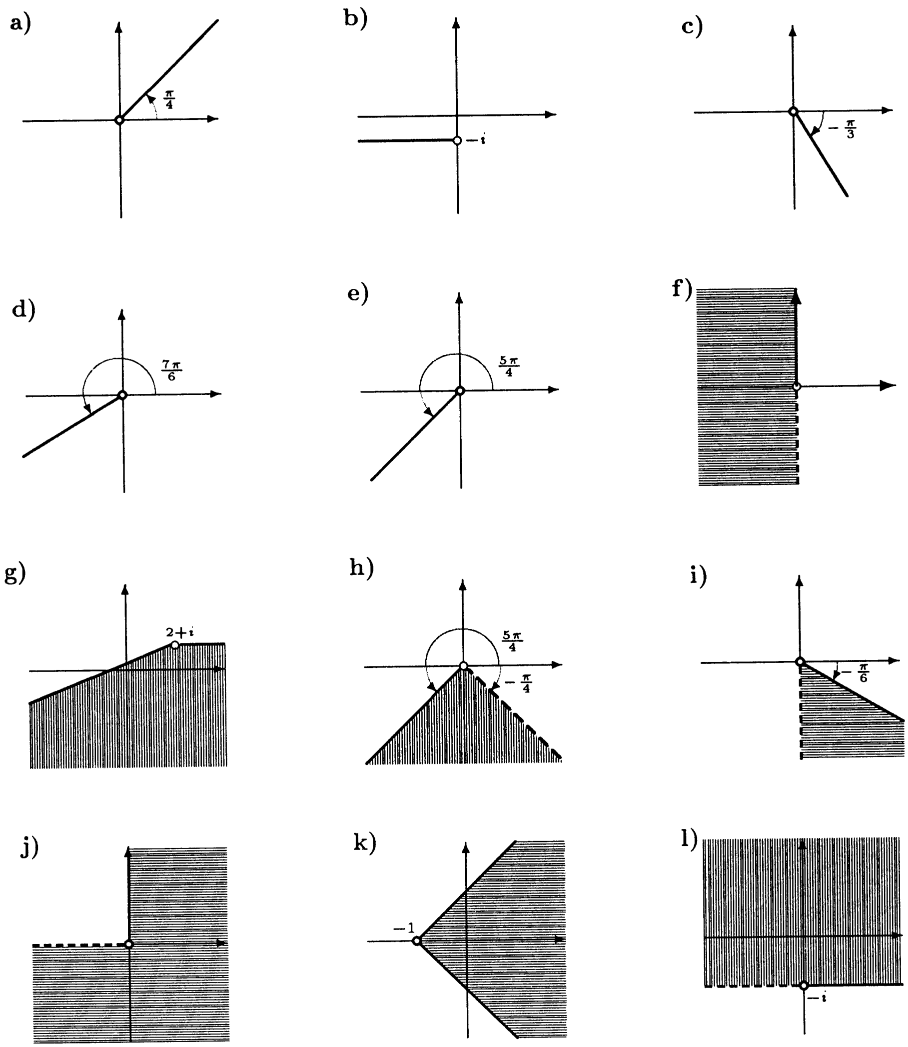
1.3.4



1.3.5 Suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości wszystkich jego boków. Wzór podany w zadaniu jest nazywany równością równoległoboku.

1.3.7 a) 0; b) $\frac{\pi}{2}$; c) π; d) $\frac{7\pi}{4}$; e) $\frac{4\pi}{3}$; f) $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

1.3.9

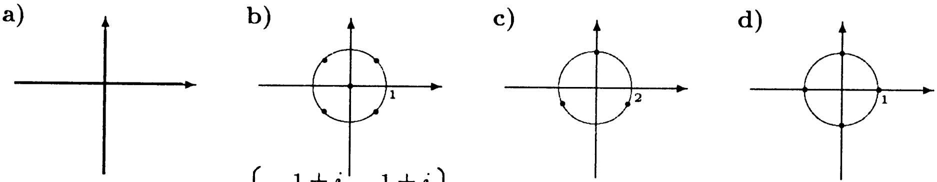


1.4.2 a) $1\,(\cos\pi + i\sin\pi)$; b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; c) $1\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;
d) $\sqrt{10}\left(\cos\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + i\sin\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$; e) $\sqrt{17}\left(\cos\left(2\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right) + i\sin\left(2\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)\right)$;
f) $\sqrt{5}\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\right)$;

1.4.5 a) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$; b) -24; c) $40\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$;

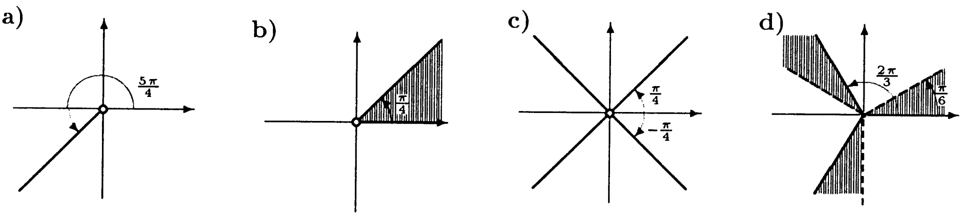
1.4.6 a) $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; b) $-i = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;
c) $\frac{3}{2}(1+i) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

1.4.8



suma obu osi $\qquad \left\{0, \frac{1\pm i}{\sqrt{2}}, \frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}\right\} \qquad \left\{2i, \sqrt{3}\pm i\right\} \qquad \{\pm 1, \pm i\}$

1.4.9



1.4.12 a) $32i$; b) 2^{60}; c) -2^{44}.

1.4.13 a) $\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$; b) $4\sin\varphi\cos\varphi\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)$;
c) $\cos^6\varphi - 15\cos^4\varphi\sin^2\varphi + 15\cos^2\varphi\sin^4\varphi - \sin^6\varphi$.

1.5.2 a) i; b) -1; c) 1; d) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $\cos 1 + i\sin 1$; f) $\cos 2 - i\sin 2$.

1.5.6 a) $\frac{1-\cos 2x}{2}$; b) $\frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$; c) $\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$;
d) $\frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x$; e) $-\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}$.

1.5.7 a) $\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$;
b) $\frac{1}{4}\left[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\alpha-\beta+\gamma)-\sin(\alpha-\beta-\gamma)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\right]$;
c*) $\frac{1}{8}\left[\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\cos(\alpha-\beta+\gamma+\delta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma+\delta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma-\delta)\right.$
$\left.+\cos(\alpha-\beta-\gamma+\delta)+\cos(\alpha-\beta+\gamma-\delta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)+\cos(\alpha-\beta-\gamma-\delta)\right]$.

1.5.8 a) $\frac{\sin\left[(n+1)x\right]\cos(nx)}{\sin x}$ dla $x \neq k\pi$ oraz $n+1$ dla $x = k\pi$, gdzie $k \in Z$;
b) $\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ dla $x \neq 2k\pi$ oraz 0 dla $x = 2k\pi$, gdzie $k \in Z$.

1.5.10 a) $e^{i\pi}$; b) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; c) $e^{i\frac{3\pi}{2}}$; d) $2e^{i\frac{5\pi}{3}}$; e) $\sqrt{53}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{2}{7}\right)}$.

1.5.13 a) $0,\ 1,\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; **b)** $0,\ 1$; **c)** -1; **d)** suma sześciu półprostych postaci $\varphi=\frac{k\pi}{3}$, $k=0,1,2,3,4,5$; **e)** $8i,\ 4\sqrt{3}-4i,\ -4\sqrt{3}-4i$.

1.6.2 a) $\{3+4i,-3-4i\}$, **b)** $\left\{\frac{1+i}{\sqrt{2}},\frac{1-i}{\sqrt{2}},\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right\}$;

c) $\left\{1-i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$;

d) $\left\{\sqrt[6]{26}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}5}{3}+i\sin\frac{\operatorname{arctg}5}{3}\right),\sqrt[6]{26}\left(\cos\frac{2\pi+\operatorname{arctg}5}{3}+i\sin\frac{2\pi+\operatorname{arctg}5}{3}\right),\right.$
$\left.\sqrt[6]{26}\left(\cos\frac{4\pi+\operatorname{arctg}5}{3}+i\sin\frac{4\pi+\operatorname{arctg}5}{3}\right)\right\}$.

1.6.4 a) $\{\sqrt{3}+i,-\sqrt{3}+i,-2i\}$;

b) $\left\{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}i,-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{3}i,\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$;

c) $\left\{\frac{\sqrt{3}+i}{2},\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-\sqrt{3}-i}{2},\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$;

d) $\left\{1,\frac{1+i}{\sqrt{2}},i,\frac{-1+i}{\sqrt{2}},-1,\frac{-1-i}{\sqrt{2}},-i,\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}$;

e) $\left\{\sqrt[10]{58}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\frac{7}{3}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\operatorname{arctg}\frac{7}{3}+2k\pi}{5}\right):k=0,1,2,3,4\right\}$.

1.6.5 a) $z_1=-2-i$, $z_2=-1+i$; **b)** $z_1=2-3i$, $z_2=-1+i$.

1.6.6 a) $z_1=-3+4i$, $z_2=-\frac{3}{2}-2\sqrt{3}+2i-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=\frac{3}{2}-2\sqrt{3}-2i-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_4=-z_1$, $z_5=-z_2$, $z_6=-z_3$;

b) $z_1=1-i$, $z_2=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right]$, $z_3=-\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i\right]$;

c) $z_1=1+2i$, $z_2=2i$, $z_3=-1+2i$; **d*)** $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}i$, $z_4=-\frac{1}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}i$, $z_5=-\frac{1}{2}-\frac{2-\sqrt{3}}{2}i$, $z_6=-\frac{1}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}i$.

2

WIELOMIANY

2.1 Podstawowe definicje i własności

• **Definicja 2.1.1** *(wielomian rzeczywisty)*
Wielomianem rzeczywistym stopnia $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ określoną wzorem:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_k \in \boldsymbol{R}$ dla $0 \leqslant k \leqslant n$ oraz $a_n \neq 0$. Ponadto przyjmujemy, że funkcja $W(x) \equiv 0$ jest wielomianem stopnia $-\infty$. Liczby a_k, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$, nazywamy współczynnikami wielomianu W.

• **Przykład 2.1.2**
Funkcje $P(x) \equiv \sqrt{3}$, $Q(x) = -x^3 + \frac{3}{4}x - 15$ oraz $R(x) = \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{7}x^7 + x$ są wielomianami rzeczywistymi odpowiednio stopnia 0, 3 oraz 9.

• **Definicja 2.1.3** *(wielomian zespolony)*
Wielomianem zespolonym stopnia $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ nazywamy funkcję $W : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$ określoną wzorem:

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0,$$

gdzie $c_k \in \boldsymbol{C}$ dla $0 \leqslant k \leqslant n$ oraz $c_n \neq 0$. Podobnie przyjmujemy, że $W(z) \equiv 0$ jest wielomianem stopnia $-\infty$. Liczby c_k, gdzie $0 \leqslant k \leqslant n$, nazywamy współczynnikami wielomianu W.

Uwaga. Każdy wielomian rzeczywisty można traktować jako wielomian zespolony rozszerzając jego dziedzinę z $\boldsymbol{R}$ na $\boldsymbol{C}$. Tak będziemy postępować przy omawianiu pierwiastków zespolonych wielomianów rzeczywistych. Wielomian zespolony lub rzeczywisty będziemy nazywali krótko wielomianem.

• **Przykład 2.1.4**
Funkcje $W(z) \equiv 1 - 2i$, $V(z) = z^2 + 1$ oraz $U(z) = iz^{15} + (2 - 3i)z^6 + 4 - i$ są wielomianami zespolonymi odpowiednio stopnia 0, 2 oraz 15.

• **Definicja 2.1.5** *(suma, różnica i iloczyn wielomianów)*
Niech P i Q będą wielomianami. Sumę, różnicę i iloczyn wielomianów P i Q określamy w sposób naturalny, tj. przyjmujemy:

$$(P \pm Q)(x) \stackrel{def}{=} P(x) \pm Q(x),$$
$$(P \cdot Q)(x) \stackrel{def}{=} P(x) \cdot Q(x).$$

Uwaga. Oczywiście suma i iloczyn wielomianów nadal są wielomianami.

○ **Ćwiczenie 2.1.6**
Obliczyć sumy i różnice podanych wielomianów:

a) $P(x) = 1 - x^2$, $Q(x) = -1 + 5x + x^2$;

b) $P(x) = 2x^5 - 5x^2 + x$, $Q(x) = 2x^2 - 2x + 3$;

c) $W(z) = (1 + i)z^2 - 2z$, $V(z) = iz^3 - z^2 - 1 + 5i$.

○ **Ćwiczenie 2.1.7**
Obliczyć iloczyny podanych wielomianów:

a) $P(x) = 4 - x^2$, $Q(x) = 1 + 2x^3$;

b) $P(x) = 1 - x$, $Q(x) = x^5 + x^3 + x + 1$;

c) $W(z) = z^2 + i$, $V(z) = (1 - i)z^3 + iz + 3 - 2i$.

• **Definicja 2.1.8** *(podzielność wielomianów)*
Mówimy, że wielomian S jest ilorazem, a wielomian R resztą z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q, jeżeli dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ $(x \in \boldsymbol{C})$ spełniony jest warunek

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$$

oraz stopień reszty R jest mniejszy od stopnia dzielnika Q.
Jeżeli $R(x) \equiv 0$, to mówimy, że wielomian P jest podzielny przez wielomian Q.

○ **Ćwiczenie 2.1.9**
Obliczyć ilorazy i reszty powstałe z dzielenia podanych wielomianów:

a) $P(x) = 8x^4 + 3x^2 + 5x - 6$, $Q(x) = x + 1$;

b) $P(x) = x^3 + 27$, $Q(x) = x^2 - 3x + 9$;

c) $P(z) = iz^3 + 2z - 1 + 3i$, $Q(z) = z - 2i$;

d) $P(z) = z^4 + 1$, $Q(z) = z^2 - i$.

2.2 Pierwiastki wielomianów

• **Definicja 2.2.1** *(pierwiastek wielomianu)*
Liczbę rzeczywistą (zespoloną) x_0 nazywamy pierwiastkiem rzeczywistym (zespolonym) wielomianu W, jeżeli $W(x_0) = 0$.

○ **Ćwiczenie 2.2.2**
Sprawdzić, że podane liczby są pierwiastkami wskazanych wielomianów:

a) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -i$, $x_4 = i$, $W(x) = x^4 - 1$;

b) $x_1 = -2$, $x_2 = 1 - i$, $x_3 = 1 + i$, $W(x) = x^3 - 2x + 4$;

c) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - 3i$, $W(z) = z^2 + 2iz + 2 - 4i$.

○ **Ćwiczenie 2.2.3**
Nie wykonując działań obliczyć reszty z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q, jeżeli:

a) $P(x) = x^4 - 1$, $Q(x) = x - 2$;

b) $P(x) = x^{100} + 4x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 - 1$;

c) $P(x) = x^{99} + 5x$, $Q(x) = x^2 + 1$.

■ **Twierdzenie 2.2.4** *(Bézout*)*
Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian P taki, że

$$W(x) = (x - x_0)\,P(x).$$

Uwaga. Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian $x - x_0$ jest równa $W(x_0)$.

○ **Ćwiczenie* 2.2.5**
Znaleźć wszystkie wielomiany W, które dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$ spełniają warunek

$$xW(x-1) = (x-26)W(x).$$

● **Definicja 2.2.6** *(pierwiastek wielokrotny wielomianu)*
Liczba x_0 jest pierwiastkiem k–krotnym wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian P taki, że

$$W(x) = (x - x_0)^k\,P(x) \quad \text{oraz} \quad P(x_0) \neq 0.$$

Uwaga. Jeżeli x_1 jest k_1-krotnym pierwiastkiem, x_2 jest k_2-krotnym pierwiastkiem, ..., x_m jest k_m-krotnym pierwiastkiem wielomianu, to wielomian ten jest podzielny przez iloczyn

$$(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_m)^{k_m}.$$

○ **Ćwiczenie 2.2.7**
Znaleźć krotności pierwiastków podanych wielomianów:

a) $x_0 = 2$, $W(x) = x^2 - 3x + 2$; b) $x_0 = 0$, $W(x) = x^5 - 4x^3$;

c) $x_0 = \sqrt{2}$, $W(x) = x^4 - 4x^2 + 4$; d) $z_0 = -i$, $W(z) = \left(z^2 + 1\right)^4$.

---

*Étienne Bézout (1730–1783), matematyk francuski.

● **Fakt* 2.2.8** *(o pierwiastkach wielokrotnych wielomianu)*
Liczba x_0 jest pierwiastkiem k–krotnym wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy

$$W(x_0) = W'(x_0) = \ldots = W^{(k-1)}(x_0) = 0 \text{ oraz } W^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

■ **Twierdzenie 2.2.9** *(o pierwiastkach całkowitych wielomianu)*
Niech

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych oraz niech liczba całkowita $p \neq 0$ będzie pierwiastkiem wielomianu W. Wtedy p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Uwaga. Wielomian o współczynnikach całkowitych może nie mieć pierwiastków całkowitych. Przykładami takich wielomianów są: $x^3 - 2$, $x^2 + 1$.

○ **Ćwiczenie 2.2.10**
Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:

a) $W(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 8$; b) $W(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$;

c) $W(x) = x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 3$; d) $W(x) = 4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - x - 2$.

■ **Twierdzenie 2.2.11** *(o pierwiastkach wymiernych wielomianu)*
Niech

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

będzie wielomianem stopnia n o współczynnikach całkowitych oraz niech liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, będzie pierwiastkiem wielomianu W. Wtedy p jest dzielnikiem współczynnika a_0, a q jest dzielnikiem współczynnika a_n tego wielomianu.

Uwaga. Jeżeli $a_n = 1$, to wszystkie wymierne pierwiastki wielomianu są całkowite.

○ **Ćwiczenie 2.2.12**
Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:

a) $W(x) = 4x^4 + x^2 - 3x + 1$; b) $W(x) = 4x^3 - 18x^2 - 2x + 5$;

c) $W(x) = 24x^3 - 10x^2 - 3x + 1$; d) $W(x) = x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$.

● **Fakt 2.2.13** *(pierwiastki trójmianu kwadratowego)*
Wielomian zespolony $W(z) = az^2 + bz + c$, gdzie $a, b, c \in \boldsymbol{C}$ oraz $a \neq 0$, ma dwa pierwiastki zespolone:

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a},$$

gdzie $\Delta = \delta^2 = b^2 - 4ac$.

Dla współczynników rzeczywistych a, b, c możliwe są trzy przypadki:

1. jeżeli $\Delta > 0$, to wielomian W ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste;
2. jeżeli $\Delta = 0$, to wielomian W ma jeden pierwiastek rzeczywisty dwukrotny $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$;
3. jeżeli $\Delta < 0$, to wielomian W nie ma pierwiastków rzeczywistych, ma natomiast dwa pierwiastki zespolone z_1, z_2 spełniające związek $z_1 = \overline{z}_2$.

○ **Ćwiczenie 2.2.14**
Znaleźć pierwiastki podanych trójmianów kwadratowych:

a) $W(x) = x^2 - 2x + 2$; b) $W(z) = 2z^2 + (6 - 2i)z + 4 - 3i$;

c) $W(z) = z^2 + (2 - i)z + 3 - i$; d) $W(z) = 6z^2 + (5i - 3)z - 1 - i$.

● **Twierdzenie* 2.2.15** *(wzory Cardana)*
Wielomian zespolony $W(z) = z^3 + pz + q$, gdzie $p, q \in \boldsymbol{C}$, ma trzy pierwiastki zespolone:

$$z_1 = u + v, \quad z_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v, \quad z_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v,$$

gdzie $u^3 = \dfrac{-q-\delta}{2}$, $v^3 = \dfrac{-q+\delta}{2}$, $\Delta = \delta^2 = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$ oraz $\varepsilon = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, przy czym wielkości u i v należy tak dobrać, aby $3uv = -p$.

Dla współczynników rzeczywistych p, q możliwe są trzy przypadki:

1. jeżeli $\Delta > 0$, to $u = \sqrt[3]{\dfrac{-q-\delta}{2}}$, $v = \sqrt[3]{\dfrac{-q+\delta}{2}}$ i wielomian W ma jeden pierwiastek rzeczywisty z_1 oraz dwa pierwiastki zespolone $z_2 = \overline{z}_3$;
2. jeżeli $\Delta < 0$, to $u = \overline{v}$ i wielomian W ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste
$$z_1 = 2\operatorname{Re} u, \quad z_2 = 2\operatorname{Re}(\varepsilon u), \quad z_3 = 2\operatorname{Re}\left(\varepsilon^2 u\right);$$
3. jeżeli $\Delta = 0$, to wielomian W ma trzy pierwiastki rzeczywiste, przy czym co najmniej dwa z nich są równe, tzn.
$$z_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}, \quad z_2 = z_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Uwaga*. Pierwiastki równań otrzymane ze wzorów Cardano mają zwykle skomplikowaną postać. Np. pierwiastek $x_1 = 1$ równania $x^3 + 3x - 4 = 0$ otrzymujemy w postaci $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$. Każde równanie $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, gdzie $a, b, c, d \in \boldsymbol{C}$ oraz $a \neq 0$, można przez podstawienie $z = y - \dfrac{b}{3a}$ sprowadzić do postaci $y^3 + py + q = 0$.

Notka historyczna. Wzory na pierwiastki wielomianów stopnia 3 i 4 zostały odkryte w XVI wieku. Dla wielomianów stopnia 3 znalazł je Tartaglia†, uczeń Car-

†Nicollo Tartaglia (1500-1557), matematyk włoski.

dana, zaś dla wielominów stopnia 4 Ferrari‡. W XIX wieku Abel§ i Galois¶ udowodnili, że dla wielomianów wyższych stopni takie wzory nie istnieją.

○ **Ćwiczenie* 2.2.16**
Stosując wzory Cardana znaleźć pierwiastki podanych wielomianów:

a) $W(z) = z^3 + 3z - 4$; b) $W(z) = z^3 + z + 1$; c) $W(z) = z^3 - 3z + \sqrt{3}$;

d) $W(z) = z^3 - 9z^2 + 21z - 5$; e) $W(z) = z^3 - 3z + 2$; f) $W(z) = z^3 - \sqrt{3}z + \frac{2}{3}\sqrt[4]{3}$.

2.3 Zasadnicze twierdzenie algebry

● **Twierdzenie 2.3.1** *(zasadnicze twierdzenie algebry)*
Każdy wielomian zespolony stopnia dodatniego ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Uwaga. W tabeli poniżej podane są przykłady równań wielomianowych o współczynnikach z danej klasy liczbowej, które nie mają pierwiastków w tej klasie, ale mają je w następnej.

Klasa liczb	Oznaczenie	Równanie
liczby naturalne	$\mathbf{N}$	$x + 5 = 0$
liczby całkowite	$\mathbf{Z}$	$4x + 5 = 0$
liczby wymierne	$\mathbf{Q}$	$x^2 - 2 = 0$
liczby rzeczywiste	$\mathbf{R}$	$x^2 + 3 = 0$
liczby zespolone	$\mathbf{C}$	każde równanie ma pierwiastek zespolony

Notka historyczna. Zasadnicze twierdzenie algebry zostało sformułowane w XVIII wieku przez Maclaurina‖ i Eulera. Twierdzenie to próbowali udowodnić najwięksi matematycy osiemnastowieczni: d'Alembert**, Euler, Lagrange††. Kilka dowodów tego twierdzenia podał Gauss w XIX wieku. W znanych współcześnie dowodach wykorzystuje się metody analizy matematycznej lub zaawansowane metody algebry.

■ **Fakt 2.3.2** *(o przedstawianiu wielomianu w postaci iloczynu dwumianów)*

1. Każdy wielomian zespolony stopnia $n \in \mathbf{N}$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (uwzględniając pierwiastki wielokrotne).

---

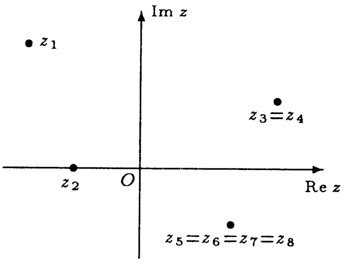
‡Ludovico Ferrari (1522-1565), matematyk włoski.
§Niels Henrik Abel (1802-1829), matematyk norweski.
¶Evariste Galois (1811-1832), matematyk francuski.
‖Colin Maclaurin (1698-1746), matematyk szkocki.
**Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), matematyk i fizyk francuski.
††Joseph Louis Lagrange (1736-1813), matematyk i fizyk francuski.

2. Niech wielomian W stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma pierwiastki zespolone z_j o krotnościach odpowiednio k_j, gdzie $k_j \in \mathbb{N}$ dla $1 \leqslant j \leqslant m$ oraz $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Wtedy

$$W(z) = c_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_m)^{k_m},$$

gdzie c_n jest współczynnikiem przy z^n w wielomianie W.

Przykład 2.3.3
Na rysunku obok pokazano przykładowe rozmieszczenie pierwiastków wielomianu zespolonego stopnia ósmego. Wielomian ten ma dwa pierwiastki jednokrotne, jeden pierwiastek dwukrotny oraz jeden 4-krotny.



Ćwiczenie 2.3.4
Podane wielomiany rozłożyć na iloczyny dwumianów:

a) $W(z) = z^2 + i$; b) $W(z) = z^3 + 1$;

c) $W(z) = z^6 + 3z^4 + 3z^2 + 1$; d) $W(z) = z^4 + 1$;

e) $W(z) = z^4 + iz^2 + 6$;m f) $W(z) = z^4 - (1 + i)^4$.

Fakt* 2.3.5 *(wzory Viète'a*[‡‡]*)*
Niech $W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$ będzie wielomianem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N}$. Wówczas liczby $z_1, z_2, \ldots, z_n$ są pierwiastkami wielomianu W (z uwzględnieniem krotności) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + \ldots + z_n & = & -\dfrac{c_{n-1}}{c_n}, \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n & = & \dfrac{c_{n-2}}{c_n}, \\ z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \ldots + z_{n-2} z_{n-1} z_n & = & -\dfrac{c_{n-3}}{c_n}, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1 z_2 z_3 \ldots z_{n-1} z_n & = & (-1)^n \dfrac{c_0}{c_n}. \end{cases}$$

Ćwiczenie* 2.3.6

a) Obliczyć sumę kwadratów wszystkich elementów zbioru $\sqrt[7]{-3}$;

b) Znaleźć sumę odwrotności pierwiastków zespolonych wielomianu $x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 7$;

c) Znaleźć pierwiastki wielomianu $x^4 - x^3 - 7x^2 + 23x - 20$ wiedząc, że iloczyn dwóch z nich jest równy -5.

[‡‡]François Viète (1540–1603), matematyk francuski.

○ **Ćwiczenie 2.3.7**
Niech W będzie wielomianem zespolonym o współczynnikach rzeczywistych. Sprawdzić, że $\overline{W(z)} = W(\overline{z})$ dla każdego $z \in \boldsymbol{C}$.

■ **Fakt 2.3.8** *(o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego)*
Niech W będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Wówczas liczba zespolona z_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\overline{z_0}$ jest k-krotnym pierwiastkiem tego wielomianu.

○ **Ćwiczenie 2.3.9**
Znając jeden z pierwiastków podanych wielomianów rzeczywistych znaleźć pozostałe pierwiastki tych wielomianów:

a) $W(x) = x^3 - \left(2+\sqrt{3}\right)x^2 + 2\left(1+\sqrt{3}\right)x - 2\sqrt{3}$, $x_1 = 1 - i$;

b) $W(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$, $x_1 = 1 + 2i$;

c) $W(x) = x^4 + bx^2 + c$, $x_1 = 2 - i$, gdzie $b, c \in \boldsymbol{R}$;

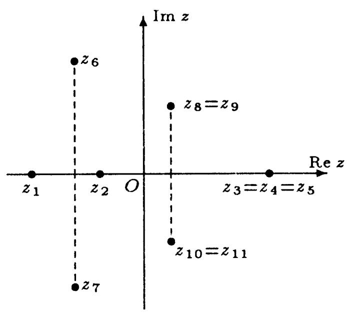
d) $W(x) = x^4 + 4x^3 + cx^2 + dx + 100$, $x_1 = -3 + i$, gdzie $c, d \in \boldsymbol{R}$.

○ **Ćwiczenie 2.3.10**
Sprawdzić, że liczba $z_1 = i$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$W(z) = z^4 - (1+i)z^3 + (3+i)z^2 + (5-3i)z - 5i$$

i następnie znaleźć jego pozostałe pierwiastki.

● **Przykład 2.3.11**
Na rysunku obok przedstawiono przykładowe rozmieszczenie piewiastków wielomianu rzeczywistego stopnia jedenastego. Wielomian ten ma dwa pierwiastki rzeczywiste jednokrotne, jeden pierwiastek rzeczywisty trzykrotny, dwa pierwiastki zespolone jednokrotne oraz dwa pierwiastki zespolone dwukrotne. Widoczna jest symetria zbioru pierwiastków wielomianu względem osi rzeczywistej.



■ **Twierdzenie 2.3.12** *(o rozkładzie wielomianu rzeczywistego na czynniki rzeczywiste)*
Niech W będzie wielomianem stopnia $n \in \boldsymbol{N}$ o współczynnikach rzeczywistych. Ponadto niech x_j będą pierwiastkami rzeczywistymi tego wielomianu o krotności k_j, gdzie $1 \leqslant j \leqslant r$ oraz niech z_j, $\overline{z}_j$, gdzie $\operatorname{Im} z_j > 0$, będą pierwiastkami zespolonymi tego wielomianu o krotności l_j, gdzie $1 \leqslant j \leqslant s$, przy czym $(k_1 + \ldots + k_r) + 2(l_1 + \ldots + l_s) = n$. Wtedy

$$W(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_r)^{k_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \ldots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s},$$

gdzie $p_j = -2\operatorname{Re} z_j$ oraz $q_j = |z_j|^2$ dla $1 \leqslant j \leqslant s$, a a_n jest współczynnikiem wielomianu W przy x^n.
Inaczej mówiąc, każdy wielomian rzeczywisty można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego. Mówimy wówczas o rozkładzie wielomianu rzeczywistego na rzeczywiste czynniki nierozkładalne.

Uwaga. Z powyższego twierdzenia wynika, że każdy wielomian rzeczywisty stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty.

○ **Ćwiczenie 2.3.13**
Podane wielomiany przedstawić w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych nierozkładalnych:

a) $W(x) = x^3 - 8$; b) $W(x) = x^4 + 16$; c) $W(x) = x^4 - 3x^2 + 2$;

d) $W(x) = x^5 - 1$; e) $W(x) = x^4 + x^2 + 1$; f) $W(x) = x^6 + 27$.

2.4 Ułamki proste

● **Definicja 2.4.1** *(funkcja wymierna)*
Funkcją wymierną rzeczywistą (zespoloną) nazywamy iloraz dwóch wielomianów rzeczywistych (zespolonych), przy czym dzielnik nie jest wielomianem zerowym.

● **Definicja 2.4.2** *(funkcja wymierna właściwa)*
Funkcję wymierną nazywamy właściwą, jeżeli stopień wielomianu w liczniku ułamka określającego tę funkcję jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku.

Uwaga. Każda funkcja wymierna jest sumą wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej.

○ **Ćwiczenie 2.4.3**
Podane funkcje wymierne rozłożyć na sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

a) $\dfrac{x^4 + 4x + 1}{x^2 + 2}$; b) $\dfrac{x^5 + x}{x^3 + 1}$; c) $\dfrac{iz^4 + z^2 + 3 - i}{z^2 + z - 1}$.

● **Definicja 2.4.4** *(ułamki proste)*

1. Zespolonym ułamkiem prostym nazywamy zespoloną funkcję wymierną postaci:
$$\frac{A}{(z+a)^n}, \quad \text{gdzie } A, a \in \boldsymbol{C} \text{ oraz } n \in \boldsymbol{N}.$$
2. Rzeczywistym ułamkiem prostym pierwszego rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci:
$$\frac{A}{(x+a)^n}, \quad \text{gdzie } a, A \in \boldsymbol{R} \text{ oraz } n \in \boldsymbol{N}.$$

3. Rzeczywistym ułamkiem prostym drugiego rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \text{ gdzie } p,q,A,B,\in \boldsymbol{R} \text{ oraz } n\in \boldsymbol{N}, \text{ przy czym } \Delta = p^2-4q<0.$$

● **Przykład 2.4.5**
Funkcje wymierne

$$\frac{i}{z+4}, \frac{1-3i}{(z-i)^5}, \frac{1}{(z-1+2i)^9}$$

są zespolonymi ułamkami prostymi, a funkcje

$$\frac{-1}{x+2}, \frac{5}{(x-3)^4}, \frac{2}{x^{99}}$$

są rzeczywistymi ułamkami prostymi pierwszego rodzaju.
Natomiast funkcje wymierne

$$\frac{1}{x^2+1}, \frac{2-x}{x^2+2x+5}, \frac{x}{(x^2+4)^{20}}, \frac{3x-5}{(x^2-4x+19)^{100}}$$

są rzeczywistymi ułamkami prostymi drugiego rodzaju.

● **Twierdzenie 2.4.6** *(o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste)*
Każda funkcja wymierna właściwa rzeczywista (zespolona) jest sumą rzeczywistych (zespolonych) ułamków prostych. Przedstawienie to jest jednoznaczne.

1. Zespolona funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(z)}{c_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}}$$

jest sumą $k_1+k_2+\ldots+k_m$ zespolonych ułamków prostych, przy czym czynnikowi $(z-z_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych postaci:

$$\frac{A_{i1}}{z-z_i}+\frac{A_{i2}}{(z-z_i)^2}+\ldots+\frac{A_{ik_i}}{(z-z_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik_i} \in \boldsymbol{C}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$.

2. Rzeczywista funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}},$$

jest sumą $k_1+k_2+\ldots+k_r$ rzeczywistych ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz $l_1+l_2+\ldots+l_s$ rzeczywistych ułamków prostych drugiego rodzaju, przy czym

• czynnikowi $(x-x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych pierwszego rodzaju postaci:

$$\frac{A_{i1}}{x-x_i}+\frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2}+\ldots+\frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik_i} \in \boldsymbol{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant r$,

• a czynnikowi $\left(x^2+p_jx+q_j\right)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{B_{j2}x+C_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\ldots+\frac{B_{jl_j}x+C_{jl_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}},$$

gdzie $B_{j1}, B_{j2}, \ldots, B_{jl_j}, C_{j1}, C_{j2}, \ldots, C_{jl_j} \in \boldsymbol{R}$ dla $1 \leqslant j \leqslant s$.

○ Ćwiczenie 2.4.7

Napisać ogólny rozkład podanych zespolonych funkcji wymiernych na zespolone ułamki proste (nie obliczać współczynników):

a) $\dfrac{4z+i}{z^2(z+i)^2}$; b) $\dfrac{1+i+iz^2}{z^4-16}$; c) $\dfrac{z^3+z^2}{(z+1)^3z}$; d) $\dfrac{1}{z(z^2+1)(z^2+2)^2}$.

○ Ćwiczenie 2.4.8

Podane zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na sumę zespolonych ułamków prostych:

a) $\dfrac{2z}{z^2+9}$; b) $\dfrac{z+4}{(z+i)^2}$; c) $\dfrac{1}{z^2+2iz-4}$; d) $\dfrac{z^3-2z^2-4z-8}{z^4-16}$.

○ Ćwiczenie 2.4.9

Napisać ogólny rozkład podanych rzeczywistych funkcji wymiernych na rzeczywiste ułamki proste pierwszego lub drugiego rodzaju (nie obliczać współczynników):

a) $\dfrac{3x^3+4x^2+x+1}{x(x+1)^3}$; b) $\dfrac{2x^2+3x-1}{x^3-x}$; c) $\dfrac{3x}{(x^2+1)^2(x^2-9)}$;

d) $\dfrac{x^5+x^2+1}{(x^2+4)^3(x^2+1)}$; e) $\dfrac{x^7+x^6+x^5}{(x^2+3)^2(x^2-4)^2}$; f) $\dfrac{3x+4}{(x+3)(x^2+x+1)}$.

○ Ćwiczenie 2.4.10

Podane rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na sumę rzeczywistych ułamków prostych pierwszego lub drugiego rodzaju:

a) $\dfrac{1}{x^2(x-1)^2}$; b) $\dfrac{x^2}{x^3+2x^2+2x+1}$; c) $\dfrac{2x^2+3x-1}{x^3-x}$;

d) $\dfrac{2x^2-6x-9}{x^4+6x^3+9x^2}$; e) $\dfrac{10x+3}{x^3+27}$; f) $\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$.

• **Twierdzenie* 2.4.11** *(o współczynnikach rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste)*
Niech wielomian rzeczywisty Q ma tylko parami różne pierwiastki rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz niech wielomian P ma stopień mniejszy niż n. Wtedy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}, \text{ gdzie } A_i = \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

○ **Ćwiczenie* 2.4.12**
Korzystając z powyższego twierdzenia znaleźć rozkłady podanych funkcji wymiernych na ułamki proste:

a) $\dfrac{x}{x^2-9}$; b) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)(x+2)}$; c) $\dfrac{1}{(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)}$.

2.5 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Twierdzenia 2.2.4** *(Bézout)*
Niech $W(x_0) = 0$. Dzieląc wielomian W przez $x - x_0$ otrzymamy $W(x) = (x - x_0)P(x) + c$, gdzie $c \in \boldsymbol{R}$. Ponieważ $W(x_0) = 0$, zatem $c = 0$ i ostatecznie $W(x) = (x - x_0)P(x)$. Z drugiej strony niech $W(x) = (x - x_0)P(x)$ dla pewnego wielomianu P. Wówczas $W(x_0) = 0$, więc liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W.

■ **Dowód Twierdzenia 2.2.9** *(o pierwiastkach całkowitych wielomianu)*
Niech $p \neq 0$ będzie całkowitym pierwiastkiem wielomianu W. Oznacza to, że

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Stąd

$$a_0 = p\left(-a_n p^{n-1} - a_{n-1}p^{n-2} - \ldots - a_1\right).$$

Ponieważ czynnik w nawiasie oraz liczba a_0 są liczbami całkowitymi, więc p jest dzielnikiem a_0.

■ **Dowód Twierdzenia 2.2.11** *(o pierwiastkach wymiernych wielomianu)*
Mamy

$$W\left(\frac{p}{q}\right) = a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0,$$

gdzie p i q są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi. Stąd

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Niech

$$k = a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1} \text{ oraz } l = a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_0 q^{n-1}.$$

Liczby k, l są całkowite i spełniają zależności $pk + a_0 q^n = 0$ oraz $a_n p^n + ql = 0$. Liczba p jest więc dzielnikiem liczby $a_0 q^n$, lecz nie jest dzielnikiem q^n. Stąd wynika, że p jest dzielnikiem liczby a_0. Podobnie liczba l dzieli $a_n p^n$, ale nie dzieli p^n, więc dzieli a_n.

Dowód Faktu 2.3.2 *(o przedstawieniu wielomianu w postaci iloczynu dwumianów)*
1. Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Wielomian zespolony stopnia 1 postaci $W(z) = c_1 z + c_0$, gdzie $c_1 \neq 0$, ma dokładnie jeden pierwiastek $z_0 = -\frac{c_0}{c_1}$. Załóżmy, że każdy wielomian zespolony stopnia n ma dokładnie n, niekoniecznie różnych, pierwiastków. Niech W będzie teraz wielomianem stopnia $n+1$. Z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że wielomian W ma pierwiastek z_0. Na mocy twierdzenia Bézout istnieje wielomian P taki, że $W(z) = (z - z_0)\,P(z)$. Oczywiście $W(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = z_0$ lub $P(z) = 0$. Stopień wielomianu P jest równy n, więc na mocy założenia indukcyjnego ma on dokładnie n pierwiastków zespolonych z uwzględnieniem pierwiastków wielokrotnych. Są one jednocześnie pierwiastkami wielomianu W, a liczba z_0 jest $(n+1)$-szym pierwiastkiem tego wielomianu. Kończy to dowód indukcyjny.
2. Niech liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_n$ będą pierwiastkami wielomianu zespolonego

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0 \quad \text{stopnia } n.$$

Na mocy twierdzenia Bézout istnieją wielomiany P_k stopnia k dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ takie, że

$$\begin{aligned} W(z) &= (z - z_1)\,P_{n-1}(z) \\ &= (z - z_1)(z - z_2)\,P_{n-2}(z) = \ldots = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)\,P_0(z). \end{aligned}$$

Oczywiście $P_0(z) \equiv c_n$. Zatem $W(z) = c_n(z - z_1)\ldots(z - z_n)$. Grupujemy teraz pierwiastki jednakowe w m grup o liczebnościach równych krotności reprezentanta danej grupy i otrzymujemy żądaną postać wielomianu.

Dowód Faktu 2.3.8 *(o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego)*
Zgodnie z definicją pierwiastka k-krotnego wielomianu W istnieje wielomian P taki, że

$$W(z) = (z - z_0)^k\,P(z) \quad \text{oraz} \quad P(z_0) \neq 0.$$

Ponieważ W jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, więc $\overline{W(z)} = W(\overline{z})$. Stąd

$$W(\overline{z}) = \overline{(z - z_0)^k\,P(z)} = (\overline{z} - \overline{z}_0)^k\,\overline{P(z)}.$$

Wstawiając w powyższej równości z w miejsce $\overline{z}$ otrzymujemy $W(z) = (z - \overline{z}_0)\,\overline{P(\overline{z})}$. Przyjmijmy, że $Q(z) = \overline{P(\overline{z})}$. Funkcja Q jest wielomianem zmiennej z, którego współczynniki są liczbami sprzężonymi do odpowiednich współczynników wielomianu P. Ponadto $Q(\overline{z}_0) = \overline{P(z_0)} \neq 0$ oraz $W(z) = (z - \overline{z}_0)^k\,Q(z)$, zatem liczba $\overline{z}_0$ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W.

Dowód Twierdzenia 2.3.12 *(o rozkładzie wielomianu na czynniki rzeczywiste)*
Korzystając z **Faktu 2.3.2** przedstawimy najpierw wielomian W w postaci iloczynu dwumianów. Mamy zatem

$$W(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}\ldots(x - x_r)^{k_r}(x - z_1)^{l_1}(x - \overline{z}_1)^{l_1}\ldots(x - z_s)^{l_s}(x - \overline{z}_s)^{l_s}.$$

Łącząc parami pierwiastki sprzężone otrzymamy

$$\begin{aligned} (x - z_j)^{l_j}(x - \overline{z}_j)^{l_j} &= [(x - z_j)(x - \overline{z}_j)]^{l_j} = \left[x^2 - x(z_j + \overline{z}_j) + z_j\overline{z}_j\right]^{l_j} \\ &= \left[x^2 - 2x\,\mathrm{Re}\,z_j + |z_j|^2\right]^{l_j} = \left[x^2 + p_j x + q_j\right]^{l_j} \end{aligned}$$

dla $1 \leqslant j \leqslant s$. Otrzymaliśmy w ten sposób żądaną postać wielomianu.

2.6 Odpowiedzi i wskazówki

2.1.6 a) suma $5x$, różnica $-2x^2-5x+2$; b) suma $2x^5-3x^2-x+3$, różnica $2x^5-7x^2+3x-3$; c) suma $iz^3+iz^2-2z-1+5i$, różnica $-iz^3+(2+i)z^2-2z+1-5i$.

2.1.7 a) $-2x^5+8x^3-x^2+4$; b) $-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+1$; c) $(1-i)z^5+(1+2i)z^3+(3-2i)z^2-z+3i+2$.

2.1.9 a) iloraz $8x^3-8x^2+11x-6$, reszta 0; b) iloraz $x+3$, reszta 0; c) iloraz $iz^2-2z+2-4i$, reszta $7+7i$; d) iloraz z^2+i, reszta 0.

2.2.3 a) 15; b) 6; c) $4x$.

2.2.5* $W(x)=ax(x-1)(x-2)\ldots(x-25)$, gdzie $a\in\mathbf{R}$.

2.2.7 a) 1; b) 3; c) 2; d) 4.

2.2.10 a) -1, b) $\{1,-3\}$; c) brak; d) $\{-1,2\}$.

2.2.12 a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; d) $-\frac{1}{4}$.

2.2.14 a) $x_1=1-i$, $x_2=1+i$; b) $z_1=z_2=\frac{i-3}{2}$; c) $z_1=-1-i$, $z_2=-1+2i$; d) $z_1=\frac{1-i}{2}$, $z_2=-\frac{i}{3}$.

2.2.16 a) $z_1=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=1$,
$z_2=\overline{z}_3=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}$;
b) $z_1=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{18}-\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{18}+\frac{1}{2}}$,
$z_2=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{144}+\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{144}-\frac{1}{16}}+i\left(\sqrt[6]{\frac{3\sqrt{93}}{128}+\frac{29}{128}}+\sqrt[6]{\frac{29}{128}-\frac{3\sqrt{93}}{128}}\right)=\overline{z}_3$;
c) $z_1=2\cos\frac{5\pi}{18}$, $z_2=2\cos\frac{11\pi}{18}$, $z_3=2\cos\frac{17\pi}{18}$; d) $z_1=5$, $z_2=2-\sqrt{3}$, $z_3=2+\sqrt{3}$;
e) $z_1=-2$, $z_2=z_3=1$; f) $z_1=-\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$, $z_2=z_3=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

2.3.4 a) $\left(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$; b) $(z+1)\left(z-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$;
c) $(z+i)^3(z-i)^3$; d) $\left(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$;
e) $\left(z-\sqrt{\frac{3}{2}}(1-i)\right)\left(z+\sqrt{\frac{3}{2}}(1-i)\right)(z-1-i)(z+1+i)$;
f) $(z-1-i)(z-1+i)(z+1+i)(z+1-i)$.

2.3.6* a) 0; b) $\frac{5}{7}$; c) $-1\pm\sqrt{6}$, $\frac{3\pm i\sqrt{7}}{2}$.

2.3.9 a) $1+i$, $\sqrt{3}$; b) $1-2i$, -2, 1; c) $2+i$, $-2+i$, $-2-i$; d) $-3-i$, $1+3i$, $1-3i$.

2.3.10 $z_2=-1$, $z_3=1+2i$, $z_4=1-2i$.

2.3.13 a) $(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$; b) $\left(x^2-2\sqrt{2}x+4\right)\left(x^2+2\sqrt{2}x+4\right)$;
c) $(x-1)(x+1)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$;
d) $(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{5}+1\right)$, gdzie $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ oraz

$\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; **e)** $\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$; **f)** $\left(x^2-3x+3\right)\left(x^2+3\right)\left(x^2+3x+3\right)$.

2.4.3 a) $x^2-2+\frac{4x+5}{x^2+2}$; **b)** $x^2+\frac{x-x^2}{x^3+1}$; **c)** $iz^2-iz+1+2i+\frac{(-1-3i)z+4+i}{z^2+z-1}$.

2.4.7 a) $\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z+i}+\frac{D}{(z+i)^2}$; **b)** $\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{z-2i}+\frac{D}{z+2i}$;
c) $\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{(z+1)^2}+\frac{D}{(z+1)^3}$;
d) $\frac{A}{z}+\frac{B}{z+i}+\frac{C}{z-i}+\frac{D}{z+\sqrt{2}i}+\frac{E}{\left(z+\sqrt{2}i\right)^2}+\frac{F}{z-\sqrt{2}i}+\frac{G}{\left(z-\sqrt{2}i\right)^2}$.

2.4.8 a) $\frac{1}{z+3i}+\frac{1}{z-3i}$; **b)** $\frac{1}{z+1}+\frac{4-i}{(z+i)^2}$; **c)** $\frac{1}{2\sqrt{3}\left(z-\sqrt{3}+i\right)}-\frac{1}{2\sqrt{3}\left(z+\sqrt{3}+i\right)}$;
d) $\frac{1}{2(z+2)}-\frac{1}{2(z-2)}+\frac{1}{2(z-2i)}+\frac{1}{2(z+2i)}$.

2.4.9 a) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}$; **b)** $\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x+1)}$;
c) $\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}$;
d) $\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+4\right)^2}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+4\right)^3}$;
e) $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+3}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+3\right)^2}$; **f)** $\frac{A}{x+3}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

2.4.10 a) $\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$; **b)** $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}$; **c)** $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}$;
d) $\frac{3}{(x+3)^2}-\frac{1}{x^2}$; **e)** $-\frac{1}{x+3}+\frac{x+4}{x^2-3x+9}$; **f)** to jest ułamek prosty.

2.4.12* a) $\frac{\frac{1}{2}}{x-3}+\frac{\frac{1}{2}}{x+3}$; **b)** $\frac{-\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{\frac{5}{6}}{x+2}$; **c)** $\frac{\frac{1}{48}}{x-3}+\frac{-\frac{1}{16}}{x-1}+\frac{\frac{1}{16}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{48}}{x+3}$.

3

MACIERZE I WYZNACZNIKI

3.1 Macierze – podstawowe określenia

● **Definicja 3.1.1** *(macierz rzeczywista i zespolona)*
Macierzą rzeczywistą (zespoloną) wymiaru $m \times n$, gdzie $m, n \in \boldsymbol{N}$, nazywamy prostokątną tablicę złożoną z mn liczb rzeczywistych (zespolonych) ustawionych w m wierszach i n kolumnach.

$$\begin{array}{cl} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boldsymbol{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \boldsymbol{a_{2j}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{ij}} & \cdots & \boldsymbol{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a_{mj}} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{–ty wiersz} \\ \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \uparrow j\text{–ta kolumna} & \end{array}$$

Uwaga. Macierze będziemy oznaczali dużymi literami alfabetu np. A, B, X itp. Element macierzy A stojący w i–tym wierszu oraz w j–tej kolumnie oznaczamy przez a_{ij}. Macierz A można także zapisywać w postaci $[a_{ij}]_{m \times n}$ lub $[a_{ij}]$, gdy znany jest jej wymiar. Macierze A lub B są równe, gdy mają te same wymiary $m \times n$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Rozważa się także macierze, których elementami są funkcje rzeczywiste lub zespolone.

● **Przykład 3.1.2**
Podane poniżej macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1-i \\ 2i \\ -1+3i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} e^x & \cos x \\ -\cos x & e^{-x} \end{bmatrix}.$$

mają odpowiednio wymiary 2×3, 3×1, 4×4, 2×2. Macierze A i C są rzeczywiste, macierz B jest zespolona, a D jest macierzą funkcyjną (rzeczywistą).

- **Definicja 3.1.3** *(rodzaje macierzy)*

1. Macierz wymiaru $m \times n$, której wszystkie elementy są równe 0 nazywamy macierzą zerową wymiaru $m \times n$ i oznaczamy przez $\mathbf{0}_{m\times n}$ lub przez $\mathbf{0}$, gdy znamy jej wymiar.

macierz zerowa

$$0_{m\times n} \overset{def}{=} \left.\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ kolumn}}\right\} m \text{ wierszy}$$

2. Macierz, której liczba wierszy równa się liczbie kolumn nazywamy macierzą kwadratową. Liczbę wierszy (kolumn) nazywamy wtedy stopniem macierzy kwadratowej. Elementy macierzy, które mają ten sam numer wiersza co kolumny, tworzą główną przekątną macierzy.

główna przekątna

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

macierz kwadratowa

3. Macierz kwadratową stopnia $n \geqslant 2$, w której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są równe 0, nazywamy macierzą trójkątną dolną.

macierz trójkątna dolna

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \boldsymbol{a_{n2}} & \boldsymbol{a_{n3}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Podobnie określa się macierz trójkątną górną.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ 0 & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & \boldsymbol{a_{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

macierz trójkątna górna

4. Macierz kwadratową stopnia n, w której wszystkie elementy nie stojące na głównej przekątnej są równe 0, nazywamy macierzą diagonalną.

macierz diagonalna

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalną stopnia n, w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1, nazywamy macierzą jednostkową. Macierz jednostkową stopnia n oznaczamy przez I_n lub przez I, gdy znany jest jej stopień.

macierz jednostkowa

$$I_n \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

5. Macierz, którą utworzono z macierzy A_{ij}, gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$, ustawionych w m wierszach i n kolumnach nazywamy macierzą blokową.

macierz blokowa

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mn} \end{array}\right]$$

Macierze $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ stojące w i-tym wierszu macierzy blokowej muszą mieć te same liczby wierszy. Podobnie macierze $A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{mj}$ stojące w j-tej kolumnie tej macierzy muszą mieć te same liczby kolumn.

• **Przykład 3.1.4**

a) Macierze $A = [0]$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ są macierzami zerowymi odpowiednio wymiarów 1×1, 3×2, 2×5.

b) Macierze $A = \begin{bmatrix} -i & 1+i \\ 3 & 2-5i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ są macierzami kwadratowymi odpowiednio stopnia 2, 3 i 4. Macierze B i C są rzeczywiste, a macierz A jest zespolona.

c) Macierze $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ -i & 2-i & 0 \\ 3 & -5 & 4i \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ są macierzami trójkątnymi odpowiednio stopnia 2, 3 i 5. Macierze A i B są macierzami trójkątnymi dolnymi, a macierz C macierzą trójkątną górną.

d) Macierze $A = \begin{bmatrix} 3-i & 0 \\ 0 & 2+5i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ są macierzami diagonalnymi odpowiednio stopnia 2, 3 i 4. Macierz B jest macierzą jednostkową.

e) Macierze $A = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$ są macierzami blokowymi zbudowanymi odpowiednio z 6 i 9 bloków (macierzy).

3.2 Działania na macierzach

● **Definicja 3.2.1** *(suma i różnica macierzy)*

Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. Sumą (różnicą) macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$, której elementy są określone wzorem:

$$c_{ij} \overset{def}{=\!=} a_{ij} \pm b_{ij}$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Piszemy wtedy $C = A \pm B$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\overset{def}{=\!=} \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}.$$

○ **Ćwiczenie 3.2.2**

Obliczyć sumy i różnice podanych par macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -2 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 1-2i \\ 3+5i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3i \\ -2 \end{bmatrix}$.

● **Definicja 3.2.3** *(iloczyn macierzy przez liczbę)*
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Iloczynem macierzy A przez liczbę α nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$, której elementy są określone wzorem:

$$b_{ij} \overset{def}{=} \alpha a_{ij}$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Piszemy wtedy $B = \alpha A$.

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

○ **Ćwiczenie 3.2.4**
Obliczyć iloczyny podanych liczb i macierzy:

a) $\alpha = (1 - i)$, $A = \begin{bmatrix} i & 0 & 3+2i & 5 \\ 1+i & 2 & -3i & 1-i \end{bmatrix}$; b) $\alpha = -\dfrac{3}{4}$, $A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -24 \\ -8 & 12 & -12 \\ 16 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

● **Fakt 3.2.5** *(własności działań na macierzach)*
Niech A, B, C będą dowolnymi macierzami rzeczywistymi (zespolonymi) tego samego wymiaru oraz niech α, β będą liczbami rzeczywistymi (zespolonymi). Wtedy

1. $A + B = B + A$; **2.** $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3. $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$; **4.** $A + (-A) = \mathbf{0}$;

5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; **6.** $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

7. $1 \cdot A = A$; **8.** $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

○ **Ćwiczenie* 3.2.6**
Uzasadnić tożsamości podane w powyższym fakcie.

● **Definicja 3.2.7** *(iloczyn macierzy)*
Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$, a macierz $B = [b_{ij}]$ wymiar $n \times k$. Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy określone są wzorem:

$$c_{ij} \overset{def}{=} a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

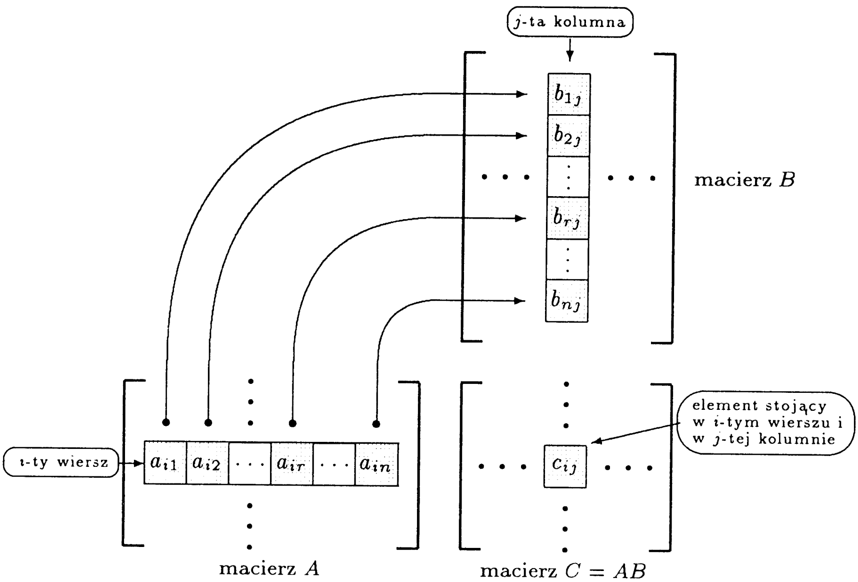
dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant k$. Piszemy wtedy $C = AB$.

Uwaga. Element c_{ij} iloczynu macierzy A i B otrzymujemy sumując iloczyny odpowiadających sobie elementów i–tego wiersza macierzy A i j–tej kolumny macierzy B. Iloczyn macierzy A i B można obliczyć tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A równa się liczbie wierszy macierzy B.

Wprowadzając oznaczenie $\vec{x} \circ \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ dla wektorów $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ (odpowiadające dla $n = 2$ i $n = 3$ iloczynowi skalarnemu) iloczyn AB macierzy można zapisać w postaci

$$AB = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vdots \\ \vec{w}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{k}_1 & \vec{k}_2 & \ldots & \vec{k}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 \circ \vec{k}_1 & \vec{w}_1 \circ \vec{k}_2 & \ldots & \vec{w}_1 \circ \vec{k}_k \\ \vec{w}_2 \circ \vec{k}_1 & \vec{w}_2 \circ \vec{k}_2 & \ldots & \vec{w}_2 \circ \vec{k}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{w}_m \circ \vec{k}_1 & \vec{w}_m \circ \vec{k}_2 & \ldots & \vec{w}_m \circ \vec{k}_k \end{bmatrix},$$

gdzie $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$ oznaczają wektory wierszowe macierzy A, zaś $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \ldots \vec{k}_k$ wektory kolumnowe macierzy B.



Rys. 3.2.1. Schemat obliczania iloczynu macierzy.

○ Ćwiczenie 3.2.8

Obliczyć iloczyny podanych par macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} i & 1+2i \\ -3 & 2-3i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 5+i & 4-3i \end{bmatrix}$.

○ Ćwiczenie 3.2.9

Obliczyć iloczyny AB i BA dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

○ Ćwiczenie 3.2.10

Wykonując mnożenie odpowiednich macierzy wyrazić zmienne x, y, z, t w zależności od zmiennych p, q, r, jeżeli

$$\begin{cases} x = 2u + 3v \\ y = u - 4v \\ z = 3u + v \\ t = u - v \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} u = p + q + 2r \\ v = 3p - q - r \end{cases}.$$

○ Ćwiczenie 3.2.11

Układając i rozwiązując odpowiedni układ równań znaleźć rozwiązania podanych równań macierzowych:

a) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$;

b) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$;

d) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$;

e) $X \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

f) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

○ Ćwiczenie 3.2.12

Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 10 & 9 & 11 \\ 5 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

przy czym element a_{ik} macierzy A oznacza ilość sztuk towaru T_k, który chce kupić klient K_i, zaś element b_{kj} macierzy B oznacza cenę towaru T_k w sklepie S_j, gdzie $1 \leqslant i \leqslant 4$, $1 \leqslant k \leqslant 5$ oraz $1 \leqslant j \leqslant 3$. Obliczyć iloczyn AB, a z otrzymanego wyniku odczytać:

a) kwotę, jaką zapłaciłby klient K_3 w sklepie S_2;

b) kwotę, jaką zapłaciliby łącznie wszyscy klienci w sklepie S_1;

c) numer sklepu, w którym klient K_4 zapłaciłby najmniej;

d) numer sklepu, w którym klient K_2 zapłaciłby najwięcej.

○ Ćwiczenie* 3.2.13

Niech L będzie przekształceniem płaszczyzny postaci $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, gdzie $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$. Przekształceniu L przyporządkowujemy macierz $A_L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a) Uzasadnić, że składaniu przekształceń postaci L odpowiada mnożenie macierzy (tzn., że $A_{L \circ K} = A_L A_K$);

b) Napisać macierz symetrii S względem osi Ox;

c) Napisać macierz obrotu O o kąt $\frac{\pi}{6}$ wokół początku układu współrzędnych w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara;

d) Napisać macierze złożeń $S \circ O$ oraz $O \circ S$.

○ Ćwiczenie* 3.2.14
Uzasadnić, że iloczyn macierzy:

a) diagonalnych jest macierzą diagonalną;

b) trójkątnych górnych (dolnych) jest macierzą trójkątną górną (dolną).

■ Fakt 3.2.15 *(własności iloczynu macierzy)*

1. Niech macierz A ma wymiar $m \times n$, a macierze B i C wymiar $n \times k$. Wtedy

$$A(B+C) = AB + AC.$$

2. Niech macierze A, B mają wymiar $m \times n$, a macierz C wymiar $n \times k$. Wtedy

$$(A+B)C = AC + BC.$$

3. Niech macierz A ma wymiar $m \times n$, a macierz B wymiar $n \times k$ oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Wtedy

$$A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB).$$

4. Niech macierz A ma wymiar $m \times n$, macierz B ma wymiar $n \times k$, a macierz C wymiar $k \times l$. Wtedy

$$(AB)C = A(BC).$$

5. Niech macierz A ma wymiar $m \times n$. Wtedy

$$AI_n = I_m A = A.$$

Uwaga. Własności podane w punktach **1.** i **2.** nazywamy rozdzielnością dodawania względem mnożenia, a własność podaną w punkcie **4.** łącznością mnożenia. Mnożenie macierzy kwadratowych nie jest przemienne, bowiem na ogół $AB \neq BA$. Zamiast $\underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ czynników}}$ będziemy pisali A^n.

○ Ćwiczenie 3.2.16
Podać przykłady macierzy A, B, które spełniają podane relacje:

a) $AB \neq BA$; b) $AB = BA$;

c) $AB = \mathbf{0}$ i $A \neq \mathbf{0}$ i $B \neq \mathbf{0}$; d) $A^3 = \mathbf{0}$ i $A^2 \neq \mathbf{0}$.

○ Ćwiczenie 3.2.17
Niech macierze kwadratowe A, B mają ten sam stopień oraz niech będą przemienne, tzn. spełniają równość $AB = BA$. Uzasadnić podane tożsamości:

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; b) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$;

c) $(AB)^2 = A^2B^2$; d) $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.

○ Ćwiczenie 3.2.18

Rozwiązać równanie macierzowe

$$X\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}-3&0&6\\0&9&3\\0&15&-12\end{bmatrix}.$$

○ Ćwiczenie 3.2.19

Dla podanych macierzy A obliczyć A^2, A^3, A^4 :

a) $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$; b) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

○ Ćwiczenie 3.2.20

Dla podanych macierzy A wyprowadzić wzory ogólne na macierze A^n, gdzie $n\in \boldsymbol{N}$:

a) $A=\begin{bmatrix}2&2\\1&1\end{bmatrix}$; b) $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.

Udowodnić otrzymane wzory za pomocą indukcji matematycznej.

○ Ćwiczenie* 3.2.21

Rysunek poniżej przedstawia schemat połączeń pięciu stacji kolejki linowej. Elementy a_{ij} macierzy połączeń A są określone wzorem

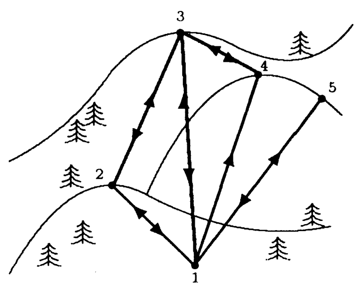
$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{gdy stacje } i \text{ oraz } j \text{ mają bezpośrednie połączenie,}\\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

a) Napisać macierz A;

b) Uzasadnić, że element c_{ij} macierzy A^n jest równy liczbie różnych tras łączących stację i ze stacją j złożonych z n odcinków;

c) Wyznaczyć najmniejszą liczbę n, dla której możliwe jest dotarcie z dowolnej stacji początkowej do dowolnej stacji końcowej w n odcinkach;

d) Mieszkamy w schronisku przy stacji 2 i mamy karnet na cztery przejazdy. Ile różnych wycieczek możemy zrobić?



● Definicja 3.2.22 *(macierz transponowana)*

Niech $A=[a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m\times n$. Macierzą transponowaną do macierzy A nazywamy macierz $B=[b_{ij}]$ wymiaru $n\times m$, której elementy są określone wzorem:

$$b_{ij}\stackrel{def}{=}a_{ji},$$

gdzie $1\leqslant i\leqslant n$ oraz $1\leqslant j\leqslant m$. Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy przez A^T.

Uwaga. Przy transponowaniu, kolejne wiersze macierzy wyjściowej stają się kolejnymi kolumnami macierzy transponowanej. Ilustrujemy to na przykładzie macierzy wymiaru 3×5.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}} \\ \boxed{a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}} \\ \boxed{a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ a_{35}} \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{24} \\ a_{25} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ a_{34} \\ a_{35} \end{matrix}} \end{bmatrix}.$$

○ **Ćwiczenie 3.2.23**

Napisać macierze transponowane do podanych:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1-2i \\ -3 \\ 2+i \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■ **Fakt 3.2.24** *(własności transpozycji macierzy)*

1. Niech A i B będą macierzami wymiaru $m \times n$. Wtedy

$$(A+B)^T = A^T + B^T.$$

2. Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Wtedy

$$\left(A^T\right)^T = A \text{ oraz } (\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

3. Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$, a B macierzą wymiaru $n \times k$. Wtedy

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

4. Niech A będzie macierzą kwadratową oraz niech $r \in \boldsymbol{N}$. Wtedy

$$(A^r)^T = \left(A^T\right)^r.$$

● **Definicja 3.2.25** *(macierz symetryczna i antysymetryczna)*

1. Macierz kwadratowa A jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A^T = A.$$

2. Macierz kwadratowa A jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A^T = -A.$$

Uwaga. Macierz jest symetryczna, gdy jej elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej są sobie równe. Macierz jest antysymetryczna, gdy jej elementy położone symetrycznie względem głównej przekątnej różnią się tylko znakiem, a elementy głównej przekątnej są równe 0.

○ **Ćwiczenie 3.2.26**

Wskazać, które z podanych macierzy są symetryczne, a które antysymetryczne:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & i & 4 \\ i & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3i \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; d) $D = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

■ **Fakt* 3.2.27** *(własności macierzy symetrycznych i antysymetrycznych)*

1. Niech A będzie macierzą kwadratową. Wtedy
   a) macierz $A + A^T$ jest symetryczna;
   b) macierz $A - A^T$ jest antysymetryczna.
2. Niech A będzie macierzą dowolnego wymiaru. Wtedy macierze AA^T i A^TA są symetryczne.
3. Każdą macierz kwadratową można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy macierzy symetrycznej i antysymetrycznej;

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right).$$

○ **Ćwiczenie* 3.2.28**

Niech macierze kwadratowe A i B tego samego stopnia będą symetryczne. Pokazać, że ich iloczyn jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA$.

3.3 Definicja indukcyjna wyznacznika

● **Definicja 3.3.1** *(wyznacznik macierzy)*

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy rzeczywistej (zespolonej) $A = [a_{ij}]$ przypisuje liczbę rzeczywistą (zespoloną) $\det A$. Funkcja ta jest określona wzorem indukcyjnym:

1. jeżeli macierz A ma stopień $n = 1$, to

$$\det A = a_{11};$$

2. jeżeli macierz A ma stopień $n \geqslant 2$, to

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det A_{1n}$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Uwaga. Wyznacznik macierzy A oznaczamy także przez $\det [a_{ij}]$ lub $|A|$, a w formie rozwiniętej przez

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Będziemy mówili zamiennie: stopień wyznacznika $\longleftrightarrow$ stopień macierzy, element wyznacznika $\longleftrightarrow$ element macierzy, wiersz wyznacznika $\longleftrightarrow$ wiersz macierzy, kolumna wyznacznika $\longleftrightarrow$ kolumna macierzy.

○ Ćwiczenie 3.3.2

Korzystając z definicji obliczyć wyznaczniki podanych macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Reguła obliczania wyznaczników stopnia drugiego

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

$\ominus \qquad \oplus$

Reguła Sarrusa* obliczania wyznaczników stopnia trzeciego

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$

$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \qquad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$

Uwaga. Sposób ten nie przenosi się na wyznaczniki wyższych stopni.

○ Ćwiczenie 3.3.3

Korzystając z powyższych wzorów obliczyć podane wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1+i & 5i \\ -4 & 3-2i \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} i & 1 & 1-i \\ 0 & -2 & 4+3i \\ 2i & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

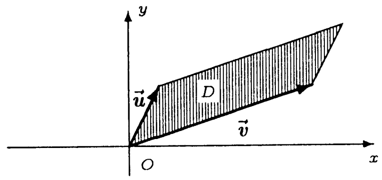
---

*Pierre Frédéric Sarrus (1798–1861), matematyk francuski.

Interpretacja geometryczna wyznaczników 2-go i 3-go stopnia

1. Niech D oznacza równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ (rys. 3.3.1). Pole $|D|$ tego równoległoboku wyraża się wzorem:

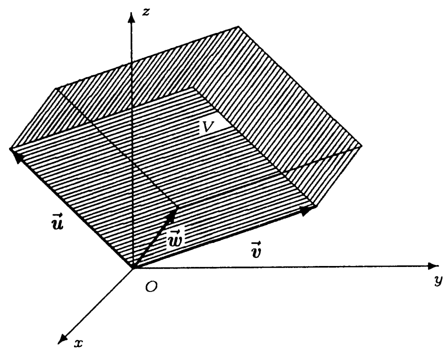
$$|D| = \left|\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|.$$



Rys. 3.3.1. Interpretacja geometryczna wyznacznika drugiego stopnia.

2. Niech V oznacza równoległościan rozpięty na wektorach $\vec{u} = (a, b, c)$, $\vec{v} = (d, e, f)$, $\vec{w} = (g, h, i)$ (rys. 3.3.2). Objętość $|V|$ tego równoległościanu wyraża się wzorem:

$$|V| = \left|\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right|.$$



Rys. 3.3.2. Interpretacja geometryczna wyznacznika trzeciego stopnia.

Uwaga*. Prawdziwe są także analogiczne interpretacje geometryczne dla wyznaczników wyższych stopni.

○ Ćwiczenie 3.3.4

Obliczyć pola podanych obszarów płaskich:

a) równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{u} = (-1, 3)$, $\vec{v} = (2, 5)$;

b) trójkąt o wierzchołkach $A = (1, -1)$, $B = (3, 4)$, $C = (-2, 5)$.

○ Ćwiczenie 3.3.5

Obliczyć objętości podanych brył:

a) równoległościan rozpięty na wektorach $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (-1, 0, 5)$, $\vec{w} = (1, -2, -3)$;

b) czworościan o wierzchołkach $A = (0, 1, 2)$, $B = (1, -2, 3)$, $C = (0, -1, 5)$, $D = (-1, -3, 0)$.

- **Definicja 3.3.6** *(dopełnienie algebraiczne)*
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$. Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę:

$$D_{ij} \stackrel{def}{=} (-1)^{i+j} \det A_{ij},$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną przez skreślenie i–tego wiersza i j–tej kolumny macierzy A.

○ **Ćwiczenie 3.3.7**
W podanych macierzach obliczyć dopełnienia algebraiczne zaznaczonych elementów:

a) $A = \begin{bmatrix} 1+i & -3i \\ \boxed{4} & 2-5i \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 1 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$; c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & \boxed{5} & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

- **Twierdzenie 3.3.8** *(rozwinięcia Laplace'a*[†] *wyznacznika)*
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$ oraz niech liczby naturalne i oraz j, gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant n$, będą ustalone. Wtedy wyznacznik macierzy A można obliczyć ze wzorów:

1. $$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \ldots + a_{in}D_{in}.$$

   Inaczej mówiąc, wyznacznik macierzy jest równy sumie iloczynów elementów i–tego wiersza i ich dopełnień algebraicznych. Wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem i–tego wiersza;

2. $$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \ldots + a_{nj}D_{nj}.$$

   Inaczej mówiąc, wyznacznik macierzy jest równy sumie iloczynów elementów j–tej kolumny i ich dopełnień algebraicznych. Wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem j–tej kolumny.

Uwaga*. Dla ustalonych liczb naturalnych r oraz s, gdzie $1 \leqslant r, s \leqslant n$, $r \neq s$, prawdziwe są wzory:

$$a_{s1}D_{r1} + a_{s2}D_{r2} + \ldots + a_{sn}D_{rn} = 0,$$
$$a_{1s}D_{1r} + a_{2s}D_{2r} + \ldots + a_{ns}D_{nr} = 0.$$

Inaczej mówiąc, suma iloczynów elementów dowolnego wiersza i dopełnień algebraicznych elementów innego wiersza jest równa 0. Podobnie, suma iloczynów elementów dowolnej kolumny i odpowiadających im dopełnień algebraicznych innej kolumny jest równa 0.

○ **Ćwiczenie 3.3.9**
Korzystając z rozwinięcia Laplace'a obliczyć podane wyznaczniki. Wyznaczniki rozwinąć względem wiersza lub kolumny, które zawierają najwięcej zer:

[†] Pierre Simon de Laplace (1749–1827), matematyk, fizyk i astronom francuski.

a) $\begin{vmatrix} i & 0 & -3 \\ 2 & -1+i & 5 \\ 1+i & 3i & -2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

■ **Fakt 3.3.10** *(wyznacznik macierzy trójkątnej)*
Wyznacznik macierzy trójkątnej dolnej lub górnej jest równy iloczynowi elementów stojących na jego głównej przekątnej.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

○ **Ćwiczenie 3.3.11**
Korzystając ze wzoru podanego w ostatnim fakcie obliczyć wyznaczniki macierzy trójkątnych:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -1-i & 1+i & 2 & 4-3i \\ 0 & 2i & 3-i & -2+i \\ 0 & 0 & -3 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$.

○ **Ćwiczenie 3.3.12**
Obliczyć podane wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; c*) $\begin{vmatrix} n & n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

3.4 Inne definicje wyznacznika*

Wszystkie podane w tym paragrafie definicje wyznacznika są równoważne z wprowadzoną poprzednio definicją indukcyjną.

● **Definicja* 3.4.1** *(permutacja)*
Permutacją n–elementową, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$, nazywamy każde różnowartościowe odwzorowanie p zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ na siebie. Permutację taką zapisujemy w postaci

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad \text{lub krótko} \quad p = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

gdzie p_i oznacza wartość permutacji p dla i. Zbiór wszystkich permutacji n–elementowych oznaczamy przez P_n.

Uwaga*. Istnieje $n!$ różnych permutacji n–elementowych.

○ **Ćwiczenie* 3.4.1**
Napisać wszystkie permutacje 2–, 3– i 4–elementowe.

● **Definicja* 3.4.2** *(inwersja, znak permutacji)*
Niech $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_j & \dots & p_n \end{pmatrix}$ będzie permutacją n–elementową. Para $\{p_i, p_j\}$ elementów tej permutacji tworzy inwersję, gdy

$$p_i > p_j \text{ oraz } i < j.$$

Znak permutacji p jest określony wzorem

$$\operatorname{sgn}(p) \stackrel{def}{=} (-1)^k,$$

gdzie k oznacza liczbę par elementów tej permutacji, które tworzą inwersje.

○ **Ćwiczenie* 3.4.2**
Wypisać wszystkie pary elementów podanych permutacji, które tworzą inwersje oraz określić znaki tych permutacji:

a) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; c) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

● **Definicja* 3.4.3** *(permutacyjne określenie wyznacznika)*
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia n. Wyznacznikiem macierzy A nazywamy liczbę $\det A$ określoną wzorem:

$$\det A \stackrel{def}{=} \sum_{p \in P_n} \operatorname{sgn}(p)\, a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n},$$

gdzie $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$, a sumowanie obejmuje wszystkie (tj. $n!$) permutacje n–elementowe.

○ **Ćwiczenie* 3.4.3**
Korzystając z definicji permutacyjnej obliczyć wyznaczniki podanych macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

○ **Ćwiczenie* 3.4.4**
Korzystając z definicji permutacyjnej napisać wzory ogólne na wyznaczniki macierzy stopnia $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$.

• **Definicja* 3.4.4** *(aksjomatyczne określenie wyznacznika)*

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Wyznacznikiem nazywamy funkcję rzeczywistą (zespoloną) det określoną na zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n spełniającą warunki:

1. $\det[k_1 \ldots ck_j \ldots k_n] = c \det[k_1 \ldots k_j \ldots k_n]$
dla każdego $c \in \boldsymbol{R}$ ($c \in \boldsymbol{C}$), gdzie k_j oznacza j-tą kolumnę macierzy;

2. $\det\left[k_1 \ldots k_j + k_j' \ldots k_n\right] = \det[k_1 \ldots k_j \ldots k_n] + \det\left[k_1 \ldots k_j' \ldots k_n\right]$;

3. $\det[k_1 \ldots k_i \ldots k_j \ldots k_n] = -\det[k_1 \ldots k_j \ldots k_i \ldots k_n]$;

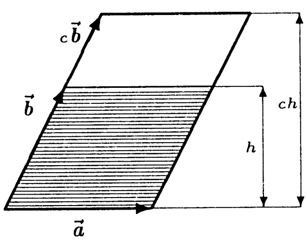
4. $\det I_n = 1$.

Uwaga*. Można udowodnić, że det jest jedyną funkcją spełniającą warunki **1.**–**4.** Warunek **3.** można zastąpić równoważnie warunkiem

$$\det\left[\, k_1 \; \ldots \; k_i \; \ldots \; k_j \; \ldots \; k_n \,\right] = 0,$$

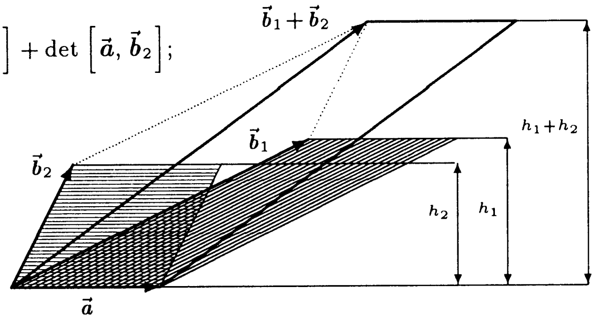
gdzie $k_i = k_j$. Podane wyżej warunki można przyjąć za definicję tzw. zorientowanej objętości równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \ldots, \vec{k}_n \in \boldsymbol{R}^n$. Pole równoległoboku (dla $n = 2$) oraz objętość równoległościanu (dla $n = 3$) spełniają z dokładnością do znaku te cztery warunki.

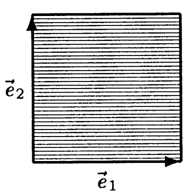
Interpretacja geometryczna do aksjomatycznej definicji wyznacznika *(dla $n=2$)*



1. $\det\left[\vec{a}, c\vec{b}\right] = c\det\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$;

2. $\det\left[\vec{a}, \vec{b}_1 + \vec{b}_2\right] = \det\left[\vec{a}, \vec{b}_1\right] + \det\left[\vec{a}, \vec{b}_2\right]$;





4. $\det[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = 1$.

- **Definicja* 3.4.5** *(definicja wyznacznika według Cauchy'ego[‡])*

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$, gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant n$, nazywamy liczbę $\det A$ określoną wzorem:

$$\det A \stackrel{def}{=} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n}^{n} (a_l - a_k)\right),$$

przy czym w rozwinięciu prawej strony wzoru czynnik $(a_i)^j$ należy zastąpić przez a_{ij}.

○ **Ćwiczenie* 3.4.5**

Napisać podany wyżej wzór dla $n = 2$ oraz $n = 3$.

3.5 Własności wyznaczników

■ **Fakt 3.5.1** *(własności wyznaczników)*

1. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej kolumnę (wiersz) złożoną z samych zer jest równy 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{0} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

2. Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przestawimy między sobą dwie (dwa) kolumny (wiersze).

$$\begin{vmatrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}} & \\ \dots & & \dots & & \dots \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{matrix}} & \\ \dots & & \dots & & \dots \end{vmatrix}.$$

3. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie (dwa) jednakowe kolumny (wiersze) jest równy 0.

$$\begin{vmatrix} & \boxed{\begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \\ \omega \end{matrix}} & & \boxed{\begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \vdots \\ \omega \end{matrix}} & \\ \dots & & \dots & & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

[‡]Augustin Louis Cauchy (1789–1857), matematyk francuski.

4. Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) macierzy kwadratowej zawierają wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{ca_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \boxed{ca_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boxed{ca_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \boxed{a_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boxed{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ponadto

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \dots & ca_{nn} \end{vmatrix} = c^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. Wyznacznik macierzy kwadratowej, której elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) są sumami dwóch składników jest równy sumie wyznaczników macierzy, w których elementy tej kolumny (tego wiersza) są zastąpione tymi składnikami.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a_{1j} + a'_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \boxed{a_{2j} + a'_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boxed{a_{nj} + a'_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \boxed{a_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boxed{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a'_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \boxed{a'_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boxed{a'_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. Wyznacznik macierzy nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnej kolumny (wiersza) dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny (innego wiersza) tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a_{1i}} & \dots & \boxed{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \boxed{a_{2i}} & \dots & \boxed{a_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boxed{a_{ni}} & \dots & \boxed{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \boxed{a_{1i} + ca_{1j}} & \dots & \boxed{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \boxed{a_{2i} + ca_{2j}} & \dots & \boxed{a_{2j}} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \boxed{a_{ni} + ca_{nj}} & \dots & \boxed{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ogólnie: wyznacznik macierzy nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnego wiersza (kolumny) dodamy sumę odpowiadających im elementów innych wierszy (kolumn) tej macierzy pomnożonych przez dowolne liczby.

7. Wyznaczniki macierzy kwadratowej i jej transpozycji są równe.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8. Niech $A_1, A_2, \dots, A_K$ będą macierzami kwadratowymi, niekoniecznie tych samych stopni. Wtedy

$$\det \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline ? & A_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline ? & ? & \dots & A_K \end{array}\right] = \det A_1 \cdot \det A_2 \cdot \ldots \cdot \det A_K,$$

gdzie symbole $\mathbf{0}$ oznaczają macierze zerowe, a symbole ? dowolne macierze odpowiednich wymiarów.

Uwaga A. Niech $\det[k_1 \dots k_n]$ oznacza wyznacznik macierzy o kolumnach $k_1, \dots, k_n$. Własności **1.** – **6.** wyznaczników można zapisać następująco:

1. $\det[k_1 \dots \mathbf{0} \dots k_n] = 0$;
2. $\det[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] = -\det[k_1 \dots k_j \dots k_i \dots k_n]$;
3. $\det[k_1 \dots k_j \dots k_j \dots k_n] = 0$;
4. $\det[k_1 \dots ck_j \dots k_n] = c\det[k_1 \dots k_j \dots k_n]$;
5. $\det[k_1 \dots k_j + k_j' \dots k_n] = \det[k_1 \dots k_j \dots k_n] + \det[k_1 \dots k_j' \dots k_n]$;
6. $\det[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] = \det[k_1 \dots k_i + ck_j \dots k_j \dots k_n]$.

Analogiczne wzory zachodzą dla wierszy.

Uwaga B. Korzystając z powyższych własności wyznaczników można istotnie uprościć ich obliczanie. Pozwalają one tak przekształcić wyznacznik, aby w jego wybranym wierszu lub kolumnie pozostawić co najwyżej jeden element niezerowy. Do oznaczania operacji na macierzach będziemy stosowali następujące symbole:

1. $w_i \longleftrightarrow w_j$ – oznacza zamianę między sobą i–tego oraz j–tego wiersza;
2. $k_i \longleftrightarrow k_j$ – oznacza zamianę między sobą i–tej oraz j–tej kolumny;
3. cw_i – oznacza pomnożenie i–tego wiersza przez liczbę c, gdzie $c \neq 0$;
4. ck_j – oznacza pomnożenie j–tej kolumny przez liczbę c, gdzie $c \neq 0$;
5. $w_i + cw_j$ – oznacza dodanie do elementów i–tego wiersza odpowiadających im elementów j–tego wiersza pomnożonych przez liczbę c;
6. $k_i + ck_j$ – oznacza dodanie do elementów i–tej kolumny odpowiadających im elementów j–tej kolumny pomnożonych przez liczbę c;

Podane wyżej przekształcenia macierzy nazywamy *operacjami elementarnymi*.

○ Ćwiczenie 3.5.2

Wykorzystując własności wyznaczników oraz prawidłowości w ułożeniu elementów macierzy obliczyć podane wyznaczniki (zapisać operacje elementarne jakie wykonano na macierzach):

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}$.

○ Ćwiczenie 3.5.3

Wykorzystując własności wyznaczników zapisać część rzeczywistą podanego wyznacznika w postaci sumy wyznaczników o elementach rzeczywistych:

$$\begin{vmatrix} 5+i & 6-7i & 1 \\ 3+3i & 7+2i & 4 \\ 2-i & 1+i & 5 \end{vmatrix}.$$

○ Ćwiczenie* 3.5.4

Z liczb $1, 2, \ldots, n^2$ utworzono wszystkie możliwe wyznaczniki stopnia n (wykorzystując w każdym z nich wszystkie liczby). Obliczyć sumę tych wyznaczników.

Algorytm Gaussa obliczania wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 3$ oraz niech $a_{11} \neq 0$. Wówczas stopień wyznacznika macierzy A można obniżyć o 1 stosując następujący schemat:

$$\det A \xlongequal{w_1 : a_{11}} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\vdots \\ w_n - a_{n1} w_1 \\ w_1 \cdot a_{11}}]{\substack{w_2 - a_{21} w_1 \\ w_3 - a_{31} w_1}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{0} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix},$$

gdzie $a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1} \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$.

Uwaga. Zamiast elementu $a_{11} \neq 0$ można wybrać inny niezerowy element i analogicznie przekształcać odpowiednie wiersze.

○ Ćwiczenie 3.5.5

Obliczyć podane wyznaczniki stosując algorytm Gaussa do obniżania ich stopni:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$; d*) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

■ Algorytm Chió obliczania wyznaczników*

Niech $[a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$ oraz niech $a_{11} \neq 0$. Wówczas

$$\left|\begin{array}{c|cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \longleftarrow & a_{1j} & \longrightarrow & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \uparrow & \vdots & \vdots & \ddots & \uparrow & \iddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \longleftarrow & \boxed{a_{ij}} & \longrightarrow & a_{in} \\ \downarrow & \vdots & \vdots & \iddots & \downarrow & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a'_{2n} \\ a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3j} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \uparrow & \iddots & \vdots \\ a'_{i2} & a'_{i3} & \longleftarrow & \boxed{a'_{ij}} & \longrightarrow & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \downarrow & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix},$$

gdzie $a'_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & \boxed{a_{ij}} \end{vmatrix}$ dla $i, j = 2, 3, \ldots, n$.

Uwaga*. Algorytm Chió stosujemy głównie do obliczania wyznaczników macierzy niewielkich stopni, których elementy są liczbami całkowitymi.

○ **Ćwiczenie* 3.5.6**

Stosując algorytm Chió obliczyć wyznaczniki podanych macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

■ **Twierdzenie 3.5.7** *(Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy)*

Niech A i B będą macierzami kwadratowymi tego samego stopnia. Wtedy

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Uwaga. Z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że dla $n \in \boldsymbol{N}$ mamy

$$\det\left(A^n\right) = (\det A)^n.$$

Na ogół wyznacznik sumy macierzy nie równa się sumie ich wyznaczników, np.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \neq \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

○ **Ćwiczenie 3.5.8**

a) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Obliczyć $\det\left(A^7\right)$;

b) Obliczyć wyznacznik macierzy X spełniającej równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 36 \\ 5 & 12 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

c) Niech A i B będą macierzami kwadratowymi stopnia 3 spełniającymi warunki $\det A = 2$, $\det B = 3$. Obliczyć

$$\det\left[\left(\frac{1}{2}A\right)^3\right] \quad \text{oraz} \quad \det\left[A^4(-B)\right].$$

○ **Ćwiczenie 3.5.9**
Uzasadnić, że nie istnieje macierz A spełniająca jednocześnie warunki:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■ **Fakt* 3.5.10** *(wyznacznik Vandermonde'a*[§]*)*
Niech $n \geqslant 2$ oraz niech $z_1, z_2, \ldots, z_n$ będą liczbami zespolonymi. Wtedy

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (z_l - z_k).$$

Jeżeli liczby $z_1, z_2, \ldots, z_n$ są parami różne, to

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) \neq 0.$$

○ **Ćwiczenie* 3.5.11**
Obliczyć podane wyznaczniki Vandermonde'a:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \ldots & n^{n-1} \end{vmatrix}$.

3.6 Macierz odwrotna

● **Definicja 3.6.1** *(macierz odwrotna)*
Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz oznaczoną przez A^{-1}, która spełnia warunek:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n.

[§]Alexandre Téophil Vandermonde (1735-1796), matematyk francuski.

Uwaga. Jeżeli macierz A ma macierz odwrotną, to nazywamy ją *odwracalną* i wówczas $\det A \neq 0$. Macierz odwrotna jest określona jednoznacznie.

○ **Ćwiczenie 3.6.2**
Układając odpowiednie równania zbadać, czy podane macierze są odwracalne:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

○ **Ćwiczenie 3.6.3**
Obliczyć macierz A^2 i na tej podstawie wyznaczyć A^{-1}, jeżeli

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

○ **Ćwiczenie* 3.6.4**
Niech macierz A spełnia warunek

$$A^3 + 3A^2 + 2A + 4I = \mathbf{0}.$$

Uzasadnić, że macierz ta jest odwracalna i następnie wyrazić A^{-1} w zależności od A.

○ **Ćwiczenie 3.6.5**
Niech $d_{ii} \neq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Pokazać, że

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (d_{11})^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (d_{22})^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & (d_{nn})^{-1} \end{bmatrix}.$$

○ **Ćwiczenie* 3.6.6**
Pokazać, że macierz odwrotna jest określona jednoznacznie.

○ **Ćwiczenie* 3.6.7**
Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Uzasadnić, że jeżeli istnieje macierz B taka, że $AB = I_n$, gdzie I_n oznacza macierz jednostkową stopnia n, to również $BA = I_n$.

● **Definicja 3.6.8** *(macierz osobliwa i nieosobliwa)*
Macierz kwadratową A nazywamy macierzą osobliwą, gdy

$$\det A = 0.$$

W przeciwnym przypadku mówimy, że macierz A jest nieosobliwa.

Twierdzenie 3.6.9 *(o macierzy odwrotnej)*

1. Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.
2. Jeżeli macierz $A = [a_{ij}]$ stopnia n jest nieosobliwa, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

gdzie D_{ij} oznaczają dopełnienia algebraiczne elementów a_{ij} macierzy A.

Uwaga. Macierz $[D_{ij}]$ oznaczamy symbolem A^D i nazywamy macierzą dopełnień algebraicznych. Zatem

$$A^{-1} = \frac{\left(A^D\right)^T}{\det A}.$$

W szczególności, jeśli macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa, to

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3.6.10

Korzystając z powyższego twierdzenia znaleźć macierze odwrotne do podanych:

a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ćwiczenie 3.6.11

Wykorzystując operację odwracania macierzy rozwiązać podane równania macierzowe:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; d*) $2X + X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -4 \\ 15 & 0 & 18 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$; f*) $\left(3X + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & -4 & -2 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

Fakt 3.6.12 *(własności macierzy odwrotnych)*

Niech macierze A i B tego samego stopnia będą odwracalne oraz niech $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$n \in N$. Wtedy macierze A^{-1}, A^T, AB, αA, A^n także są odwracalne i prawdziwe są równości:

1. $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$; **2.** $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; **3.** $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$;

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; **5.** $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}\left(A^{-1}\right)$; **6.** $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$.

○ **Ćwiczenie 3.6.13**

Niech macierze kwadratowe A, B i C tego samego stopnia będą nieosobliwe. Wyprowadzić wzór na macierz odwrotną do macierzy ABC.

○ **Ćwiczenie 3.6.14**

Znaleźć macierz, jeżeli macierz odwrotna do niej ma postać:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$; b) $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

○ **Ćwiczenie* 3.6.15**

Pokazać, że macierz odwrotna (o ile istnieje) do macierzy

a) trójkątnej górnej (dolnej) jest macierzą trójkątną górną (dolną);

b) symetrycznej (antysymetrycznej) jest macierzą symetryczną (antysymetryczną).

■ Bezwyznacznikowy algorytm znajdowania macierzy odwrotnej

Niech A będzie macierzą nieosobliwą. Aby znaleźć macierz odwrotną do macierzy A postępujemy w następujący sposób. Z prawej strony macierzy A dopisujemy macierz jednostkową I tego samego stopnia. Na **wierszach** otrzymanej w ten sposób macierzy blokowej $[A|I]$ będziemy wykonywać następujące operacje elementarne:

1. przestawiać między sobą dwa dowolne wiersze ($w_i \longleftrightarrow w_j$);

2. dowolny wiersz mnożyć przez stałą różną od zera (cw_i);

3. do elementów dowolnego wiersza dodawać sumy odpowiadających im elementów innych wierszy pomnożonych przez dowolne liczby ($w_i + cw_j$).

Przy pomocy tych operacji sprowadzamy macierz blokową $[A|I]$ do postaci $[I|B]$. Macierz B jest wtedy macierzą odwrotną do macierzy A, tj. $B = A^{-1}$.

$$[\mathrm{A}|\mathrm{I}] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} \left[\mathrm{I}|\mathrm{A}^{-1}\right].$$

Rys. 3.6.1. Schemat bezwyznacznikowej metody znajdowania macierzy odwrotnej.

Uwaga. Metoda bezwyznacznikowa jest też nazywana metodą przekształceń elementarych.

○ **Ćwiczenie 3.6.16**

Korzystając z powyższego algorytmu znaleźć macierze odwrotne do podanych:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3.7 Algorytm Gaussa

Algorytm Gaussa

Niech A będzie macierzą nieosobliwą stopnia $n \geqslant 2$. Macierz tę można przekształcić do macierzy jednostkowej I_n wykonując następujące operacje elementarne na jej **wierszach**:

1. zamianę między sobą dwóch dowolnych wierszy;

2. mnożenie dowolnego wiersza przez liczbę różną od zera;

3. dodanie do elementów dowolnego wiersza odpowiadających im elementów innego wiersza pomnożonych przez dowolną liczbę.

Macierz jednostkową uzyskamy w dwóch krokach:

I krok. Otrzymanie macierzy trójkątnej górnej z jedynkami na głównej przekątnej:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Operacje elementarne wykonujemy tak, aby kolejne kolumny macierzy A uzyskały przedstawioną powyżej postać. Przekształcenia zaczynamy od uzyskania odpowiedniej postaci pierwszej kolumny. Jeżeli $a_{11} \neq 0$, to wiersze $w_1, w_2, \ldots, w_n$ macierzy A przekształcamy kolejno na wiersze $w_1', w_2', \ldots, w_n'$ według wzorów:

$$\begin{cases} w_1' = \dfrac{w_1}{a_{11}}, \\ w_2' = w_2 - a_{21}w_1', \\ \qquad \vdots \\ w_n' = w_n - a_{n1}w_1'. \end{cases}$$

Jeżeli natomiast $a_{11} = 0$, to wiersze macierzy A przestawiamy tak, aby w jej lewym górnym rogu znalazł się element niezerowy i dalej wykonujemy wymienione wcześniej operacje.

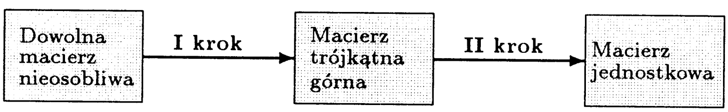
Kolejne kolumny z jedynkami na przekątnej i zerami poniżej przekątnej uzyskujemy stosując przedstawione wyżej postępowanie do macierzy coraz niższych stopni, począwszy od stopnia $n-1$ aż do stopnia 1 włącznie.

II krok. Otrzymanie macierzy jednostkowej postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wiersze $w'_n, w'_{n-1}, \ldots, w'_1$ otrzymanej macierzy trójkątnej przekształcamy kolejno na wiersze $w''_n, w''_{n-1}, \ldots, w''_1$ macierzy jednostkowej w następujący sposób:

$$\begin{cases} w''_n & = & w'_n, \\ w''_{n-1} & = & w'_{n-1} - b_{n-1\,n} w''_n, \\ w''_{n-2} & = & w'_{n-2} - b_{n-2\,n-1} w''_{n-1} - b_{n-2\,n} w''_n, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w''_1 & = & w'_1 - b_{1\,2} w''_2 - b_{1\,3} w''_3 - \ldots - b_{1\,n} w''_n. \end{cases}$$



Rys. 3.7.1. Schemat działania algorytmu Gaussa.

Uwaga. Algorytm Gaussa jest wygodnym narzędziem do obliczania wyznaczników, odwracania macierzy, określania ich rzędów oraz do rozwiązywania układów równań liniowych. Macierzy osobliwej nie można sprowadzić stosując operacje elementarne do macierzy jednostkowej.

○ Ćwiczenie 3.7.1

Korzystając z algorytmu Gaussa przekształcić podane macierze do postaci jednostkowej (zapisać operacje elementarne jakie wykonano na macierzach):

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{bmatrix}; \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 4 \\ 2 & 9 & -5 & 10 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

○ Ćwiczenie 3.7.2

Obliczyć podane wyznaczniki stosując pierwszy krok algorytmu Gaussa do jednej z kolumn macierzy i obniżając w ten sposób stopień wyznacznika:

$$
\text{a)} \begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 & 9 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 4 & 9 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.
$$

○ **Ćwiczenie 3.7.3**

Znaleźć macierze odwrotne do podanych stosując algorytm Gaussa:

$$
\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

3.8 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Faktu 3.2.15** *(własności iloczynu macierzy)*

Przedstawimy jedynie dowód własności **4.** Niech $[Y]_{ij}$ oznacza element i-tego wiersza i j-tej kolumny macierz Y. Wystarczy udowodnić, że dla dowolnych liczb naturalnych i, j, gdzie $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, l$, zachodzi równość $[(AB)C]_{ij} = [A(BC)]_{ij}$. Z definicji mnożenia macierzy wynikają równości

$$
\begin{aligned}
[(AB)C]_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^{k} [AB]_{i\alpha} [C]_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\sum_{\beta=1}^{n} [A]_{i\beta} [B]_{\beta\alpha} \right) [C]_{\alpha j} \\
&= \sum_{\beta=1}^{n} [A]_{i\beta} \left(\sum_{\alpha=1}^{k} [B]_{\beta\alpha} [C]_{\alpha j} \right) = \sum_{\beta=1}^{n} [A]_{i\beta} [BC]_{\beta j} = [A(BC)]_{ij}.
\end{aligned}
$$

■ **Dowód Faktu 3.2.24** *(własności transpozycji macierzy)*

Przedstawimy jedynie dowód własności **3.** Stosując oznaczenia jak w dowodzie powyżej wystarczy uzasadnić, że dla dowolnych liczb naturalnych i, j, gdzie $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$, zachodzi równość

$$
\left[(AB)^T\right]_{ij} = \left[B^T A^T\right]_{ij}.
$$

Z definicji mnożenia macierzy wynika, że

$$
\begin{aligned}
\left[(AB)^T\right]_{ij} &= [AB]_{ji} = \sum_{\alpha=1}^{n} [A]_{j\alpha} [B]_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left[A^T\right]_{\alpha j} \left[B^T\right]_{i\alpha} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n} \left[B^T\right]_{i\alpha} \left[A^T\right]_{\alpha j} = \left[B^T A^T\right]_{ij}.
\end{aligned}
$$

■ **Dowód Faktu* 3.2.27** *(własności macierzy symetrycznych i antysymetrycznych)*

1. Z własności transpozycji macierzy wynikają równości

$$
\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A = A + A^T.
$$

Zatem macierz $A + A^T$ jest symetryczna. Podobnie

$$\left(A - A^T\right)^T = A^T - \left(A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A - A^T\right),$$

więc macierz $A - A^T$ jest antysymetryczna.

2. Mamy $\left(AA^T\right)^T = \left(A^T\right)^T A^T = AA^T$ oraz $\left(A^T A\right)^T = A^T \left(A^T\right)^T = A^T A$, więc macierze AA^T i $A^T A$ są symetryczne.

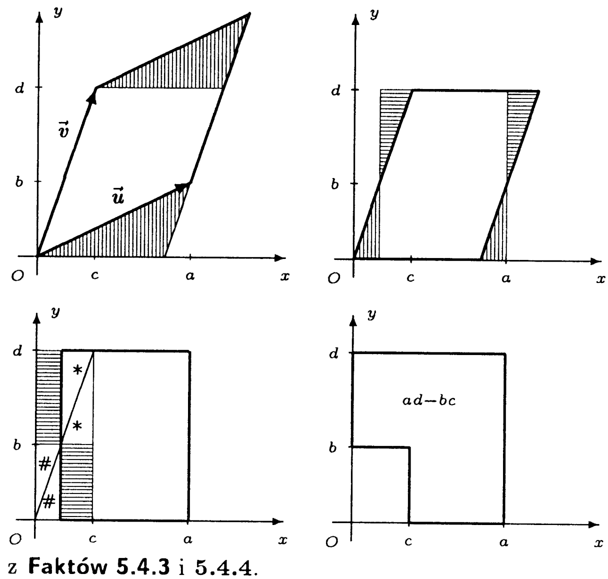
3. Macierz $B = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ jest symetryczna, zaś macierz $C = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ antysymetryczna. Ponadto $A = B + C$. Gdyby istniały macierze B_1 symetryczna i C_1 antysymetryczna takie, że $A = B_1 + C_1$, to mielibyśmy

$$\begin{aligned} B + C = B_1 + C_1 &\Longrightarrow B - B_1 = C_1 - C \Longrightarrow (B - B_1)^T = (C_1 - C)^T \\ &\Longrightarrow B - B_1 = -(C_1 - C) = C_1 - C \Longrightarrow 2(C_1 - C) = \boldsymbol{O} \\ &\Longrightarrow C_1 - C = \boldsymbol{O} \Longrightarrow B_1 - B = \boldsymbol{O} \Longrightarrow B_1 = B \text{ i } C_1 = C. \end{aligned}$$

Przedstawienie jest zatem jednoznaczne.

■ Dowód interpretacji geometrycznej wyznaczników 2-go i 3-go stopnia

Dowód wzoru **1.** przedstawiono na rysunkach poniżej. Dowód ten pochodzi od Davida Gau (zobacz R.B.Nelsen, *Proofs without words*, MAA, Washington 1993).



Wzór **2.** wynika z **Faktów 5.4.3** i **5.4.4**.

■ Dowód Faktu 3.3.10 *(wyznacznik macierzy trójkątnej)*

Dowód przeprowadzimy dla macierzy trójkątnej górnej stopnia $n \geqslant 2$ metodą indukcji matematycznej. Przy przekształcaniu wyznaczników będziemy stosować rozwinięcia Laplace'a względem ich pierwszych kolumn. Dla $n = 2$ mamy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + 0 \cdot (-1)^{2+1}a_{12} = a_{11} \cdot a_{22}.$$

Załóżmy teraz, że wzór zachodzi dla macierzy trójkątnych górnych stopnia $n-1$. Uzasadnimy jego prawdziwość dla macierzy trójkątnej górnej $[a_{ij}]$ stopnia n. Mamy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{zał.}}{\underset{\text{ind.}}{=}} a_{11}\left(a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}\right) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}.$$

■ **Dowód Faktu 3.5.1** *(własności wyznaczników)*

Dowody własności **1.**–**6.** przeprowadzimy dla kolumn. Symbolem $[k_1 k_2 \ldots k_n]$ będziemy oznaczać macierz $A=[a_{ij}]$ stopnia n o kolumnach $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

1. Załóżmy, że kolumna k_j jest zerowa. Stosując rozwinięcie Laplace'a względem tej kolumny otrzymujemy

$$\det[k_1 \ldots 0 \ldots k_n] = 0\cdot D_{1j} + 0\cdot D_{2j} + \ldots + 0\cdot D_{nj} = 0.$$

2. Stosujemy indukcję matematyczną ze względu na n. Dla $n=2$ mamy

$$\det[k_1 k_2] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -\det[k_2 k_1].$$

Załóżmy teraz, że dla dowolnej macierzy stopnia n przy przestawieniu kolumn wyznacznik zmienia znak. Niech A będzie macierzą stopnia $n+1$. Rozwijamy wyznacznik tej macierzy względem kolumny, która nie ulega przestawieniu, np. kolumny k_{n+1} otrzymując

$$\det[k_1 \ldots k_i \ldots k_j \ldots k_{n+1}] = a_{1\,n+1}D_{1\,n+1} + a_{2\,n+1}D_{2\,n+1} + \ldots + a_{n+1\,n+1}D_{n+1\,n+1}.$$

Oznaczmy przez $D'_{l\,n+1}$, gdzie $1 \leqslant l \leqslant n+1$, dopełnienia algebraiczne elementów ostatniej kolumny macierzy A po przestawieniu kolumn k_i i k_j. Z założenia indukcyjnego wynika, że $D'_{l\,n+1} = -D_{l\,n+1}$, zatem

$$\begin{aligned} \det A &= -\left(a_{1\,n+1}D'_{1\,n+1} + a_{2\,n+1}D'_{2\,n+1} + \ldots + a_{n+1\,n+1}D'_{n+1\,n+1}\right) \\ &= -\det[k_1 \ldots k_j \ldots k_i \ldots k_n k_{n+1}]. \end{aligned}$$

3. Niech $k_i = k_j$. Korzystając z własności **2.** otrzymamy

$$\det[k_1 \ldots k_j \ldots k_j \ldots k_n k_{n+1}] = -\det[k_1 \ldots k_j \ldots k_j \ldots k_n k_{n+1}].$$

Stąd

$$2\det[k_1 \ldots k_j \ldots k_j \ldots k_n k_{n+1}] = 0, \quad \text{czyli} \quad \det[k_1 \ldots k_j \ldots k_j \ldots k_n k_{n+1}] = 0.$$

4. Zastosujemy rozwinięcie Laplace'a wyznacznika względem j-tej kolumny. Mamy

$$\begin{aligned} \det[k_1 \ldots ck_j \ldots k_n] &= ca_{1j}D_{1j} + ca_{2j}D_{2j} + \ldots + ca_{nj}D_{nj} \\ &= c\left(a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \ldots + a_{nj}D_{nj}\right) = c\det[k_1 \ldots k_j \ldots k_n]. \end{aligned}$$

5. Rozwijamy wyznacznik względem j-tej kolumny otrzymując

$$\begin{aligned}
\det\left[k_1 \dots k_j + k_j' \dots k_n\right] &= \left(a_{1j} + a_{1j}'\right) D_{1j} + \left(a_{2j} + a_{2j}'\right) D_{2j} + \dots + \left(a_{nj} + a_{nj}'\right) D_{nj} \\
&= \left(a_{1j} D_{1j} + a_{2j} D_{2j} + \dots + a_{nj} D_{nj}\right) \\
&\quad + \left(a_{1j}' D_{1j} + a_{2j}' D_{2j} + \dots + a_{nj}' D_{nj}\right) \\
&= \det\left[k_1 \dots k_j \dots k_n\right] + \det\left[k_1 \dots k_j' \dots k_n\right].
\end{aligned}$$

6. Wykorzystujemy własności **5.**, **4.** oraz **3.** zaznaczając ten fakt nad równością. Mamy

$$\begin{aligned}
\det\left[k_1 \dots k_i + ck_j \dots k_j \dots k_n\right] &\overset{\mathbf{5.}}{=} \det\left[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n\right] + \det\left[k_1 \dots ck_j \dots k_j \dots k_n\right] \\
&\overset{\mathbf{4.}}{=} \det\left[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n\right] + c\det\left[k_1 \dots k_j \dots k_j \dots k_n\right] \\
&\overset{\mathbf{3.}}{=} \det\left[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n\right] + c \cdot 0 \\
&= \det\left[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n\right].
\end{aligned}$$

7. Zastosujemy dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ równość macierzy $A = A^T$ implikuje równość ich wyznaczników. Załóżmy teraz, że równość $\det B = \det B^T$ zachodzi dla każdej macierzy B stopnia $n-1$. Udowodnimy, że $\det A = \det A^T$ dla macierzy $A = [a_{ij}]$ stopnia n. Zauważmy najpierw, że $(A_{ij})^T = \left(A^T\right)_{ij}$, gdzie A_{ij} i $\left(A^T\right)_{ij}$ oznaczają macierze stopnia $n-1$ powstałe przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny odpowiednio macierzy A i A^T. Z założenia indukcyjnego zachodzi zatem równość $\det\left(A^T\right)_{ij} = \det\left(A_{ij}\right)^T = \det A_{ij}$. Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika macierzy A^T względem ostatniego wiersza daje równości

$$\begin{aligned}
\det A^T &= a_{1n}(-1)^{n+1}\det\left(A^T\right)_{1n} + a_{2n}(-1)^{n+2}\det\left(A^T\right)_{2n} + \dots + a_{nn}(-1)^{n+n}\det\left(A^T\right)_{nn} \\
&= a_{1n}(-1)^{n+1}\det A_{1n} + a_{2n}(-1)^{n+2}\det A_{2n} + \dots + a_{nn}(-1)^{n+n}\det A_{nn} \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

8. Wzór wystarczy udowodnić dla $K = 2$. W przypadku $K > 2$ stosuje się indukcję matematyczną. Niech zatem A, B, C będą macierzami o wymiarach odpowiednio $n \times n$, $k \times k$, $k \times n$ oraz niech $\mathbf{0}$ będzie macierzą zerową wymiaru $n \times k$. Uzasadnimy, że

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline C & B \end{array}\right] = \det A \cdot \det B.$$

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej ze względu na k przy ustalonym n. Znak ? wpisany w bloku macierzy oznacza, że elementy tam znajdujące się są nieistotne w rozważaniach. Niech $B = [b_{ij}]$ będzie macierzą stopnia k. Dla $k = 1$ mamy

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline C & b_{11} \end{array}\right] = (-1)^{(n+1)+(n+1)} b_{11} \cdot \det A = b_{11} \cdot \det A = \det A \cdot \det B.$$

Załóżmy teraz, że wzór z tezy zachodzi dla dowolnej macierzy B stopnia $k-1$. Pokażemy, że zachodzi on także dla dowolnej macierzy B stopnia k. Przy obliczaniu wyznacznika zastosujemy rozwinięcie Laplace'a względem ostatniej kolumny. Mamy

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline C & B \end{array}\right] =$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{(n+1)+(n+k)} \cdot b_{1k} \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_{1k} \end{array}\right] + (-1)^{(n+2)+(n+k)} \cdot b_{2k} \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_{2k} \end{array}\right] \\
&\quad + \ldots + (-1)^{(n+k)+(n+k)} \cdot b_{kk} \cdot \det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline ? & B_{kk} \end{array}\right] \\
&\overset{\text{zał.}}{\underset{\text{ind.}}{=}} (-1)^{1+k} b_{1k} \det A \cdot \det B_{1k} + (-1)^{2+k} b_{2k} \det A \cdot \det B_{2k} \\
&\quad + \ldots + (-1)^{k+k} b_{kk} \det A \cdot \det B_{kk} \\
&= \det A \left[(-1)^{1+k} b_{1k} \det B_{1k} + (-1)^{2+k} b_{2k} \det B_{2k} + \ldots + (-1)^{k+k} b_{kk} \det B_{kk}\right] \\
&= \det A \cdot \det B.
\end{aligned}
$$

■ Dowód algorytmu Chió obliczania wyznaczników

Mamy

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\xlongequal{w_1 : a_{11}} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[\substack{\vdots \\ w_n - a_{n1} w_1}]{\substack{w_2 - a_{21} w_1 \\ w_3 - a_{31} w_1}} a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} - a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} - a_{n1}\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn} - a_{n1}\frac{a_{1n}}{a_{11}} \end{vmatrix}
$$

$$
= a_{11} \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \frac{a'_{22}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a'_{2n}}{a_{11}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a'_{n2}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a'_{nn}}{a_{11}} \end{vmatrix} = \frac{a_{11}}{a_{11}^{n-1}} \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad a'_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}.
$$

■ Dowód Twierdzenia 3.5.7 *(Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy)*

I sposób. Z własnosci 8. wyznaczników (**Fakt 3.5.1**) wynika, że

$$
\det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline -I & B \end{array}\right] = \det A \cdot \det B,
$$

gdzie $\mathbf{0}$, I są macierzami odpowiednio zerową i jednostkową stopnia n. Pokażemy niżej, że stosując odpowiednie operacje elementarne na n początkowych wierszach macierzy blokowej

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline -I & B \end{array}\right]$$

można otrzymać macierz

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & AB \\ \hline -I & B \end{array}\right].$$

Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline -I & B \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{-I} & \multicolumn{4}{c}{B} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\vdots \\ w_n + a_{n1} w_{n+1}}]{\substack{w_1 + a_{11} w_{n+1} \\ w_2 + a_{21} w_{n+1}}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \dots & a_{21}b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{n1}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \dots & a_{n1}b_{1n} \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{-I} & \multicolumn{4}{c}{B} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\vdots \\ w_n + a_{n2} w_{n+2}}]{\substack{w_1 + a_{12} w_{n+2} \\ w_2 + a_{22} w_{n+2}}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & a_{1n} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & \dots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & \dots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} & \dots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{-I} & \multicolumn{4}{c}{B} \end{array}\right] \cdots$$

$$\xrightarrow[\substack{\vdots \\ w_n + a_{nn} w_{n+n}}]{\substack{w_1 + a_{1n} w_{n+n} \\ w_2 + a_{2n} w_{n+n}}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{-I} & \multicolumn{4}{c}{B} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & AB \\ \hline -I & B \end{array}\right],$$

gdzie

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{dla } 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Ponieważ operacje elementarne nie zmieniają wyznacznika, więc

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0} \\ \hline -I & B \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & AB \\ \hline -I & B \end{array}\right].$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że

$$\det \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & AB \\ \hline -I & B \end{array}\right] = \det(AB).$$

Zastosujemy rozwinięcie Laplace'a do wyznacznika po lewej stronie równości. Stosując n-krotnie to rozwinięcie do pierwszych kolumn kolejno otrzymywanych wyznaczników

dostaniemy
$$\det\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & AB \\ \hline -I & B \end{array}\right] = (-1)^{2(n^2+n)}\det(AB) = \det(AB).$$

II sposób. Dowód przeprowadzimy korzystając z definicji permutacyjnej wyznacznika. Niech $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ oraz $AB = C = [c_{ij}]$ dla $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Symbolami $\vec{a}_j$, $\vec{b}_j$, $\vec{c}_j$ oznaczamy odpowiednio j-te kolumny macierzy A, B, C. Rozważane macierze możemy teraz zapisać w postaci $A = [\vec{a}_1\,\vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n]$, $B = \left[\vec{b}_1\,\vec{b}_2 \ldots \vec{b}_n\right]$, $C = [\vec{c}_1\,\vec{c}_2 \ldots \vec{c}_n]$.

Zauważmy, że $\vec{c}_j = \sum\limits_{p=1}^{n} \vec{a}_p b_{pj}$. Zatem
$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det[\vec{c}_1\,\vec{c}_2 \ldots \vec{c}_n] = \det\left[\sum_{p_1=1}^{n} \vec{a}_{p_1} b_{p_1 1}\,\vec{c}_2 \ldots \vec{c}_n\right] \\
&= \sum_{p_1=1}^{n} b_{p_1 1}\det[\vec{a}_{p_1}\,\vec{c}_2 \ldots \vec{c}_n] = \ldots = \\
&= \sum_{p_1=1}^{n}\sum_{p_2=1}^{n}\cdots\sum_{p_n=1}^{n} b_{p_1 1} b_{p_2 2}\ldots b_{p_n n}\det[\vec{a}_{p_1}\,\vec{a}_{p_2} \ldots \vec{a}_{p_n}].
\end{aligned}$$

Jeżeli $p_i = p_j$ dla $i \neq j$, to $\det[\vec{a}_{p_1}\,\vec{a}_{p_2} \ldots \vec{a}_{p_n}] = 0$. Dlatego sumowanie wystarczy przeprowadzić po zbiorze P_n wszystkich permutacji $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Mamy zatem
$$\det(AB) = \sum_{p\in P_n} b_{p_1 1} b_{p_2 2}\ldots b_{p_n n}\operatorname{sgn}(p)\cdot\det A = \det A\cdot\det B.$$

■ Dowód Faktu* 3.5.10 *(wyznacznik Vandermonde'a)*

Dowód przeprowadzimy metodą indukcji matematycznej. Dla $n = 2$ mamy
$$V(z_1, z_2) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \end{vmatrix} = z_2 - z_1,$$

więc wzór jest prawdziwy. Załóżmy teraz, że wzór jest prawdziwy dla liczby naturalnej $n \geqslant 2$. Mamy zatem
$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \prod_{1\leqslant k<l\leqslant n} (z_l - z_k).$$

Uzasadnimy, że
$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}) = \prod_{1\leqslant k<l\leqslant n+1} (z_l - z_k).$$

Mamy
$$V(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \xlongequal[\substack{\vdots \\ k_2 - z_{n+1}k_1}]{\substack{k_{n+1} - z_{n+1}k_n \\ k_n - z_{n+1}k_{n-1}}} \begin{vmatrix} 1 & z_1 - z_{n+1} & z_1^2 - z_{n+1}z_1 & \ldots & z_1^n - z_{n+1}z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 - z_{n+1} & z_2^2 - z_{n+1}z_2 & \ldots & z_2^n - z_{n+1}z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n - z_{n+1} & z_n^2 - z_{n+1}z_n & \ldots & z_n^n - z_{n+1}z_n^{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{n+2} (z_1 - z_{n+1}) (z_2 - z_{n+1}) \cdot \ldots \cdot (z_n - z_{n+1}) V (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

$$= (-1)^{2n+2} \prod_{k=1}^{n} (z_{n+1} - z_k) \cdot \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (z_l - z_k) = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n+1} (z_l - z_k).$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$.

■ **Dowód Twierdzenia 3.6.9** *(o macierzy odwrotnej)*

1. Załóżmy najpierw, że macierz A jest odwracalna i niech B będzie macierzą odwrotną do A. Wówczas z równości $AB = I$ wynika, że $\det(AB) = 1$. Korzystając teraz z twierdzenia Cauchy'ego otrzymamy $\det A \cdot \det B = 1$, czyli $\det A \neq 0$, co świadczy o nieosobliwości macierzy A.

Z drugiej strony niech $\det A \neq 0$. Definiujemy macierz $C = [c_{ij}]$ zależnością

$$c_{ij} = \frac{D_{ji}}{\det A},$$

gdzie D_{ji} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ji} macierzy A. Wykażemy, że C jest macierzą odwrotną do A, tzn., że $AC = CA = I$. Niech $\delta_{ij} = 1$ dla $i = j$ oraz $\delta_{ij} = 0$ dla $i \neq j$. Oczywiście $I = [\delta_{ij}]$. Wystarczy sprawdzić, że

$$[AC]_{ij} = [CA]_{ij} = \delta_{ij} \text{ dla } 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Zauważmy najpierw, że dla $1 \leqslant i \leqslant n$ sumy $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} D_{ki}$ są rozwinięciami Laplace'a wyznacznika macierzy A, zaś dla $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, sumy $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{jk}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{ki}$ są równe 0, bo są one rozwinięciami Laplace'a wyznaczników o dwóch jednakowych wierszach lub kolumnach. Stąd i z definicji mnożenia macierzy otrzymujemy wzory

$$[AC]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{jk} = \frac{\delta_{ij} \det A}{\det A} = \delta_{ij},$$

$$[CA]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} a_{kj} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{ki} = \frac{\delta_{ij} \det A}{\det A} = \delta_{ij}.$$

2. Wzór na macierz odwrotną pojawił się w sposób naturalny jako fragment dowodu części **1**. Wystarczy zauważyć, że $A^{-1} = C$.

■ **Dowód Faktu 3.6.12** *(własności macierzy odwrotnych)*

Uzasadnimy jedynie wzór **4**. Załóżmy, że macierze A, B są odwracalne. Są więc one nieosobliwe. Stąd i z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$, więc macierz AB jest nieosobliwa i ma macierz odwrotną. Dla dowodu wzoru wystarczy sprawdzić, że macierzą odwrotną jest macierz $B^{-1} A^{-1}$. Mamy

$$(AB) \left(B^{-1} A^{-1}\right) = \left(B^{-1} A^{-1}\right) (AB) = I.$$

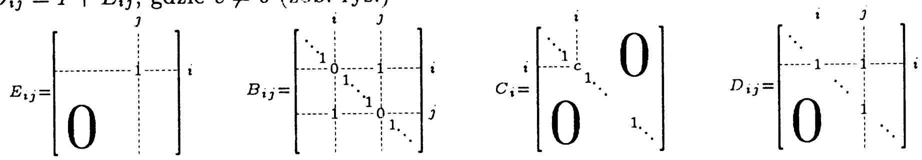
Równości te wynikają z łączności mnożenia macierzy i z definicji macierzy odwrotnej. Mamy bowiem

$$(AB) \left(B^{-1} A^{-1}\right) = A \left(B B^{-1}\right) A^{-1} = A I A^{-1} = A A^{-1} = I \text{ oraz}$$

$$\left(B^{-1} A^{-1}\right) (AB) = B^{-1} \left(A^{-1} A\right) B = B^{-1} I B = B^{-1} B = I.$$

Dowód bezwyznacznikowej metoday znajdowania macierzy odwrotnej

Niech A będzie macierzą nieosobliwą stopnia n. Oznaczamy symbolem E_{ij} macierz stopnia n, która ma jedynkę na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny, a poza tym same zera. Niech teraz $B_{ij} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$, $C_i = I + (c-1)E_{ii}$, $D_{ij} = I + E_{ij}$, gdzie $c \neq 0$ (zob. rys.)



Zauważmy tu, że mnożąc lewostronnie macierz A przez macierze B_{ij}, C_i oraz D_{ij} wykonujemy odpowiednio operację zamiany wiersza i-tego z j-tym, mnożenia i-tego wiersza przez stałą c oraz dodania wiersza j-tego do i-tego. Macierze postaci B_{ij}, C_i, D_{ij} są zatem macierzami operacji elementarnych na wierszach macierzy A. Niech teraz $E = E_N \cdot E_{N-1} \cdot \ldots \cdot E_1$ będzie złożeniem operacji elementarnych sprowadzających macierz A do postaci I, tzn. $EA = I$, przy czym E_k dla $k = 1, 2, \ldots, N$ są macierzami typu B_{ij}, C_i, D_{ij}. Stąd wynika, że $E = A^{-1}$ i zachodzi implikacja

$$EA = I \Longrightarrow EI = A^{-1},$$

tłumacząca schemat działania tej metody odwracania macierzy. Kolejne etapy przekształcania macierzy blokowej można zatem przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}[A|I] &\longrightarrow [E_1A|E_1I] \longrightarrow [E_2E_1A|E_2E_1I] \longrightarrow \ldots \\ &\longrightarrow [E_NE_{N-1}\ldots E_1A|E_NE_{N-1}\ldots E_1I] = \left[A^{-1}A|A^{-1}I\right] = \left[I|A^{-1}\right].\end{aligned}$$

3.9 Odpowiedzi i wskazówki

3.2.2 a) $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 9 & 11 & 9 \end{bmatrix}$; b) $A+B = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1+5i \end{bmatrix}$, $A-B = \begin{bmatrix} 1-5i \\ 5+5i \end{bmatrix}$;

3.2.4 a) $\begin{bmatrix} 1+i & 0 & 5-i & 5-5i \\ 2 & 2-2i & -3-3i & -2i \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 18 \\ 6 & -9 & 9 \\ -12 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

3.2.8 a) $\begin{bmatrix} 15 \\ -10 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -11 \\ -3 & 5 \\ -13 & 23 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 3+10i & 11+5i \\ 16-13i & -1-15i \end{bmatrix}$.

3.2.9 $AB = [20]$, $BA = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

3.2.10 $x = 11p - q + r$, $y = -11p + 5q + 6r$, $z = 6p + 2q + 5r$, $t = -2p + 2q + 3r$.

3.2.11 a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a}{4} & \frac{2-b}{4} \\ \frac{3+a}{2} & \frac{b-2}{2} \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 2a \end{bmatrix}$, gdzie $a, c \in \boldsymbol{R}$;

e) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; **f)** nie ma takiej macierzy.

3.2.12 $AB = \begin{bmatrix} 52 & 47 & 57 \\ 70 & 62 & 75 \\ 99 & 93 & 107 \\ 67 & 61 & 74 \end{bmatrix}$; **a)** 93; **b)** 288; **c)** 2; **d)** 3.

3.2.13 b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

3.2.16 a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; **c)** $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; **d)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.2.18 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

3.2.19 a) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3.2.20 a) $A^n = 3^{n-1}A$; **b)** $A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}$.

3.2.21* a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **c)** $n = 4$; **d)** 11.

3.2.23 $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 1-2i & -3 & 2+i \end{bmatrix}$, $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3.2.26 a), b) symetryczne; **c)** antysymetryczna; **d)** nie jest symetryczna ani antysymetryczna.

3.3.2 a) 27; **b)** -14; **c)** 0; **d)** -120.

3.3.3 a) -29; **b)** $5 + 21i$; **c)** 15; **d)** $-2 + 2i$.

3.3.4 a) 11; **b)** $\frac{27}{2}$.

3.3.5 a) 14, **b)** $\frac{23}{6}$.

3.3.7 a) $3i$; **b)** 10; **c)** 59.

3.3.9 a) $11-16i$; b) 201; c) 130.

3.3.11 a) 6; b) $-30-30i$.

3.3.12 a) -30; b) -24; c*) $(-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)} n!$.

3.4.1* Permutacje 2-elementowe: $\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$;

3-elementowe $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,1\,3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,2\,1\end{pmatrix}$,

4-elementowe $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,2\,3\,4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,2\,4\,3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,2\,4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,3\,4\,2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,4\,2\,3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,4\,3\,2\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,1\,3\,4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,1\,4\,3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,3\,1\,4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,3\,4\,1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,4\,1\,3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\2\,4\,3\,1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,1\,2\,4\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,1\,4\,2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,2\,1\,4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,2\,4\,1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,4\,1\,2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\3\,4\,2\,1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,1\,2\,3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,1\,3\,2\end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,2\,1\,3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,2\,3\,1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,3\,1\,2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\\4\,3\,2\,1\end{pmatrix}$.

3.4.2* a) brak inwersji, $\operatorname{sgn} p = 1$; b) 9 inwersji, $\operatorname{sgn} p = -1$, $\{6,1\}$, $\{6,5\}$, $\{6,2\}$, $\{6,4\}$, $\{6,3\}$, $\{5,2\}$, $\{5,4\}$, $\{5,3\}$, $\{4,3\}$; c) 12 inwersji, $\operatorname{sgn} p = -1$, $\{3,2\}$, $\{5,4\}$, $\{5,2\}$, $\{7,6\}$, $\{7,4\}$, $\{7,2\}$, $\{8,6\}$, $\{8,4\}$, $\{8,2\}$, $\{6,4\}$, $\{6,2\}$, $\{4,2\}$.

3.4.3* a) -720; b) -30; c) 13.

3.4.4* $|a_{11}| = a_{11}$, $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

3.5.2 a) 6; b) $11\cdot 3^3$; c) $7\cdot 3^4$.

3.5.3 $\begin{vmatrix}5&6&1\\3&7&4\\2&1&5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-1&-7&1\\-3&2&4\\1&1&5\end{vmatrix}$.

3.5.4* 1 dla $n=1$ oraz 0 dla $n \geqslant 2$.

3.5.5 a) -81; b) 156; c) -65; d*) 446.

3.5.6* a) -45; b) -12.

3.5.8 a) 2^{14}; b) -36; c) $\frac{1}{64}$, -48.

3.5.11* a) 70; b) $10iz^3 - 20iz^2 + 10iz - 20i$; c) $2!3!\ldots(n-1)!$.

3.6.2 a), c) nie; b) tak.

3.6.3 a) $A^{-1} = \frac{1}{10}A$; b) $A^{-1} = \frac{1}{4}A$.

3.6.4* $-\frac{1}{4}A^2 - \frac{3}{4}A - \frac{1}{2}I$.

3.6.10 a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1-i}{4} \\ \frac{i-1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$;
e) $\frac{1}{4}A$.

3.6.11 a) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$; **d*)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;
e) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; **f*)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3.6.13 $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

3.6.14 a) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 24 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

3.6.16 a) $\begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{-5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, **c)** $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$;
d) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

3.7.1 a) w_3+w_4, $w_2-2w_3-5w_4$, $w_1-4w_2+3w_3$; **b)** w_3-2w_1, w_4+w_2, w_4-2w_3, w_3+w_4, $w_2+3w_3-4w_4$, $w_1-2w_2-3w_3-w_4$; **c)** $w_1:2$, w_2-2w_1, w_3+w_1, w_4-3w_1, $w_2:3$, w_4+2w_2, $w_3\longleftrightarrow w_4$, $w_3:2$, $w_4:5$, w_3-2w_4, $w_2+w_3-2w_4$, $w_1-3w_2+w_3-2w_4$.

3.7.2 a) -90; **b)** 0.

3.7.3 a) $\begin{bmatrix} 7 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 11 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

4.1 Podstawowe określenia

• **Definicja 4.1.1** *(układ równań liniowych, rozwiązanie układu równań)*
Układem m równań liniowych z n niewiadomymi x_1, x_2, ..., x_n, gdzie $m, n \in \boldsymbol{N}$, nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \boldsymbol{R}$, $b_i \in \boldsymbol{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$.
Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ. Układ równań, który nie ma rozwiązania, nazywamy układem sprzecznym.

Uwaga. Powyższy układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$AX = B,$$

gdzie

$$A \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy macierzą główną układu równań liniowych, macierz X macierzą (kolumną) niewiadomych, a B macierzą (kolumną) wyrazów wolnych. Rozważa się także układy równań liniowych, w których macierze A, X oraz B są zespolone. W przypadku „małej liczby" niewiadomych będziemy je zwykle oznaczać literami x, y, z, t, u, v, w.

○ **Ćwiczenie 4.1.2**
Podane układy równań zapisać w postaci macierzowej:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 2 \\ z = -5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3y - 2z = 0 \\ x + t = 3 \\ x + z - 3u = -5 \end{cases}$; c) $x+2y = 3y+z = 3-2z+t = u-5$.

● **Definicja 4.1.3** *(układ jednorodny i niejednorodny)*
Układ równań liniowych postaci

$$AX = \mathbf{0},$$

gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$, natomiast $\mathbf{0}$ jest macierzą zerową wymiaru $m \times 1$, nazywamy układem jednorodnym. Układ równań liniowych postaci

$$AX = B,$$

w którym B jest macierzą niezerową nazywamy układem niejednorodnym.

Uwaga. Jednym z rozwiązań układu jednorodnego $AX = \mathbf{0}$ jest macierz zerowa

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

wymiaru $n \times 1$, gdzie n oznacza liczbę kolumn macierzy A.

4.2 Układy Cramera

● **Definicja 4.2.1** *(układ Cramera*)*
Układem Cramera nazywamy układ równań liniowych

$$AX = B,$$

w którym A jest macierzą kwadratową nieosobliwą.

■ **Twierdzenie 4.2.2** *(wzór Cramera)*
Układ Cramera $AX = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest określone wzorem:

$$X = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \vdots \\ \det A_n \end{bmatrix},$$

gdzie n oznacza stopień macierzy A, natomiast A_j dla $1 \leqslant j \leqslant n$ oznacza macierz A, w której j–tą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych B (rys. 4.2.1).

---

*Gabriel Cramer (1704–1752), matematyk szwajcarski.

Uwaga. Równość określającą rozwiązanie układu równań liniowych nazywamy wzorem Cramera. Równość ta po rozpisaniu przyjmuje postać:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

zwaną wzorami Cramera.

kolumna wyrazów wolnych

$$A_j \overset{def}{=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

j-ta kolumna macierzy A

Rys. 4.2.1. Zasada tworzenia macierzy A_j we wzorach Cramera

○ Ćwiczenie 4.2.3

Korzystając ze wzorów Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

a) $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} y - 3z + 4v = 0 \\ x - 2z = 0 \\ 3x + 2y - 5v = 2 \\ 4x - 5z = 0 \end{cases}$.

■ Fakt 4.2.4 *(metoda macierzy odwrotnej)*

Rozwiązanie układu Cramera $AX = B$ jest określone wzorem:

$$X = A^{-1}B.$$

○ Ćwiczenie 4.2.5

Przy pomocy metody macierzy odwrotnej rozwiązać podane układy równań:

a) $\begin{cases} x - 7y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ x + 5y = 6 \\ 2x + 10y + 6z = 12 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + y + z + v = 10 \\ x - y - z + v = 0 \\ x + 2y - v = 1 \\ 2y + z + v = 13 \end{cases}$.

○ Ćwiczenie 4.2.6

Rozwiązać układ równań $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

○ Ćwiczenie 4.2.7

a) Korzystając z twierdzeń o układach równań liniowych pokazać, że istnieje dokładnie jedna płaszczyzna przechodząca przez trzy niewspółliniowe punkty w przestrzeni;

b*) Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. Udowodnić, że jeżeli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ spełniają nierówności $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, to dla dowolnych liczb rzeczywistych $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ istnieje dokładnie jeden wielomian W, stopnia nie większego niż n, spełniający warunki $W(x_i) = y_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant n + 1$.

○ Ćwiczenie 4.2.8

a) Znaleźć wielomian W możliwie najniższego stopnia, który dla $k = 0, 1, 2, 3$ spełnia warunek

$$W(k) = k!\,;$$

b) Znaleźć wielomian W, który spełnia warunek

$$W''(x) + 2W'(x) - 3W(x) = -3x^2 + 13x - 1;$$

c) Znaleźć współczynniki A, B, C, D wielomianu trygonometrycznego postaci

$$T(x) = A \sin x + B \cos x + C \sin 2x + D \cos 2x,$$

który spełnia warunek

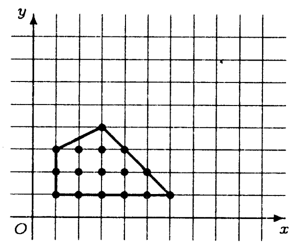
$$T'''(x) + T(x) = \sin x - \cos x + 8 \sin 2x + \cos 2x.$$

○ Ćwiczenie* 4.2.9

a) Przypuśćmy, że wzór wyrażający pole wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych (o współrzędnych całkowitych) ma postać

$$S = \alpha W + \beta B + \gamma,$$

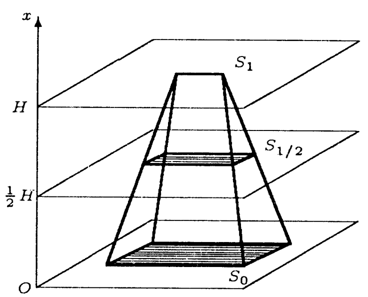
gdzie W oznacza liczbę punktów kratowych wewnątrz wielokąta, B liczbę takich punktów na jego brzegu, natomiast α, β i γ są nieznanymi współczynnikami. Znaleźć te współczynniki;



b) Pryzmatoidem nazywamy bryłę wypukłą, której wszystkie wierzchołki leżą w dwóch płaszczyznach równoległych. Przypuśćmy, że wzór na objętość pryzmatoidu ma postać

$$V = H\left(aS_0 + bS_{1/2} + cS_1\right).$$

We wzorze tym H oznacza odległość płaszczyzn równoległych, a S_x pole przekroju bryły płaszczyzną równoległą do tych płaszczyzn położoną na wysokości xH. Znaleźć współczynniki a, b, c.



c) Dla ustalonej liczby naturalnej k wyprowadzić wzór na sumę

$$S_n = 1^k + 2^k + \ldots + n^k, \quad \text{gdzie } n \in \mathbb{N},$$

zakładając, że ma on postać

$$S_n = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0,$$

gdzie $a_{k+1}, a_k, \ldots, a_1, a_0$ są odpowiednio dobranymi liczbami rzeczywistymi.

Obliczenia przeprowadzić dla:

i) $k = 2$; ii) $k = 3$; iii) $k = 4$.

Uwaga. Wyznaczanie współczynników α, β, γ w ćwiczeniu a), współczynników a, b, c w ćwiczeniu b) oraz współczynników $a_0, a_1, \ldots, a_{k+1}$ w ćwiczeniu c) nie oznacza jeszcze, że udowodniono te wzory (dlaczego?).

4.3 Metoda eliminacji Gaussa dla układów Cramera

■ Metoda eliminacji Gaussa dla układów Cramera

Niech $AX = B$ będzie układem Cramera, w którym A jest macierzą stopnia n. Rozwiązanie tego układu znajdujemy w następujący sposób:

1. budujemy macierz rozszerzoną układu postaci

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_1 \end{array}\right].$$

2. przekształcamy macierz rozszerzoną do postaci $[I|X]$ wykonując na jej **wierszach** następujące operacje elementarne:
   a) zamianę między sobą dwóch dowolnych wierszy ($w_i \longleftrightarrow w_j$);
   b) pomnożenie dowolnego wiersza przez liczbę różną od zera (cw_i);
   c) dodanie do elementów dowolnego wiersza odpowiadających im elementów innego wiersza pomnożonego przez dowolną liczbę ($w_i + cw_j$).

   Operacje te mają na celu doprowadzenie macierzy rozszerzonej do postaci:

$$[I|X] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x_n \end{array}\right].$$

   Ostatnia kolumna macierzy rozszerzonej (macierz X) jest wtedy rozwiązaniem wyjściowego układu równań.

Uwaga. Przy przekształcaniu macierzy rozszerzonej układu do postaci końcowej możemy wykorzystać algorytm Gaussa sprowadzania macierzy nieosobliwej do postaci jednostkowej.

$$[A|B] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|X]$$

Rys. 4.3.1. Schemat metody eliminacji Gaussa rozwiązywania układów równań liniowych.

○ **Ćwiczenie 4.3.1**

Korzystając z metody eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy Cramera:

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 6 \\ 5x & + & 4y & = & 3 \end{array}\right. ;\quad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 5 \\ & & 2y & + & 3z & = & 6 \\ -x & + & y & - & 5z & = & -3 \end{array}\right. ;\quad \text{c)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & 1 \\ 3x & - & 4y & + & 8z & = & 3 \end{array}\right. ;$$

$$\text{d)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & & & = & 5 \\ & & y & + & z & + & t & = & 5 \\ & & & & z & + & t & = & 3 \\ x & & & & & + & t & = & 6 \end{array}\right. ;\quad \text{e)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 4y & + & 2z & - & t & & & = & 3 \\ 2x & + & 9y & + & 6z & - & 2t & - & 3u & = & 5 \\ x & + & 2y & - & z & - & t & + & 5u & = & 5 \\ -2x & - & 7y & + & z & + & 3t & - & 4u & = & -5 \\ -x & - & 5y & - & z & + & 3t & + & 6u & = & 4 \end{array}\right. .$$

Metoda kolumn jednostkowych dla układów Cramera

Praktyczną wersją **metody eliminacji Gaussa** dla układów Cramera jest **metoda kolumn jednostkowych**. Polega ona na przekształcaniu macierzy rozszerzonej układu w celu doprowadzenia wszystkich kolumn macierzy tego układu do postaci jednostkowej (tzn. z jedną jedynką i resztą zer). Jedynki z różnych kolumn muszą się przy tym znaleźć w różnych wierszach. Końcowa postać $[I'|X']$ macierzy rozszerzonej będzie się różnić od postaci $[I|X]$ jedynie kolejnością wierszy. Dla układu Cramera z n niewiadomymi metoda ta wymaga n kroków, gdyż w każdym kroku przekształca się **ostatecznie** całą kolumnę. Kolejność przekształcanych kolumn oraz położenie końcowych „jedynek" jest dowolna, przy czym wygodnie jest do przekształcenia wybierać kolumnę składającą się z jedynki, „małych" liczb całkowitych i „dużej" liczby zer. W porównaniu z klasycznym algorytmem Gaussa metoda ta nie wymaga przestawiania wierszy ani budowania macierzy trójkątnej. Wymaga jednak wykonania większej liczby mnożeń.

Algorytm przekształcania j–tej kolumny

Chcąc w miejsce niezerowego elementu a_{ij} otrzymać „jedynkę", a na pozostałych miejscach j-tej kolumny zera, wystarczy i-ty wiersz macierzy rozszerzonej podzielić przez a_{ij}. Następnie należy od pozostałych kolejnych wierszy odejmować i-ty wiersz mnożony odpowiednio przez $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{i-1j}, a_{i+1j}, \ldots, a_{nj}$. Schematycznie przedstawimy to poniżej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & a_{1j} & \cdots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & a_{i-1j} & \cdots & \cdot \\ \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdot \\ \cdots & a_{i+1j} & \cdots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow{w_i \,:\, a_{ij}} \left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & a_{1j} & \cdots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & a_{i-1j} & \cdots & \cdot \\ \cdots & \mathbf{1} & \cdots & \cdot \\ \cdots & a_{i+1j} & \cdots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & a_{nj} & \cdots & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_{i+1} - a_{i+1j}w_i \\ \vdots \\ w_n - a_{nj}w_i}]{\substack{w_1 - a_{1j}w_i \\ \vdots \\ w_{i-1} - a_{i-1j}w_i}} \left[\begin{array}{ccc|c} \cdots & 0 & \cdots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdot \\ \cdots & \mathbf{1} & \cdots & \cdot \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdot \end{array}\right] .$$

Rys. 4.3.2. Schemat przekształcania kolumny macierzy do postaci jednostkowej.

○ **Ćwiczenie 4.3.2**

Rozwiązać podane układy Cramera metodą kolumn jednostkowych:

a) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 5x + 3y - 2z = -3 \\ 7x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x - y + t = -2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + 6z - t = 1 \\ x + 2y + 12z + 2t = 15 \end{cases}$.

***Algorytm rozwiązywania równania macierzowego** $AX = B$ [3]

Niech A i B będą macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, przy czym $\det A \neq 0$. Wtedy niewiadomą macierz X spełniającą równanie macierzowe $AX = B$ można otrzymać postępując według algorytmu:

1. tworzymy macierz blokową $[A|B]$,

2. stosując operacje elementarne na wierszach macierzy $[A|B]$ doprowadzamy ją do postaci $[I|X]$, w której macierz X jest szukanym rozwiązaniem.

$$[A|B] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} [I|X]$$

Rys. 4.3.3. Schemat algorytmu rozwiązywania równania macierzowego $AX = B$.

Uwaga*. Powyższy algorytm można zastosować także do równań macierzowych postaci $XA = B$. Najpierw jednak należy wykonać operację transponowania obu jego stron. Równanie przyjmie wtedy postać $A^T X^T = B^T$.

○ **Ćwiczenie* 4.3.3**

Stosując powyższy algorytm rozwiązać podane równania macierzowe:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 26 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 10 & 11 & 3 \\ 29 & 26 & 3 \end{bmatrix}$; b) $X \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 20 & 10 \\ 11 & 11 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

4.4 Metoda eliminacji Gaussa dla dowolnych układów równań liniowych

● **Definicja 4.4.1** *(równoważność układów równań liniowych)*

Niech A, A', B, B' będą macierzami o wymiarach odpowiednio $m \times n$, $k \times n$, $m \times 1$, $k \times 1$. Ponadto niech

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

będą macierzami niewiadomych, przy czym ciąg $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ jest permutacją ciągu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Mówimy, że układy równań liniowych

$$AX = B \quad \text{i} \quad A'X' = B'$$

są równoważne, jeżeli zbiory ich rozwiązań są identyczne.

● **Fakt 4.4.2** *(o równoważnym przekształcaniu układów równań)*
Podane poniżej operacje na **wierszach** macierzy rozszerzonej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go na układ równoważny:

1. zamiana między sobą wierszy (operację zamiany wiersza i–tego z k–tym oznaczamy przez $w_i \longleftrightarrow w_k$);
2. mnożenie wiersza przez stałą różną od zera (operację mnożenia i–tego wiersza przez liczbę $c \neq 0$ oznaczamy przez $c \cdot w_i$);
3. dodanie do wszystkich wyrazów ustalonego wiersza odpowiadających im wyrazów innego wiersza pomnożonych przez stałą (operację dodania k–tego wiersza pomnożonego przez stałą c do i–tego wiersza oznaczamy przez $w_i + c \cdot w_k$);
4. skreślenie wiersza złożonego z samych zer (operację skreślenia i–tego wiersza oznaczamy przez $\cancel{w_i}$);
5. skreślenie jednego z wierszy równych lub proporcjonalnych (operację skreślenia wiersza i–tego, który jest proporcjonalny do wiersza k–tego, oznaczamy przez $\cancel{w_i} \sim w_k$).

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & x_j & & x_l & & x_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}}^{\text{niewiadome}} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{ml} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \xrightarrow{k_j \longleftrightarrow k_l} \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & x_l & & x_j & & x_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}}^{\text{niewiadome}} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ml} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} = A'$$

Dodatkowo otrzymuje się układ równoważny, jeżeli w macierzy A zamienimy miejscami dwie kolumny **przy jednoczesnej zamianie niewiadomych** (operację zamiany j–tej kolumny z l–tą oznaczamy przez $k_j \longleftrightarrow k_l$).

Metoda eliminacji Gaussa dla dowolnych układów równań liniowych

Niech $AX = B$ będzie układem równań liniowych, gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$. Wówczas układ ten rozwiązujemy następująco:

1. budujemy macierz rozszerzoną układu postaci:

$$[A|B] = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array}}^{\text{niewiadome}} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \end{array};$$

2. na macierzy rozszerzonej dokonujemy równoważnych przekształceń układu sprowadzając ją do postaci:

$$
\begin{array}{c}
\overbrace{x_1' \; x_2' \quad\; x_r'}^{\text{niewiadome}} \; \overbrace{x_{r+1}' \quad\; x_n'}^{\text{parametry}} \\
\downarrow \; \downarrow \quad\; \downarrow \;\; \downarrow \quad\;\; \downarrow
\end{array}
$$

$$
[A'|B'] = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & s_{1\,r+1} & \cdots & s_{1n} & & z_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & s_{2\,r+1} & \cdots & s_{2n} & & z_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & s_{r\,r+1} & \cdots & s_{rn} & & z_r \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & z_{r+1}
\end{array}\right],
$$

przy czym ostatni wiersz może nie pojawić się wcale albo wystąpi ze współczynnikiem $z_{r+1} \neq 0$. Wówczas,

a) jeżeli $z_{r+1} \neq 0$, to układ $AX = B$ jest *sprzeczny*;

b) jeżeli ostatni wiersz macierzy $[A'\,|B']$ nie pojawi się i $n = r$, to układ $AX = B$ jest równoważny układowi Cramera (*układ oznaczony*) i jego jedyne rozwiązanie ma postać $x_1 = z_1, x_2 = z_2, \ldots, x_n = z_n$;

c) jeżeli ostatni wiersz macierzy $[A'\,|B']$ nie pojawi się i $n > r$, to układ $AX = B$ ma nieskończenie wiele rozwiązań (*układ nieoznaczony*), przy czym r spośród niewiadomych oznaczanych symbolami $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ zależy od pozostałych $n - r$ niewiadomych oznaczonych symbolami $x_{r+1}', x_{r+2}', \ldots, x_n'$ w następujący sposób:

$$
\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1\,r+1} & s_{1\,r+2} & \cdots & s_{1n} \\ s_{2\,r+1} & s_{2\,r+2} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{r\,r+1} & s_{r\,r+2} & \cdots & s_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r+1}' \\ x_{r+2}' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}.
$$

W szczególnym przypadku $r = 0$ wszystkie niewiadome są parametrami i mogą przyjmować dowolne wartości.

Uwaga. Liczba r jest wyznaczona jednoznacznie. Jest to tzw. rząd macierzy A. Niewiadome $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ nazywamy niewiadomymi zależnymi, a niewiadome $x_{r+1}', x_{r+2}', \ldots, x_n'$ parametrami. Podział niewiadomych na zależne i parametry nie jest jednoznaczny, ale nie jest też dowolny. Przy przekształcaniu macierzy rozszerzonej układu do postaci końcowej możemy wykorzystać algorytm sprowadzania macierzy nieosobliwej do postaci jednostkowej. W przeciwieństwie do układu Cramera mogą pojawić się tu trzy nowe sytuacje:

1. wiersz złożony z samych zer – wtedy go skreślamy;
2. dwa wiersze równe lub proporcjonalne – wtedy skreślamy jeden z nich;

3. brak elementu niezerowego w kolejnej kolumnie powodujący niemożność ustawienia kolejnej jedynki na przekątnej – wtedy całą kolumnę **wraz z jej niewiadomą** przestawiamy na miejsce przedostatnie przed kolumnę wyrazów wolnych (niewiadoma ta staje się parametrem).

○ Ćwiczenie 4.4.3

Rozwiązać podane układy równań metodą eliminacji Gaussa:

a) $\begin{cases} x + 6y - z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 6 \\ 3x + 17y = 2 \\ 2x + 13y + 5z = 8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x - y - 2z + 2t = -2 \\ 5x - 3y - z + t = 3 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = -4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t - u = 6 \\ 3x + 6y + 5z - 2t - 9u = 1 \\ 2x + 4y + 2z - 8u = -5 \\ 2x + 4y + 7z - 5t + u = 17 \\ x + 2y + 6z - 5t - 10u = 12 \end{cases}$.

Metoda kolumn jednostkowych dla dowolnych układów równań liniowych

Praktyczną wersją **metody eliminacji Gaussa** dla dowolnych układów równań liniowych jest **metoda kolumn jednostkowych**. Jest ona rozszerzeniem metody opisanej dla układów Cramera na przypadek ogólny. Polega ona na równoważnym przekształcaniu macierzy rozszerzonej układu, w celu doprowadzenia możliwie największej liczby kolumn do postaci jednostkowej. Jedynki z różnych kolumn jednostkowych powinny się przy tym znaleźć w różnych wierszach. Przekształcenie poszczególnych kolumn wykonujemy dokładnie tak samo, jak dla układów Cramera. Przy wyborze tych kolumn oraz miejsc na jedynki mamy pełną dowolność. Jednoznacznie określona jest tylko liczba tych kolumn, ale pojawia się ona w naturalny sposób na końcu postępowania. Najwygodniej jest brać do przekształceń kolumny zawierające „małe" liczby całkowite i „dużo" zer. W przypadku dowolnych układów równań w trakcie postępowania mogą pojawić się wiersze zerowe - wtedy je skreślamy, wiersze równe lub proporcjonalne - wtedy skreślamy jeden z nich. Może się także zdarzyć, że w macierzy rozszerzonej układu pojawi się wiersz zerowy z elementem niezerowym w kolumnie wyrazów wolnych. Taki układ równań jest oczywiście sprzeczny. Jeśli tak się nie zdarzy, to postępowanie kończy się wtedy, gdy liczba wyróżnionych kolumn jest równa liczbie wierszy, które pozostały w macierzy. Rozwiązanie układu odczytujemy teraz z końcowej postaci macierzy, wyróżnione „jedynki" wskazują niewiadome zależne.

○ Ćwiczenie 4.4.4

Odczytać rozwiązania podanych układów równań liniowych z niewiadomymi x, y, z, s, t zapisanych w postaci macierzy rozszerzonych:

a) $\left[\begin{array}{ccccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$; b) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & -5 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

○ Ćwiczenie 4.4.5

Rozwiązać podane układy metodą kolumn jednostkowych:

a) $\begin{cases} 5x - 3y - z + t = 1 \\ x - y - 2z + 2t = -2 \\ 2x + y - z + t = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6x + 3y + z + 2t = 5 \\ 5x + 7y + 2z + 7t = 9 \\ 7x - y - 3t = 1 \\ 4x + 11y + 3z + 12t = 13 \end{cases}$.

○ **Ćwiczenie 4.4.6**

Podać przykład układu:

a) pięciu równań liniowych z trzema niewiadomymi, który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru;

b) czterech równań liniowych z pięcioma niewiadomymi, który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów;

c) dwóch równań liniowych z czterema niewiadomymi, który jest sprzeczny;

d) trzech równań liniowych z niewiadomymi x, y, z, który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru, przy czym jednym z jego rozwiązań jest

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 3;$$

e*) trzech równań liniowych z niewiadomymi x, y, z, t, który ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od dwóch parametrów, przy czym dwoma z jego rozwiązań są:

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad t = 1,$$
$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = 4, \quad t = 2.$$

4.5 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Twierdzenia 4.2.2** *(wzór Cramera)*

I sposób. Niech $A = [a_{ij}]$, gdzie $i, j = 1, 2, \ldots, n$. W postaci rozwiniętej układ równań ma postać

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Niech j, gdzie $1 \leqslant j \leqslant n$, będzie dowolną liczbą naturalną. Po pomnożeniu kolejnych wierszy tego układu przez dopełnienia algebraiczne D_{1j}, D_{2j}, ..., D_{nj} odpowiednio elementów a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj} macierzy A uzyskamy układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}D_{1j}x_1 + a_{12}D_{1j}x_2 + \ldots + a_{1n}D_{1j}x_n = b_1D_{1j} \\ a_{21}D_{2j}x_1 + a_{22}D_{2j}x_2 + \ldots + a_{2n}D_{2j}x_n = b_2D_{2j} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}D_{nj}x_1 + a_{n2}D_{nj}x_2 + \ldots + a_{nn}D_{nj}x_n = b_nD_{nj} \end{cases}.$$

Dodając stronami wszystkie równania i porządkując je otrzymamy równość

$$x_1\left(a_{11}D_{1j} + a_{21}D_{2j} + \ldots + a_{n1}D_{n1}\right) + x_2\left(a_{12}D_{1j} + a_{22}D_{2j} + \ldots + a_{n2}D_{n2}\right) + \ldots$$
$$+ x_n\left(a_{1n}D_{1j} + a_{2n}D_{2j} + \ldots + a_{nn}D_{nj}\right)$$
$$= b_1D_{1j} + b_2D_{2j} + \ldots + b_nD_{nj}.$$

Współczynniki przy niewiadomych x_1, x_2, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ...,x_n są zerami, gdyż są rozwinięciami Laplace'a wyznaczników o dwóch identycznych kolumnach. Współczynnik $a_{1j}D_{1j}+a_{2j}D_{2j}+\ldots+a_{nj}D_{nj}$ przy niewiadomej x_j jest rozwinięciem Laplace'a wyznacznika macierzy A, zaś wyrażenie po prawej stronie ostatniej równości jest rozwinięciem Laplace'a wyznacznika macierzy A_j opisanej w tezie twierdzenia. Stąd

$$x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + \ldots + x_j \cdot \det A + \ldots + x_n \cdot 0 = \det A_j.$$

Zatem $x_j \cdot \det A = \det A_j$. Ponieważ $\det A \neq 0$, więc $x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}$.

II sposób. Stosując zapis macierzowy otrzymujemy związek $X = A^{-1}B$. Z definicji mnożenia macierzy oraz ze wzoru na macierz odwrotną wynika, że

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \left[A^{-1}\right]_{ji} b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{D_{ij}}{\det A} b_i = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} D_{ij} b_i = \frac{\det A_j}{\det A},$$

gdzie $1 \leqslant j \leqslant n$.

III sposób. Opracowany na podstawie noty Kong-Ming Chong'a z University of Malaya umieszczonej w *American Mathematical Monthly.*
Niech $AX = B$ będzie układem Cramera, gdzie A jest macierzą nieosobliwą stopnia n. Ponadto niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$ oraz $e_1, e_2, \ldots, e_n$ oznaczają kolumny odpowiednio macierzy A oraz I. Wtedy

$$\begin{aligned}
\frac{\det\left[k_1\, k_2 \ldots k_{i-1}\, B\, k_{i+1} \ldots k_n\right]}{\det A} &= \det\left(A^{-1}\left[k_1\, k_2\, \ldots\, k_{i-1}\, B\, k_{i+1}\, \ldots\, k_n\right]\right)\\
&= \det\left[A^{-1}k_1\, A^{-1}k_2 \ldots A^{-1}k_{i-1}\, A^{-1}B\, A^{-1}k_{i+1} \ldots A^{-1}k_n\right]\\
&= \det\left[e_1\, e_2\, \ldots\, e_{i-1}\, X\, e_{i+1}\, \ldots\, e_n\right] = x_i,
\end{aligned}$$

gdzie x_i oznacza element i-tego wiersza macierzy X.

■ Dowód Faktu 4.2.4 *(metoda macierzy odwrotnej)*

Mnożymy lewostronnie obie strony równości $AX = B$ przez macierz A^{-1}. Korzystając teraz z łączności mnożenia macierzy otrzymamy

$$A^{-1}(AX) = \left(A^{-1}A\right) X = IX = X = A^{-1}B.$$

■ Dowód metody eliminacji Gaussa dla układów Cramera

Algorytm Gaussa jest efektywną metodą przekształcania macierzy A do macierzy jednostkowej I. W każdym kroku operacje elementarne na wierszach macierzy rozszerzonej układu przekształcają układ na układ równoważny. Końcowa postać macierzy rozszerzonej jest jawnym wskazaniem rozwiązania. Ujmując rzecz inaczej zauważmy, że każdą z wykonywanych tu operacji można utożsamić z lewostronnym mnożeniem obu bloków macierzy rozszerzonej przez pewną macierz nieosobliwą (patrz dowód **Faktu 3.6.12**). Oznaczmy przez E_1, E_2, ..., E_N macierze odpowiadające kolejnym operacjom, zaś przez E iloczyn $E_N \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1$ tych macierzy. Z równości $EA = I$ wynika $E = A^{-1}$, zatem kolejne etapy rozwiązywania naszego układu równań możemy zapisać ogólnie w postaci

$$\begin{aligned}
&[A|B] \longrightarrow [E_1A|E_1B] \longrightarrow [E_2E_1A|E_2E_1B] \longrightarrow \ldots\\
&\qquad \longrightarrow [E_NE_{N-1}\ldots E_1A|E_NE_{N-1}\ldots E_1B] = \left[A^{-1}A|A^{-1}B\right] = [I|X].
\end{aligned}$$

4.6 Odpowiedzi i wskazówki

4.1.2 a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

4.2.3 a) $x = -3,\ y = 1$; **b)** $x = -1,\ y = -\frac{1}{3},\ z = -\frac{5}{3}$; **c)** $x = 0,\ y = \frac{8}{13},\ z = 0,\ v = -\frac{2}{13}$.

4.2.5 a) $x = \frac{41}{17},\ y = \frac{1}{17}$; **b)** $x = -14,\ y = 4,\ z = 0$; **c)** $x = 0,\ y = 3,\ z = 2,\ v = 5$.

4.2.6 $[x\, y\, z] = [4\ -1\ -1]$.

4.2.7 b*) Wskazówka. Wykorzystać wyznacznika Vandermondea;

4.2.8 a) $W(x) = 1 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$; **b)** $W(x) = x^2 - 3x - 1$; **c)** $A = 1, B = 0, C = 0, D = 1$.

4.2.9* a) $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = -1$; **b)** $a = \frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{6}$;
c) i) $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, ii) $\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$, iii) $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$.

4.3.1 a) $x = \frac{15}{11},\ y = -\frac{21}{22}$; **b)** $x = \frac{17}{5},\ y = \frac{12}{5},\ z = \frac{2}{5}$; **c)** $x = 5,\ y = -1,\ z = -2$;
d) $x = 3,\ y = 2,\ z = 0,\ t = 3$; **e)** $x = 1,\ y = 0,\ z = 1,\ t = 0,\ u = 1$.

4.3.2 a) $x = 1,\ y = -2,\ z = 1$; **b)** $x = -1,\ y = 0,\ z = 1,\ t = 2$.

4.3.3* a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

4.4.3 a) $x = -5,\ y = z = 1$; **b)** $x = 11 - 5t - 2y,\ z = -4 + 2t$, gdzie $y, t \in \boldsymbol{R}$; **c)** układ jest sprzeczny; **d)** $x = -4 - 2y - t,\ z = \frac{7}{2} + t,\ u = \frac{1}{2}$, gdzie $y, t \in \boldsymbol{R}$.

4.4.4 a) $y = -2 - x + z,\ s = 5 + 2x - z,\ t = -2 - 3x - 2z$, gdzie $x, z \in \boldsymbol{R}$;
b) $x = 2 + 7y,\ z = 1 - 8y,\ s = 3 - 6y,\ t = 3 + 5y$, gdzie $y \in \boldsymbol{R}$.

4.4.5 a) $x = 1,\ y = 1,\ z = 1 + t$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$;
b) $y = 7x - 3t - 1,\ z = 8 - 27x + 7t$, gdzie $x, t \in \boldsymbol{R}$.

4.4.6 a) $\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ -y - z = 0 \\ 3x = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z + 2t - u = -1 \\ -2z - 4t - 2u = 2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 3x + 3y + 3z + 3t = 2 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x = 1 \\ y + z = 3 \\ -y - z = -3 \end{cases}$; **e*)** $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - t = 0 \\ 2x - z - t = 0 \end{cases}$.

5

GEOMETRIA ANALITYCZNA W PRZESTRZENI

5.1 Wektory

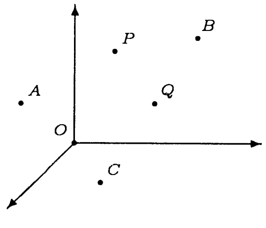
● **Definicja 5.1.1** *(przestrzeń $\boldsymbol{R}^3$)*

Przestrzenią $\boldsymbol{R}^3$ nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych trójek (x, y, z) liczb rzeczywistych;

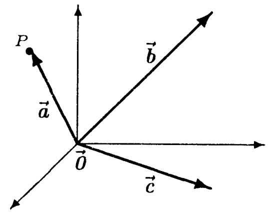
$$\boldsymbol{R}^3 \stackrel{def}{=} \{(x, y, z) : x, y, z \in \boldsymbol{R}\}.$$

Uwaga. Przestrzeń $\boldsymbol{R}^3$ będziemy interpretować geometrycznie na trzy sposoby, tzn. jako:

1. zbiór wszystkich punktów $P = (x, y, z)$ w przestrzeni (rys. 5.1.1). W tej interpretacji elementy przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ nazywamy punktami i oznaczamy przez A, B, C, P, Q itd. Liczby x, y, z nazywamy wtedy współrzędnymi punktu $P = (x, y, z)$.



Rys. 5.1.1. Punkty w przestrzeni

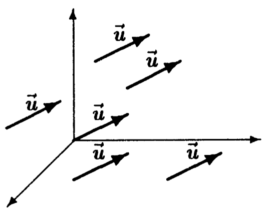


Rys. 5.1.2. Wektory zaczepione

2. zbiór wszystkich wektorów zaczepionych $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ w przestrzeni. Wektory te mają wspólny początek $O = (0, 0, 0)$, a końce w punktach $P = (x, y, z)$ (rys. 5.1.2). Wektor $\overrightarrow{OP}$ nazywamy wektorem wodzącym punktu P. W tej interpretacji elementy przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ nazywamy wektorami i oznaczamy przez $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ itd. Wektory wodzące punktów będziemy oznaczali przez $\vec{r}$, $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$ itd. Liczby x, y, z nazywamy współrzędnymi wektora $\vec{a} = (x, y, z)$. Dodatkowo przyjmujemy oznaczenia $\vec{0} \stackrel{def}{=} (0,0,0)$ oraz $-\vec{u} \stackrel{def}{=} (-x, -y, -z)$. Wektor $\vec{0}$ nazywamy wektorem zerowym, a wektor $-\vec{u}$ wektorem przeciwnym (rys. 5.1.11) do wektora $\vec{u}$.

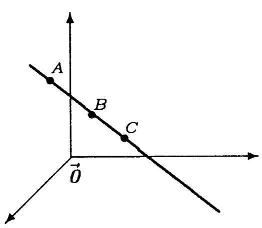
3. zbiór wszystkich wektorów swobodnych w przestrzeni. Przez wektor swobodny $\vec{u}$ (rys. 5.1.3) rozumiemy tutaj zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w różnych punktach, które mają ten sam kierunek, zwrot oraz długość co wektor $\vec{u}$. Wektor $\vec{u}$ nazywamy reprezentantem wektora swobodnego $\vec{u}$. W tej interpretacji elementy przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ także nazywamy wektorami.



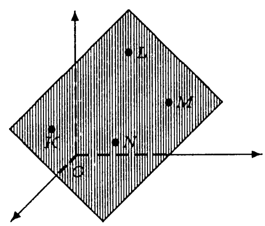
Rys. 5.1.3. Wektory swobodne.

- **Definicja 5.1.2** *(punkty współliniowe i współpłaszczyznowe)*

1. Mówimy, że punkty A, B, C przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ są współliniowe, gdy istnieje prosta, do której należą te punkty (rys. 5.1.4).



Rys. 5.1.4. Punkty współliniowe

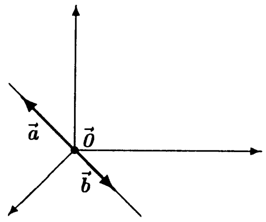


Rys. 5.1.5. Punkty współpłaszczyznowe

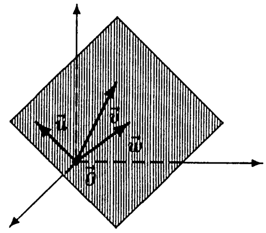
2. Mówimy, że punkty K, L, M, N przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, do której należą te punkty (rys. 5.1.5).

- **Definicja 5.1.3** *(wektory współliniowe i współpłaszczyznowe)*

1. Mówimy, że wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ są współliniowe, gdy istnieje prosta, w której zawarte są te wektory (rys. 5.1.6). Wektory współliniowe będziemy nazywać także wektorami równoległymi; piszemy wtedy $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Oczywiście wektor $\vec{0}$ jest równoległy do dowolnego wektora.
2. Mówimy, że wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, w której zawarte są te wektory (rys. 5.1.7). Oczywiście wektor $\vec{0}$ i dwa dowolne wektory są współpłaszczyznowe.



Rys. 5.1.6. Wektory współliniowe

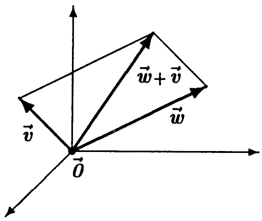


Rys. 5.1.7. Wektory współpłaszczyznowe

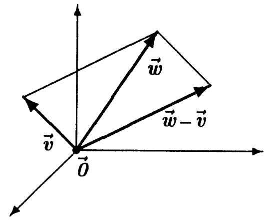
- **Definicja 5.1.4** *(działania na wektorach)*

Niech $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{w} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ oraz niech $\alpha \in \boldsymbol{R}$.
Sumę wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$ (rys. 5.1.8) określamy wzorem:

$$\vec{w} + \vec{v} \overset{def}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) .$$



Rys. 5.1.8. Suma wektorów.



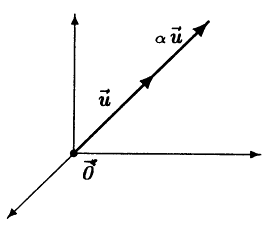
Rys. 5.1.9. Różnica wektorów.

Różnicę wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$ (rys. 5.1.9) określamy wzorem:

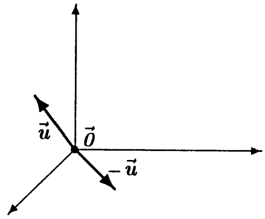
$$\vec{w} - \vec{v} \overset{def}{=} (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) .$$

Iloczyn wektora $\vec{u}$ przez liczbę rzeczywistą α (rys. 5.1.10) określamy wzorem:

$$\alpha \vec{u} \overset{def}{=} (\alpha x, \alpha y, \alpha z) .$$



Rys. 5.1.10. Iloczyn wektora przez liczbę.



Rys. 5.1.11. Wektor przeciwny.

- **Fakt 5.1.5** *(warunki równoległości i współpłaszczyznowości wektorów)*

1. Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ takie, że $|\alpha| + |\beta| > 0$ i $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. W szczególności, jeżeli $\vec{a} \neq \vec{0}$, to wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $t \in \boldsymbol{R}$ taka, że $\vec{b} = t\vec{a}$.

2. Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby α, β, γ takie, że $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0$ oraz $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. W szczególności, jeżeli $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, to wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $s, t \in \boldsymbol{R}$ takie, że $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$.

● **Fakt 5.1.6** *(własności działań na wektorach)*

Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ będą dowolnymi wektorami w $\boldsymbol{R}^3$ oraz niech $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$. Wtedy:

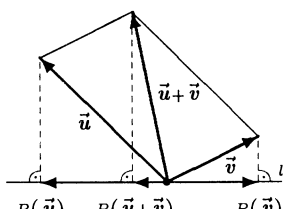
1. dodawanie wektorów jest działaniem przemiennym, tj. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
2. dodawanie wektorów jest działaniem łącznym, tj. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}$;
3. wektor $\vec{0}$ jest elementem neutralnym dodawania, tj. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
4. wektor $-\vec{u}$ jest elementem przeciwnym do wektora $\vec{u}$, tj. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;
5. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$;
6. $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$;
7. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;
8. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.

● **Fakt 5.1.7** *(o własnościach rzutów wektorów)*

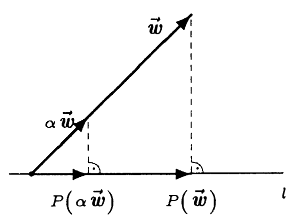
Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ będą dowolnymi wektorami w $\boldsymbol{R}^3$ oraz niech $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Ponadto niech l będzie dowolną prostą w przestrzeni. Wtedy

1. rzut prostokątny P sumy wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ na prostą l (rys. 5.1.12) jest równy sumie rzutów tych wektorów na tę prostą, tzn.

$$P(\vec{u} + \vec{v}) = P(\vec{u}) + P(\vec{v});$$



Rys. 5.1.12. Rzut prostokątny sumy wektorów



Rys. 5.1.13. Rzut prostokątny iloczynu wektora przez liczbę.

2. rzut prostokątny P iloczynu wektora $\vec{w}$ przez liczbę α na prostą l (rys. 5.1.13) jest równy iloczynowi rzutu tego wektora na tę prostą przez liczbę α, tzn.

$$P(\alpha\vec{w}) = \alpha P(\vec{w}).$$

Uwaga. Podobny fakt ma miejsce przy rzutowaniu na ustaloną płaszczyznę w $\boldsymbol{R}^3$.

○ **Ćwiczenie 5.1.8**

a) Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ są przekątnymi równoległoboku. Wyrazić boki tego równoległoboku za pomocą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$;

b) Korzystając z rachunku wektorowego uzasadnić, że ze środkowych trójkąta można zbudować trójkąt;

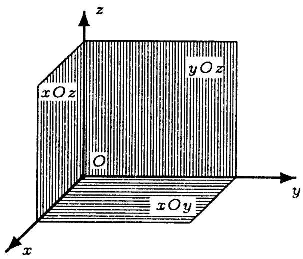
c*) Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$ tworzą krawędzie pewnego czworościanu. Uzasadnić, że niezależnie od zwrotów tych wektorów mamy

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}\neq\vec{0};$$

d) Korzystając z rachunku wektorowego uzasadnić, że środki dowolnej łamanej zamkniętej w przestrzeni złożonej z czterech odcinków są wierzchołkami równoległoboku.

- **Definicja 5.1.9** *(układ współrzędnych w przestrzeni)*

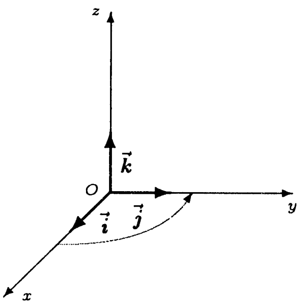
Układem współrzędnych w przestrzeni nazywamy trzy ustalone proste x, y, z przecinające się w jednym punkcie 0, które są wzajemnie prostopadłe. Taki układ współrzędnych oznaczamy przez $Oxyz$. Proste Ox, Oy, Oz nazywamy osiami, a płaszczyzny xOy, yOz, xOz płaszczyznami układu współrzędnych (rys. 5.1.14).



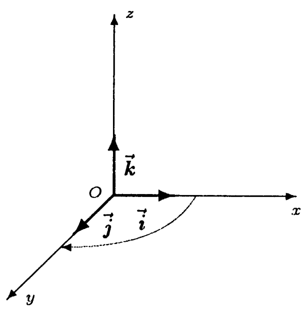
Rys. 5.1.14. Układ współrzędnych w przestrzeni.

- **Definicja 5.1.10** *(orientacja układu współrzędnych w przestrzeni)*

W zależności od wzajemnego położenia osi Ox, Oy, Oz układu współrzędnych wyróżniamy dwie jego orientacje: układ prawoskrętny (rys. 5.1.15) i układ lewoskrętny (rys. 5.1.16).



Rys. 5.1.15. Układ prawoskrętny.



Rys. 5.1.16. Układ lewoskrętny.

Uwaga. Nazwa układ prawoskrętny pochodzi od następującej interpretacji: jeżeli prawą rękę umieścimy tak, aby kciuk wskazywał dodatnią część osi Oz, to zgięte palce wskażą kierunek obrotu od osi Ox do osi Oy. Podobną interpretację ma układ lewoskrętny.

● **Definicja 5.1.11** *(wersory na osiach układu współrzędnych)*

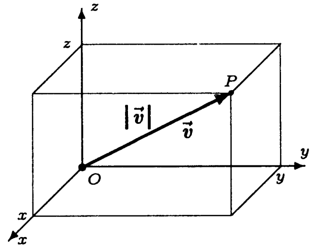
Wektory $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ nazywamy wersorami odpowiednio na osiach Ox, Oy, Oz (rys. 5.1.15 i 5.1.16).

● **Definicja 5.1.12** *(długość wektora)*

Długość wektora $\vec{v} = (x, y, z)$ jest określona wzorem:

$$|\vec{v}| \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Uwaga. Długość wektora $\vec{v} = (x, y, z)$ jest równa odległości punktu $P = (x, y, z)$ od początku układu współrzędnych (rys. 5.1.17). Każdy wektor o długości 1 nazywamy *wersorem*.



Rys. 5.1.17. Interpretacja geometryczna długości wektora.

○ **Ćwiczenie 5.1.13**

Obliczyć długości podanych wektorów:

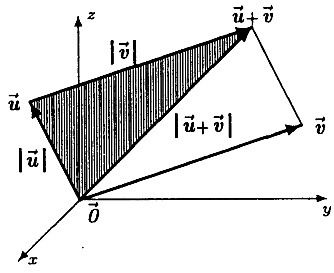
a) $\vec{u} = (-3, 0, 4)$; b) $\vec{v} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{31}\right)$; c) $\overrightarrow{AB}$, gdzie $A = (2, 1, -3), B = (-1, 1, 4)$.

● **Fakt 5.1.14** *(własności długości wektora)*

Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$ będą wektorami w $\boldsymbol{R}^3$ oraz niech $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Wtedy:

1. $|\vec{u}| \geqslant 0$, przy czym $|\vec{u}| = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$;
2. $|\alpha \vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}|$;
3. $|\vec{u} + \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|$;
4. $\big||\vec{u}| - |\vec{v}|\big| \leqslant |\vec{u} - \vec{v}|$.

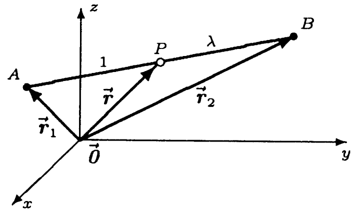
Uwaga. Nierówność **3.** jest prawdziwa także dla dowolnej liczby składników. Nierówność tę ze względu na jej interpretację geometryczną nazywamy nierównością trójkąta (rys. 5.1.18). Równość w tej nierówności jest możliwa tylko wtedy, gdy $\vec{u} = \vec{0}$ lub $\vec{v} = \vec{0}$ albo, gdy $\vec{v} = \beta \vec{u}$ dla pewnego $\beta > 0$.



Rys. 5.1.18. Ilustracja nierówności trójkąta.

■ **Fakt 5.1.15** *(położenie punktu podziału odcinka)*
Niech $\vec{r}_1$ oraz $\vec{r}_2$ będą wektorami wodzącymi odpowiednio punktów A i B. Punkt P podziału odcinka AB w stosunku $1 : \lambda$, gdzie $\lambda > 0$, (rys. 5.1.19) ma wektor wodzący

$$\vec{r} = \frac{\lambda \vec{r}_1 + \vec{r}_2}{1+\lambda}.$$



Rys. 5.1.19. Podział odcinka AB w stosunku $1 : \lambda$.

Uwaga. Jeżeli $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, to współrzędne wektora $\vec{r} = (x, y, z)$ wyrażają się wzorami:

$$x = \frac{\lambda x_1 + x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{\lambda y_1 + y_2}{1+\lambda}, \qquad z = \frac{\lambda z_1 + z_2}{1+\lambda}.$$

○ **Ćwiczenie 5.1.16**

a) Niech $A = (-1, 2, 5)$ oraz $B = (1, 6, -3)$. Obliczyć współrzędne środka odcinka AB;

b) Punkt $P = (0, 0, 0)$ dzieli odcinek AB w stosunku $1 : 3$. Znaleźć współrzędne punktu B, jeżeli $A = (-1, 2, 3)$.

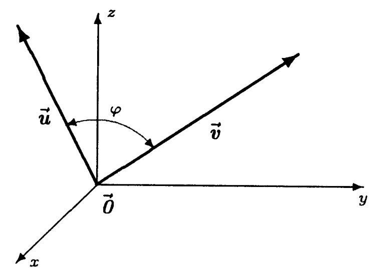
c) W trójkącie ABC znane są współrzędne wierzchołków $A = (1, -1, 0)$, $B = (5, 7, 3)$ oraz punktu przecięcia jego środkowych $S = (2, 4, 0)$. Wyznaczyć współrzędne wierzchołka C.

5.2 Iloczyn skalarny

● **Definicja 5.2.1** *(iloczyn skalarny)*
Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ określamy wzorem:

$$\vec{u} \circ \vec{v} \stackrel{def}{=} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi,$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (rys. 5.2.1).



Rys. 5.2.1. Ilustracja do definicji iloczynu skalarnego.

○ **Ćwiczenie 5.2.2**
Uzasadnić, że rzut prostokątny wektora $\vec{u}$ na wektor $\vec{v}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}.$$

■ **Fakt 5.2.3** *(wzór do obliczania iloczynu skalarnego)*
Niech $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ oraz $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ będą wektorami w $\boldsymbol{R}^3$. Wtedy

$$\vec{u} \circ \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

○ **Ćwiczenie 5.2.4**
Obliczyć iloczyny skalarne podanych wektorów:
a) $\vec{u} = (-1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$; b) $\vec{u} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\right)$, $\vec{v} = \left(\sqrt{8}, -\sqrt{27}, 0\right)$.

○ **Ćwiczenie 5.2.5**
Uzasadnić, że kąt między wektorami niezerowymi $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ wyraża się wzorem:

$$\varphi = \arccos \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

○ **Ćwiczenie 5.2.6**
Obliczyć kąty między podanymi parami wektorów:
a) $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, -5)$; b) $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

● **Fakt 5.2.7** *(własności iloczynu skalarnego)*
Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ będą dowolnymi wektorami w $\boldsymbol{R}^3$ oraz niech $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Wtedy

1. $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$; **2.** $(\alpha\vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha(\vec{u} \circ \vec{v})$;

3. $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$; **4.** $(\vec{u}+\vec{v}) \circ \vec{w} = \vec{u} \circ \vec{w} + \vec{v} \circ \vec{w}$;

5. $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$; **6.** wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe $\Longleftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0$.

Uwaga. Równość podana w punkcie **4.** jest prawdziwa także dla dowolnej liczby wektorów składników. Równość w nierówności **5.** jest możliwa tylko wtedy, gdy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe.

○ **Ćwiczenie* 5.2.8**
Uzasadnić podane powyżej stwierdzenia.

○ **Ćwiczenie 5.2.9**
a) Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} - 5\vec{q}$, przy czym $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wzajemnie prostopadłymi wersorami;
b) Obliczyć długość wektora $\vec{a} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$, jeżeli $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wzajemnie prostopadłymi wersorami;
c*) Jakie warunki muszą spełniać wektory $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, aby istniał prostopadłościan, którego przekątnymi ścian wychodzącymi z jednego wierzchołka będą te wektory?
d*) Czy istnieje czworościan, którego podstawą jest trójkąt prostokątny i którego wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku nie należącym do podstawy są proste?

○ **Ćwiczenie 5.2.10**

Korzystając z rachunku wektorowego obliczyć:

a) kąt między przekątnymi sąsiadujących ze sobą ścian sześcianu;

b*) kąt nachylenia krawędzi bocznej czworościanu foremnego do płaszczyzny podstawy.

○ **Ćwiczenie 5.2.11**

a) Znaleźć wektor $\vec{w}$ o długości 1, który jest prostopadły do wektorów $\vec{u} = (1, -2, 0)$, $\vec{v} = (0, 3, -2)$;

b) Znaleźć wektor $\vec{c}$ o długości 1, który z wektorami $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = \left(1, \sqrt{3}, 0\right)$ tworzy kąty $\frac{\pi}{3}$.

5.3 Iloczyn wektorowy

● **Definicja 5.3.1** *(orientacja trójki wektorów)*

Niech $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ będą wektorami w $\boldsymbol{R}^3$. Mówimy, że wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tworzą układ o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych, jeżeli

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} > 0.$$

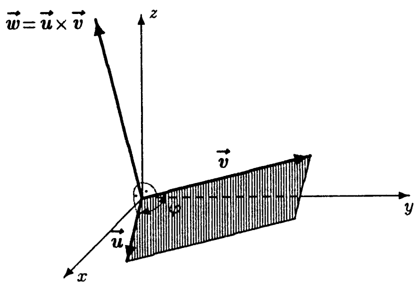
W przypadku, gdy podany wyznacznik jest ujemny mówimy, że orientacja układu wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jest przeciwna do orientacji układu współrzędnych. Układ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nazywamy prawoskrętnym (lewoskrętnym), gdy jest on zgodny z prawoskrętnym (lewoskrętnym) układem współrzędnych.

● **Definicja 5.3.2** *(iloczyn wektorowy)*

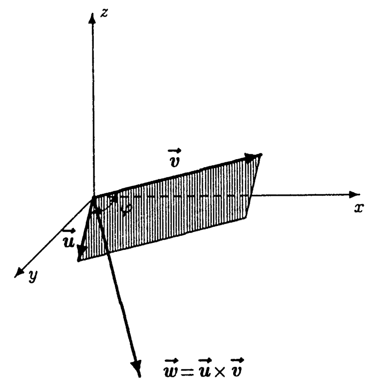
Niech $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą niewspółliniowymi wektorami w $\boldsymbol{R}^3$. Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$, który spełnia warunki:

1. jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (rys. 5.3.1-2);
2. jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$, tj. równa
$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\varphi,$$
gdzie φ jest kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$;
3. orientacja trójki wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych $Oxyz$.

Iloczyn wektorowy pary wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oznaczamy przez $\vec{u} \times \vec{v}$. Jeżeli jeden z wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ jest wektorem zerowym lub jeżeli wektory te są współliniowe, to przyjmujemy, że $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.



Rys. 5.3.1. Wektor $\vec{w}$ jest iloczynem wektorowym wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ w układzie prawoskrętnym.



Rys. 5.3.2. Wektor $\vec{w}$ jest iloczynem wektorowym wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ w układzie lewoskrętnym.

■ **Fakt 5.3.3** *(wzór do obliczania iloczynu wektorowego)*
Niech $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ oraz $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ będą wektorami w $\boldsymbol{R}^3$. Wtedy

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

gdzie $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ oznaczają wersory odpowiednio na osiach Ox, Oy, Oz.

Uwaga. Przy obliczaniu powyższego wyznacznika wersory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ należy traktować formalnie tak jak liczby.

○ **Ćwiczenie 5.3.4**
Korzystając z powyższego wzoru obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:
a) $\vec{u} = (-1, 2, 5)$, $\vec{v} = (2, 0, -3)$; b) $\vec{u} = (-1, -3, 4)$, $\vec{v} = (5, 6, -2)$.

● **Fakt 5.3.5** *(własności iloczynu wektorowego)*
Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ będą dowolnymi wektorami w $\boldsymbol{R}^3$ oraz niech $\alpha \in \boldsymbol{R}$. Wtedy

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$;
2. $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$;
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$;
4. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$;
5. $|\vec{u} \times \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$;
6. wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe $\iff \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Uwaga. Równość w nierówności **5.** jest możliwa tylko wtedy, gdy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe. Iloczyn wektorowy wektorów zapisanych jako sumy wersorów $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ pomnożonych przez liczby można obliczyć stosując powyższe własności oraz wykorzystując tabelkę:

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

○ Ćwiczenie* 5.3.6
Uzasadnić podane wyżej własności iloczynu wektorowego.

○ Ćwiczenie 5.3.7
Obliczyć iloczyny wektorowe podanych wektorów:
a) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = -4\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$; b) $\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = -2\vec{j} + 5\vec{k}$.

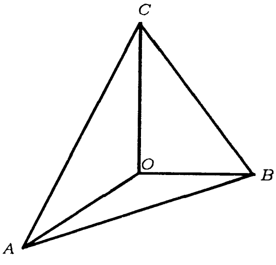
○ Ćwiczenie 5.3.8
Obliczyć pola podanych obszarów:
a) równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{u} = (0,3,-2)$, $\vec{v} = (-1,2,5)$;
b) trójkąt o wierzchołkach $A = (1,2,3)$, $B = (0,-1,2)$, $C = (0,4,0)$;
c) powierzchnia równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (2,-1,1)$, $\vec{v} = (0,3,1)$, $\vec{w} = (1,1,0)$.

○ Ćwiczenie 5.3.9
Uzasadnić tożsamość
$$(\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{p} - \vec{q}) = 2(\vec{p} \times \vec{q}),$$
gdzie $\vec{p}, \vec{q} \in \boldsymbol{R}^3$. Następnie pokazać, że pole S równoległoboku o przekątnych $\vec{p}$, $\vec{q}$ wyraża się wzorem
$$S = \frac{1}{2}|\vec{p} \times \vec{q}|.$$

○ Ćwiczenie* 5.3.10
Uzasadnić podane tożsamości dla wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \boldsymbol{R}^3$.
a) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (\vec{u})^2 \cdot (\vec{v})^2 - (\vec{u} \circ \vec{v})^2$;
b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \circ \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \circ \vec{v}) \cdot \vec{w}$.

○ Ćwiczenie* 5.3.11

W wierzchołku O czworościanu $ABCO$ wszystkie kąty płaskie są proste. Udowodnić „przestrzenne twierdzenie Pitagorasa":
$$(S_{\triangle ABO})^2 + (S_{\triangle BCO})^2 + (S_{\triangle ACO})^2 = (S_{\triangle ABC})^2,$$
gdzie $S_{\triangle XYZ}$ oznacza pole trójkąta XYZ.



5.4 Iloczyn mieszany

● Definicja 5.4.1 *(iloczyn mieszany)*
Niech $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ będą wektorami w $\boldsymbol{R}^3$. Iloczyn mieszany uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ określamy wzorem:
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \stackrel{def}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}.$$

○ **Ćwiczenie 5.4.2**
Korzystając z definicji obliczyć iloczyny mieszane podanych uporządkowanych trójek wektorów:

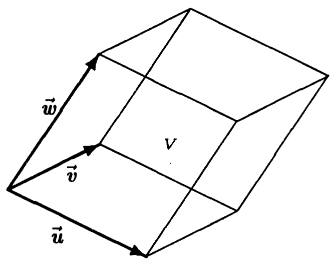
a) $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (0,1,1)$, $\vec{w} = (1,0,1)$;

b) $\vec{u} = (-2,1,3)$, $\vec{v} = (4,3,-1)$, $\vec{w} = (1,0,-2)$.

■ Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego wektorów

Iloczyn mieszany wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jest równy (z dokładnością do znaku) objętości równoległościanu V rozpiętego na wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ (rys. 5.4.1);

$$|V| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|.$$



Rys. 5.4.1. Równoległościan rozpięty na trzech wektorach.

■ **Fakt 5.4.3** *(wzór do obliczania iloczynu mieszanego)*
Niech $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$. Wtedy

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

○ **Ćwiczenie 5.4.4**
Obliczyć iloczyny mieszane podanych trójek wektorów:

a) $\vec{u} = (0,1,-1)$, $\vec{v} = (1,-2,-3)$, $\vec{w} = (1,5,0)$;

b) $\vec{u} = (1,4,-1)$, $\vec{v} = (3,2,0)$, $\vec{w} = (0,0,-3)$.

○ **Ćwiczenie 5.4.5**
Obliczyć objętości podanych brył:

a) równoległościan rozpięty na wektorach $\vec{a} = (1,-1,2)$, $\vec{b} = (0,3,-2)$, $\vec{c} = (-1,5,0)$;

b) czworościan o wierzchołkach $P = (1,1,1)$, $Q = (1,2,3)$, $R = (-1,1,0)$, $S = (0,0,1)$.

● **Fakt 5.4.6** *(własności iloczynu mieszanego)*
Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{r}$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$ oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy

1. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$;

2. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$;

3. $(\vec{u}+\vec{r}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{r}, \vec{v}, \vec{w})$;

4. $(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$;

5. wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ leżą w jednej płaszczyźnie $\Longleftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$;

6. $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$.

Uwaga. Równość w ostatniej nierówności jest możliwa tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jest zerowy albo, gdy te wektory są wzajemnie prostopadłe.

○ Ćwiczenie* 5.4.7

Uzasadnić stwierdzenia podane w poprzednim fakcie.

○ Ćwiczenie 5.4.8

a) Zbadać, czy wektory $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (-1,0,4)$, $\vec{c} = (0,-2,6)$ są współpłaszczyznowe;

b) Zbadać, czy punkty $A = (1,0,2)$, $B = (5,1,5)$, $C = (3,-1,2)$, $D = (1,3,5)$ leżą w jednej płaszczyźnie.

○ Ćwiczenie* 5.4.9

Udowodnić, że objętość czworościanu V o wierzchołkach $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $A_3 = (x_3, y_3, z_3)$, $A_4 = (x_4, y_4, z_4)$ wyraża się wzorem:

$$|V| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}\right|.$$

○ Ćwiczenie* 5.4.10

Uzasadnić, że objętość równoległościanu V o przekątnych $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r} \in R^3$ wyraża się wzorem

$$|V| = \frac{1}{4}\,|(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})|.$$

5.5 Zastosowania rachunku wektorowego w mechanice

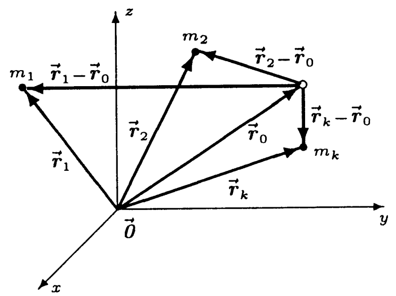
• Definicja 5.5.1 *(wektorowy moment statyczny)*

Niech $\vec{r}_i$ będzie wektorem wodzącym punktu materialnego o masie m_i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant k$. Wektorowym momentem statycznym, względem punktu o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$, układu punktów materialnych

$$(m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2), \ldots, (m_k, \vec{r}_k)$$

nazywamy wektor

$$\overrightarrow{MS} \overset{def}{=} m_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) + m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) + \ldots + m_k(\vec{r}_k - \vec{r}_0).$$



Rys. 5.5.1. Układ punktów materialnych.

Uwaga. Wektorowy moment statyczny charakteryzuje rozkład masy układu punktów materialnych. W przestrzeni dla $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ oraz $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ wektorowy moment statyczny przyjmuje postać:

$$\overrightarrow{MS} \overset{def}{=} (MS_{yz}, MS_{xz}, MS_{xy}) = \left(\sum_{i=1}^{k} m_i x_i,\ \sum_{i=1}^{k} m_i y_i,\ \sum_{i=1}^{k} m_i z_i\right).$$

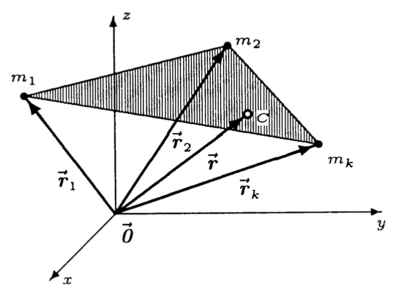
Podobnie na płaszczyźnie dla $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ oraz $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$ wektorowy moment statyczny przyjmuje postać:

$$\overrightarrow{MS} \overset{def}{=} (MS_y, MS_x) = \left(\sum_{i=1}^{k} m_i x_i,\ \sum_{i=1}^{k} m_i y_i\right).$$

- **Definicja 5.5.2** *(środek masy układu punktów materialnych)*

Środkiem masy układu punktów materialnych nazywamy punkt, względem którego wektorowy moment statyczny tego układu jest wektorem zerowym.

Uwaga. Środek masy układu punktów materialnych jest wyznaczony jednoznacznie. Należy on do najmniejszego zbioru wypukłego zawierającego te punkty (rys. 5.5.2).



Rys. 5.5.2. Środek masy układu punktów materialnych.

- **Fakt 5.5.3** *(położenie środka masy układu punktów materialnych)*

Wektor wodzący środka masy układu punktów materialnych

$$(m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2), \ldots, (m_k, \vec{r}_k)$$

ma postać

$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_k\vec{r}_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}.$$

Uwaga. Dla $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ współrzędne wektora wodzącego środka masy wyrażają się wzorami:

$$\begin{cases} x = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}, \\ y = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ky_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}, \\ z = \dfrac{m_1z_1 + m_2z_2 + \ldots + m_kz_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}. \end{cases}$$

○ **Ćwiczenie 5.5.4**

a) W wierzchołkach trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $a = 3$ i $b = 4$ umieszczono jednakowe masy. Znaleźć położenie środka masy tego układu;

b) W siedmiu wierzchołkach sześcianu o krawędzi $d = 1$ umieszczono masy $m = 1$, a w ósmym umieszczono masę $M = 7$. Znaleźć położenie środka masy tego układu;

c) W wierzchołkach trójkąta umieszczono jednakowe masy. Uzasadnić, że środek masy tego układu pokrywa się z punktem przecięcia środkowych trójkata;

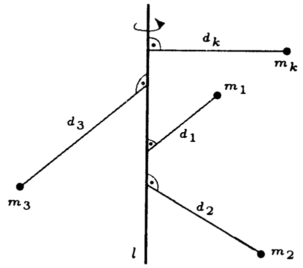
d*) Korzystając z pojęcia środka masy uzasadnić twierdzenie: punkt przecięcia odcinków łączących środki przeciwległych boków czworokąta wypukłego dzieli na połowę odcinek łączący środki przekątnych tego czworokąta.

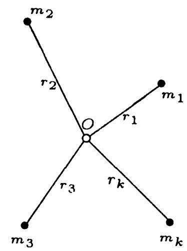
● **Definicja 5.5.5** *(momenty bezwładności układu punktów materialnych)*

1. Moment bezwładności względem prostej l układu punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \ldots, m_k$ określamy wzorem

$$I_l \stackrel{def}{=} m_1d_1^2 + m_2d_2^2 + \ldots + m_kd_k^2,$$

gdzie $d_1, d_2, \ldots, d_k$ oznaczają odległości tych punktów od prostej l.





Rys. 5.5.3. Ilustracje do definicji momentów bezwładności względem prostej i punktu.

2. Moment bezwładności względem punktu O układu punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$ określamy wzorem

$$I_O \stackrel{def}{=} m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_k r_k^2,$$

gdzie $r_1, r_2, \ldots, r_k$ oznaczają odległości tych punktów od O.

● **Fakt 5.5.6** *(momenty bezwładności względem osi i początku układu)*
Niech punkty materialne o masach $m_1, m_2, \ldots, m_k$ mają odpowiednio współrzędne $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_k, y_k, z_k)$. Wtedy momenty bezwładności tego układu względem osi Ox, Oy, Oz wyrażają się wzorami:

$$I_x = m_1\left(y_1^2 + z_1^2\right) + m_2\left(y_2^2 + z_2^2\right) + \ldots + m_k\left(y_k^2 + z_k^2\right),$$

$$I_y = m_1\left(x_1^2 + z_1^2\right) + m_2\left(x_2^2 + z_2^2\right) + \ldots + m_k\left(x_k^2 + z_k^2\right),$$

$$I_z = m_1\left(x_1^2 + y_1^2\right) + m_2\left(x_2^2 + y_2^2\right) + \ldots + m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right).$$

Moment bezwładności tego układu względem początku układu współrzędnych wyraża się wzorem

$$I_O = m_1\left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right) + m_2\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right) + \ldots + m_k\left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right).$$

Uwaga*. Środek masy układu punktów materialnych pokrywa się z punktem, względem którego moment bezwładności tego układu jest najmniejszy.

○ **Ćwiczenie 5.5.7**

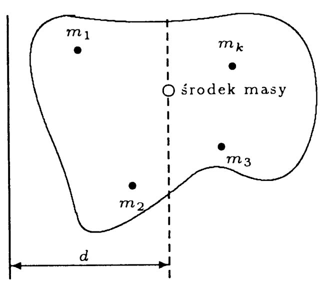
a) W wierzchołkach podstawy sześcianu o krawędzi 2 umieszczono masy $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$, a w pozostałych wierzchołkach umieszczono masy $m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = 3$. Obliczyć moment bezwładności tego układu względem pionowej osi symetrii sześcianu;

b*) W wierzchołkach czworościanu foremnego o krawędzi 1 umieszczono masy jednostkowe. Obliczyć moment bezwładności tego układu względem prostej łączącej środki skośnych krawędzi czworościanu;

c*) Pokazać, że moment bezwładności względem dowolnej prostej układu punktów materialnych o łącznej masie m wyraża się wzorem Steinera

$$I = I_0 + md^2,$$

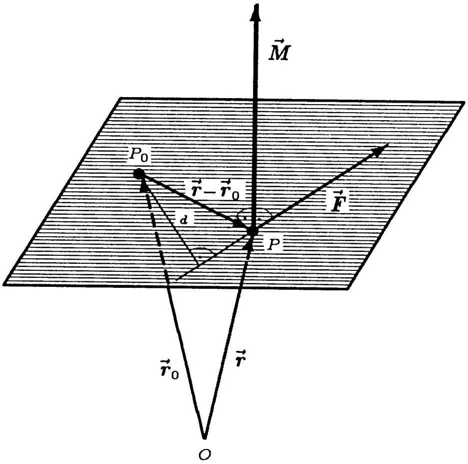
gdzie I_0 jest momentem bezwładności tego układu względem prostej przechodzącej przez jego środek masy i równoległej do początkowej prostej, a d jest odległością tych prostych (rys.)



● **Definicja 5.5.8** *(moment siły)*

Momentem siły $\vec{F}$ przyłożonej w punkcie P o wektorze wodzącym $\vec{r}$, względem punktu P_0 o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ nazywamy wektor $\vec{M}$ określony wzorem:

$$\vec{M} \stackrel{def}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}.$$



Rys. 5.5.4. Moment siły.

Uwaga. Długość wektora $\vec{M}$ wyraża się wzorem

$$|\vec{M}| = d \cdot |\vec{F}|,$$

gdzie d jest odległością punktu P_0 od prostej zawierającej wektor $\vec{F}$.

○ **Ćwiczenie 5.5.9**

a) Obliczyć moment siły $\vec{F} = 3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ przyłożonej w punkcie $P = (1, 0, -1)$ względem punktu $O = (2, 0, -3)$;

b) Obliczyć moment siły $F = 5$ N działającej stycznie do obwodu koła rowerowego o średnicy $d = 1$ m, względem osi obrotu.

● **Fakt 5.5.10** *(siła przyciągania grawitacyjnego)*

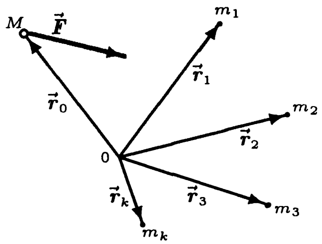
Siła przyciągania grawitacyjnego masy M, umieszczonej w punkcie o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$, przez układ punktów materialnych

$$(m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2), \ldots, (m_k, \vec{r}_k)$$

wyraża się wzorem

$$\vec{F} = GM\left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^3}m_1 + \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_0|^3}m_2 + \ldots + \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_0}{|\vec{r}_k - \vec{r}_0|^3}m_k\right),$$

gdzie G oznacza stałą grawitacji.



Rys. 5.5.5. Siła przyciągania grawitacyjnego.

○ **Ćwiczenie 5.5.11**

Obliczyć siłę z jaką masy $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$ rozmieszczone w wierzchołkach kwadratu o boku 2 przyciągają masę punktową $M = 1$ znajdującą się na wysokości $h = 1$ nad środkiem tego kwadratu.

○ **Ćwiczenie* 5.5.12**

Zbadać, czy siła przyciągania grawitacyjnego masy punktowej przez układ punktów materialnych jest równoległa do wektora łączącego masę punktową ze środkiem masy tego układu.

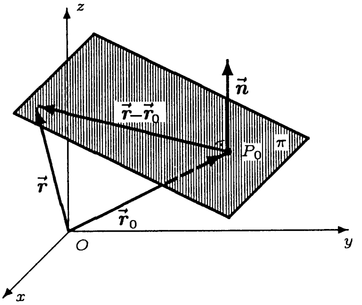
5.6 Równania płaszczyzny

● **Fakt 5.6.1** *(równanie normalne płaszczyzny)*

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ (rys. 5.6.1) ma postać:

$$\pi : \ (\vec{r} - \vec{r}_0) \circ \vec{n} = 0,$$

gdzie $\vec{r} = (x, y, z)$ jest wektorem wodzącym punktów przestrzeni. Wektor $\vec{n}$ nazywamy wektorem normalnym tej płaszczyzny.



Rys. 5.6.1. Płaszczyzna wyznaczona przez punkt i wektor normalny.

W formie rozwiniętej równanie płaszczyzny π przyjmuje postać:

$$\pi : \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Powyższe zależności nazywamy równaniami normalnymi płaszczyzny.

○ **Ćwiczenie 5.6.2**

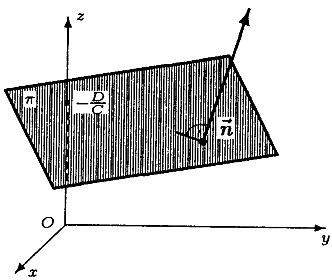
a) Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0 = (-1, 2, 0)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = (2, -3, 1)$;

b) Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez środek odcinka AB, gdzie $A = (3, 2, -1)$, $B = (5, 0, 7)$ i prostopadłej do tego odcinka.

● **Fakt 5.6.3** *(równanie ogólne płaszczyzny)*
Każde równanie postaci:

$$\pi : \ Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $|A| + |B| + |C| > 0$, przedstawia płaszczyznę. Płaszczyzna ta ma wektor normalny $\vec{n} = (A, B, C)$ i przecina oś Oz w punkcie $z = -\frac{D}{C}$, o ile $C \neq 0$ (rys. 5.6.2).



Rys. 5.6.2. Płaszczyzna o równaniu $Ax + By + Cz + D = 0$.

○ **Ćwiczenie 5.6.4**

a) Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (3, -2, 5)$ i równoległej do płaszczyzny yOz;

b) Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $Q = (1, 3, -2)$ i przez oś Oy.

■ **Fakt 5.6.5** *(równanie parametryczne płaszczyzny)*
Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i rozpiętej na niewspółliniowych wektorach $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ i $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ (rys. 5.6.3) ma postać:

$$\pi : \ \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbf{R}.$$

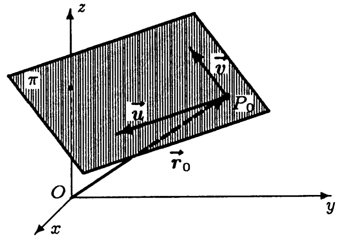
lub inaczej

$$\pi : \ (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + s\,(a_1, b_1, c_1) + t\,(a_2, b_2, c_2)\,, \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbf{R}.$$

W formie rozwiniętej równanie tej płaszczyzny przyjmuje postać:

$$\pi : \ \begin{cases} x = x_0 + sa_1 + ta_2, \\ y = y_0 + sb_1 + tb_2, \\ z = z_0 + sc_1 + tc_2, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbf{R}.$$

Powyższe zależności nazywamy równaniami parametrycznymi płaszczyzny.



Rys. 5.6.3. Płaszczyzna rozpięta przez dwa wektory.

○ Ćwiczenie 5.6.6

a) Napisać równanie parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez początek układu współrzędnych i równoległej do wektorów $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{u}_2 = (0, -1, 2)$;

b) Obliczyć, w jakim punkcie płaszczyzna

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + 2s - t, \\ y = 2 + 3s + 2t, \\ z = -3 - s + t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \boldsymbol{R},$$

przecina oś Ox.

○ Ćwiczenie* 5.6.7

Uzasadnić, że krzywa Γ zadana w postaci parametrycznej

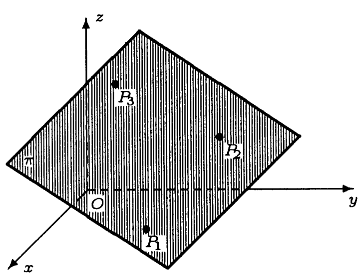
$$\Gamma : \begin{cases} x = 1 + 2\cos t - \sin t, \\ y = 3 - \cos t + 2\sin t, \\ z = -2 + \cos t + 5\sin t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in [0, 2\pi],$$

jest płaska.

■ Fakt 5.6.8 *(równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty)*

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant 3$, (rys. 5.6.4) ma postać:

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$



Rys. 5.6.4. Płaszczyzna wyznaczona przez trzy punkty.

○ **Ćwiczenie 5.6.9**

a) Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P = (0,1,2)$, $Q = (-1,4,5)$, $R = (2,-2,3)$;

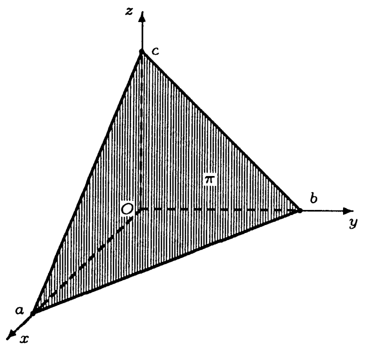
b) Zbadać, czy punkty $P_1 = (1,2,-3)$, $P_2 = (2,3,4)$, $P_3 = (0,5,4)$, $P_4 = (5,3,1)$ należą do jednej płaszczyzny.

■ **Fakt 5.6.10** *(równanie odcinkowe płaszczyzny)*

Równanie płaszczyzny π odcinającej na osiach Ox, Oy, Oz układu współrzędnych odpowiednio odcinki (zorientowane) a, b, $c \neq 0$ (rys. 5.6.5) ma postać:

$$\pi: \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Powyższą zależność nazywamy równaniem odcinkowym płaszczyzny.



Rys. 5.6.5. Płaszczyzna odcinająca na osiach układu odcinki a, b, c.

○ **Ćwiczenie 5.6.11**

a) Znaleźć równanie płaszczyzny, która przechodzi przez punkt $P = (-1,2,3)$ i odcina na osiach układu odcinki jednakowej długości. Ile rozwiązań ma to zadanie ?

b) Obliczyć objętość czworościanu ograniczonego płaszczyzną $\pi: x + 2y + 3z - 6 = 0$ oraz płaszczyznami układu współrzędnych.

5.7 Równania prostej

● **Fakt 5.7.1** *(równanie parametryczne prostej)*

Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i wyznaczonej przez niezerowy wektor kierunku $\vec{v} = (a,b,c)$ (rys. 5.7.1) ma postać:

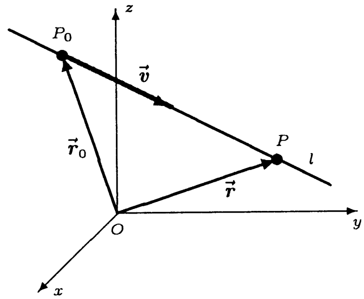
$$l: \ \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbf{R}$$

lub po rozpisaniu na współrzędne:

$$l: \ (x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c), \quad \text{gdzie } t \in \mathbf{R}.$$

Powyższą zależność nazywamy równaniem parametrycznym prostej w postaci wektorowej. Inny zapis tego równania ma postać

$$l: \begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$



Rys. 5.7.1. Prosta wyznaczona przez punkt i wektor.

Uwaga. Powyższe równania będą przedstawiały półproste lub odcinek, gdy parametr t będzie przebiegał odpowiednio przedziały $(-\infty, \beta]$, $[\alpha, \infty)$ lub $[\alpha, \beta]$.

○ **Ćwiczenie 5.7.2**

a) Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_0 = (-1, 0, 3)$ i równoległej do wektora $\vec{v} = (2, -1, 5)$;

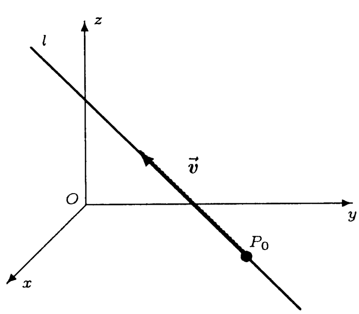
b) Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, 2, 1)$.

■ **Fakt 5.7.3** *(równanie kierunkowe prostej)*

Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i wyznaczonej przez niezerowy wektor kierunku $\vec{v} = (a, b, c)$ (rys. 5.7.2) ma postać:

$$l: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ten sposób zapisu równania parametrycznego prostej nazywamy jej równaniem kierunkowym.



Rys. 5.7.2. Prosta l przechodzi przez punkt P_0 i jest równoległa do wektora $\vec{v}$.

Uwaga. Aby nie ograniczać zakresu stosowania równania kierunkowego prostej przyjmujemy, że w mianownikach powyższych ułamków mogą wystąpić zera.

○ **Ćwiczenie 5.7.4**

a) Znaleźć punkty przecięcia prostej $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{1}$ z płaszczyznami układu współrzędnych;

b) Zbadać, czy proste

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}, \qquad l_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+1}{1}$$

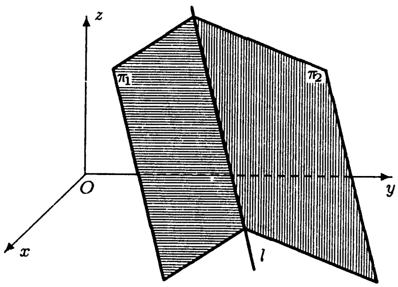
mają punkt wspólny.

● **Definicja 5.7.5** *(równanie krawędziowe prostej)*

Prostą l, która jest częścią wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (rys. 5.7.3), będziemy zapisywać w postaci:

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Ten sposób zapisu prostej nazywamy jej równaniem krawędziowym.



Rys. 5.7.3. Prosta jako część wspólna dwóch płaszczyzn.

■ **Fakt 5.7.6** *(o wektorze kierunkowym prostej w postaci krawędziowej)*

Wektor kierunkowy prostej $l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ ma postać

$$\vec{v} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2).$$

○ **Ćwiczenie 5.7.7**

a) Prostą $l: \begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ zapisać w postaci parametrycznej;

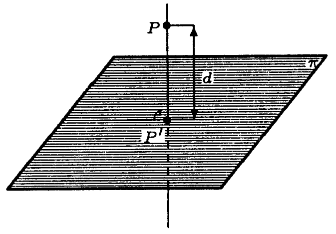
b) Znaleźć punkt przecięcia prostej $l: \begin{cases} x + y + z + 4 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ z płaszczyzną xOz.

5.8 Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn

Definicja 5.8.1 *(rzut punktu na płaszczyznę i na prostą)*

Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π nazywamy punkt P' tej płaszczyzny (rys. 5.8.1) spełniający warunek:

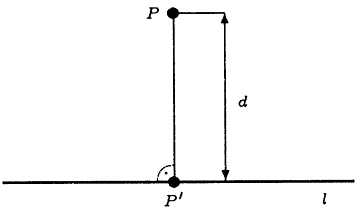
$$PP' \perp \pi.$$



Rys. 5.8.1. Rzut prostokątny punktu na płaszczyznę oraz odległość punktu od płaszczyzny.

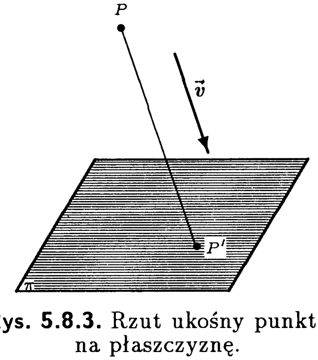
Podobnie rzutem prostokątnym punktu P na prostą l nazywamy punkt P' tej prostej (rys. 5.8.2) spełniający warunek:

$$PP' \perp l.$$

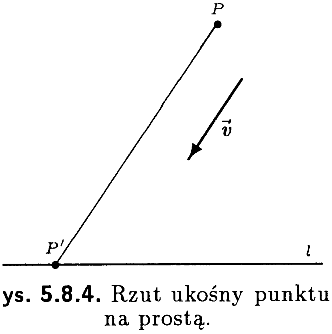


Rys. 5.8.2. Rzut prostokątny punktu na prostą oraz odległość punktu od prostej.

Uwaga. W podobny sposób definiuje się rzut ukośny punktu na płaszczyznę lub na prostą w kierunku ustalonego wektora (rys. 5.8.3, 5.8.4).



Rys. 5.8.3. Rzut ukośny punktu na płaszczyznę.



Rys. 5.8.4. Rzut ukośny punktu na prostą.

○ **Ćwiczenie 5.8.2**

a) Znaleźć rzut prostokątny punktu $P = (3, -2, 1)$ na płaszczyznę $\pi : 2x - y + 3z = 0$;

b) Znaleźć rzut prostokątny punktu $P = (2, -1, 4)$ na prostą $l : \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$;

c) Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{v} = (-1, 3, 0)$ punktu $P = (1, 2, -2)$ na płaszczyznę $\pi : x + y - 4z - 6 = 0$;

d) Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{v} = (4, -1, -3)$ punktu $P = (1, 3, 1)$ na płaszczyznę $\pi : 2x - y + 3z + 7 = 0$;

e) Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{v} = (2, -3, 1)$ punktu $P = (3, 1, 0)$ na prostą $l : (x, y, z) = (-3 - s, 5 - s, 2 + 2s)$, gdzie $s \in \mathbf{R}$;

f) Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{v} = (-1, -1, 1)$ punktu $P = (-2, 2, 1)$ na prostą $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{3}$.

■ **Fakt 5.8.3** *(odległość punktu od płaszczyzny)*

Odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Uwaga. Odległość punktu P od płaszczyzny π jest równa długości odcinka PP', gdzie P' jest rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π (rys. 5.8.1). Podobnie, odległość punktu P od prostej l jest równa długości odcinka PP', gdzie P' oznacza rzut prostokątny punktu P na prostą l (rys. 5.8.2).

○ **Ćwiczenie 5.8.4**

a) Obliczyć odległość punktu $P = (5, -1, 6)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 4y + 12z - 12 = 0$;

b) Obliczyć odległość punktu $P = (3, 6, -1)$ od płaszczyzny $\pi : x = 1 + s + 2t, y = 2s - t, z = t$, gdzie $s, t, \in \mathbf{R}$.

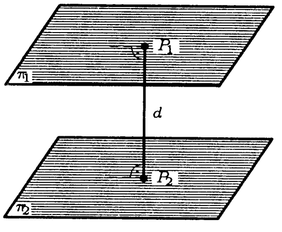
■ **Fakt 5.8.5** *(odległość płaszczyzn równoległych)*

Odległość między płaszczyznami równoległymi π_1 i π_2 o równaniach

$$\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0, \quad \pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

(rys. 5.8.5) wyraża się wzorem:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



Rys. 5.8.5. Odległość między płaszczyznami równoległymi.

○ Ćwiczenie 5.8.6

Obliczyć odległość między danymi płaszczyznami równoległymi:

a) $\pi_1 : \ 3x + y - z - 2 = 0, \ \pi_2 : \ 3x + y - z + 3 = 0$;

b) $\pi_1 : \ x - y + 2z - 5 = 0, \ \pi_2 : \ -2x + 2y - 4z - 8 = 0$.

○ Ćwiczenie 5.8.7

a) Obliczyć odległość punktu $P = (3, 4, 2)$ od prostej $l : \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = 3 - 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \boldsymbol{R}$;

b) Obliczyć odległość między prostymi równoległymi

$$l_1 : \ \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-1}, \quad l_2 : \ \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1};$$

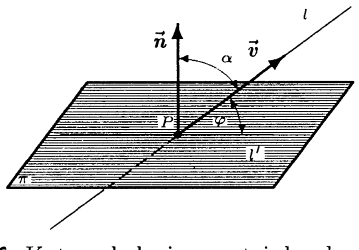
c) Obliczyć odległość między prostymi skośnymi

$$l_1 : \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2t, \end{cases} \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}, \quad l_2 : \begin{cases} x = s, \\ y = -1 + 2s, \\ z = 2 - 2s, \end{cases} \text{gdzie } s \in \boldsymbol{R};$$

d) Obliczyć odległość prostej $l : \ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ od płaszczyzny $\pi : \ 2y + 2z - 5 = 0$.

● Definicja 5.8.8 *(kąt nachylenia prostej do płaszczyzny)*

Kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny π nazywamy kąt $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α jest kątem ostrym między wektorem normalnym $\vec{n}$ płaszczyzny π i wektorem kierunkowym $\vec{v}$ prostej l (rys. 5.8.6). Jeżeli prosta jest równoległa do płaszczyny, to przyjmujemy, że kąt jej nachylenia do tej płaszczyzny jest równy 0.



Rys. 5.8.6. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.

● Fakt 5.8.9 *(wzór do obliczania kąta nachylenia prostej do płaszczyzny)*

Kąt nachylenia prostej l o wektorze kierunkowym $\vec{v}$ do płaszczyzny π o wektorze normalnym $\vec{n}$ wyraża się wzorem:

$$\sphericalangle(l, \pi) = \arcsin \frac{|\vec{n} \circ \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}.$$

○ **Ćwiczenie 5.8.10**

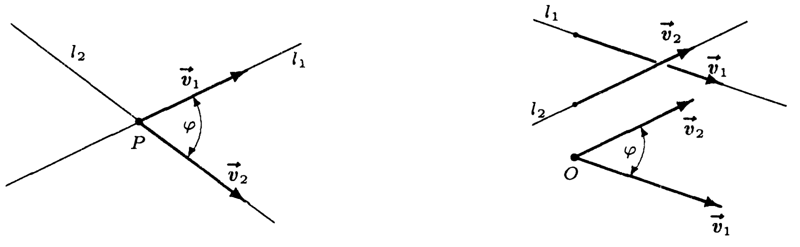
Obliczyć kąty nachylenia podanych prostych do wskazanych płaszczyzn:

a) $l: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$, $\pi: 2x + y + z = 0$;

b) $l: \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \end{cases}$ π – płaszczyzna yOz.

● **Definicja 5.8.11** *(kąt między prostymi)*

Kątem między prostymi nazywamy kąt ostry utworzony przez wektory kierunkowe tych prostych (rys. 5.8.7). Przyjmujemy, że kąt między prostymi równoległymi jest równy 0.



5.8.7. Kąt między prostymi przecinającymi się oraz między prostymi skośnymi.

● **Fakt 5.8.12** *(wzór do obliczania kąta między prostymi)*

Kąt między prostymi l_1, l_2 o wektorach kierunkowych odpowiednio $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ wyraża się wzorem:

$$\sphericalangle(l_1, l_2) = \arccos \frac{|\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}.$$

○ **Ćwiczenie 5.8.13**

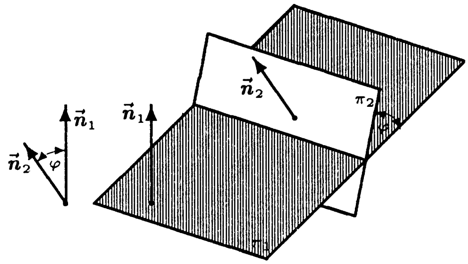
Obliczyć kąty między podanymi parami prostych:

a) $l_1: \begin{cases} x = 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = t, \end{cases}$ gdzie $t \in \boldsymbol{R}$, $l_2: \begin{cases} x = 1 - 3s, \\ y = 2 + s, \\ z = -3, \end{cases}$ gdzie $s \in \boldsymbol{R}$;

b) $l_1: \begin{cases} 3x - y - 2z = 0, \\ x + y - 2z = 0, \end{cases}$ $l_2: \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

● **Definicja 5.8.14** *(kąt między płaszczyznami)*

Kątem między płaszczyznami nazywamy kąt ostry między wektorami normalnymi tych płaszczyzn (rys. 5.8.8). Przyjmujemy, że kąt między płaszczyznami równoległymi jest równy 0.



Rys. 5.8.8. Kąt między płaszczyznami.

● **Fakt 5.8.15** *(wzór do obliczania kąta między płaszczyznami)*
Kąt między płaszczyznami π_1 i π_2 o wektorach normalnych odpowiednio $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ wyraża się wzorem:

$$\sphericalangle(\pi_1, \pi_2) = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

○ **Ćwiczenie 5.8.16**
Obliczyć kąty między podanymi parami płaszczyzn:

a) $\pi_1 : \ x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0, \quad \pi_2 : \ x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0;$

b) $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + s + t, \\ y = 2 + s - t, \\ z = 3 - s + t, \end{cases}$ gdzie $s, t \in \boldsymbol{R}$, $\pi_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 3s - t, \\ z = 2 + s + t, \end{cases}$ gdzie $s, t \in \boldsymbol{R}$.

● **Fakt* 5.8.17** *(wektorowe wzory na rzuty i odległości punktów, prostych i płaszczyzn)*
Niech P_0, P_1, P_2 będą punktami w przestrzeni $\boldsymbol{R}^3$ o wektorach wodzących odpowiednio $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ oraz niech $\vec{n}$, $\vec{v}$ będą niezerowymi, a $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ nierównoległymi wektorami z $\boldsymbol{R}^3$. Dalej niech π, π_1, π_2 będą płaszczyznami odpowiednio o równaniach wektorowych

$$\pi : (\vec{r} - \vec{r}_0) \circ \vec{n} = 0,$$
$$\pi_1 : (\vec{r} - \vec{r}_1) \circ \vec{n} = 0,$$
$$\pi_2 : (\vec{r} - \vec{r}_2) \circ \vec{n} = 0.$$

Ponadto niech l, l_1, l_2, k_1, k_2 będą prostymi, których wektorowe równania parametryczne są postaci

$$l : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{v}, \quad l_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{v},$$
$$k_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{v}_1, \quad k_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{v}_2, \text{ gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Wówczas

1. rzut prostokątny punktu P_1 na płaszczyznę π ma wektor wodzący postaci:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \circ \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n};$$

2. rzut prostokątny punktu P_1 na prostą l ma wektor wodzący postaci:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v};$$

3. odległość punktu P_1 od płaszczyzny π wyraża się wzorem:

$$d(P_1, \pi) = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \circ \vec{n}|}{|\vec{n}|};$$

4. odległość między równoległymi płaszczyznami π_1 i π_2 wyraża się wzorem:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \circ \vec{n}|}{|\vec{n}|};$$

5. odległość punktu P_1 od prostej l wyraża się wzorem:

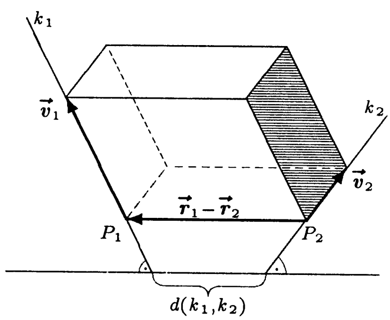
$$d(P_1, l) = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|};$$

6. odległość między prostymi równoległymi l_1 i l_2 wyraża się wzorem:

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|};$$

7. odległość między prostymi skośnymi k_1 i k_2 wyraża się wzorem (rys. 5.8.9):

$$d(k_1, k_2) = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2)|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}.$$



Rys. 5.8.9. Odległość prostych skośnych

5.9 Dowody wybranych twierdzeń i faktów

■ **Dowód Faktu 5.1.15** *(położenie punktu podziału odcinka)*

Położenie punktu P określa zależność $\overrightarrow{PB} = \lambda\, \overrightarrow{AP}$. Ponieważ $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{PB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$, więc $\vec{r}_2 - \vec{r} = \lambda(\vec{r} - \vec{r}_1)$. Stąd $\vec{r}(1 + \lambda) = \lambda \vec{r}_1 + \vec{r}_2$.

Dowód Faktu 5.2.3 *(wzór do obliczania iloczynu skalarnego)*
Jeżeli $\vec{v} = \vec{0}$, to wzór zachodzi. Załóżmy więc, że $\vec{v} \neq \vec{0}$. Niech P oznacza rzut prostokątny na prostą o wektorze kierunkowym $\vec{v}$. Z własności rzutów (**Fakt 5.1.7**) wynika, że

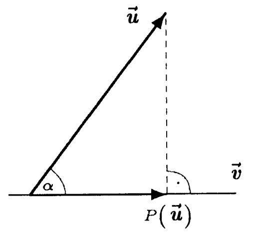
$$P(\vec{u}) = P\left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) = x_1 P\left(\vec{i}\right) + y_1 P\left(\vec{j}\right) + z_1 P\left(\vec{k}\right).$$

Ale długość rzutu prostokątnego wektora na prostą jest równa długości tego wektora pomnożonej przez kosinus kąta ostrego między wektorem a prostą, zatem uwzględniając zwrot tego rzutu mamy

$$P(\vec{u}) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}|\vec{u}|\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}),$$

gdzie $\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})$ oznacza kąt skierowany między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Dla kolejnych wersorów otrzymujemy zależności

$$P\left(\vec{i}\right) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\left|\vec{i}\right|\cos\sphericalangle\left(\vec{i},\vec{v}\right) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\frac{x_2}{|\vec{v}|},$$
$$P\left(\vec{j}\right) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\left|\vec{j}\right|\cos\sphericalangle\left(\vec{j},\vec{v}\right) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\frac{y_2}{|\vec{v}|},$$
$$P\left(\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\left|\vec{k}\right|\cos\sphericalangle\left(\vec{k},\vec{v}\right) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\frac{z_2}{|\vec{v}|}.$$



$$\left|P(\vec{u})\right| = |\vec{u}|\cos\alpha.$$

Stąd

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}|\vec{u}|\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\left(\frac{x_1x_2}{|\vec{v}|} + \frac{y_1y_2}{|\vec{v}|} + \frac{z_1z_2}{|\vec{v}|}\right),$$

zatem

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\left(|\vec{u}|\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) - \frac{x_1x_2 + y_1y_1 + z_1z_2}{|\vec{v}|}\right) = 0.$$

Ale $\vec{v} \neq \vec{0}$, więc $|\vec{u}|\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) - \dfrac{x_1x_2 + y_1y_1 + z_1z_2}{|\vec{v}|} = 0$. Ostatecznie mamy

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Dowód Faktu 5.3.3 *(wzór do obliczania iloczynu wektorowego)*
Zapiszemy wektor występujący w wyznaczniku tezy jako $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$. Wektor $\vec{w}$ jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Mamy bowiem

$$\vec{u} \circ \vec{w} = x_1\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_1\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Podobnie $\vec{v} \circ \vec{w} = 0$, czyli $\vec{w} \perp \vec{u}$ oraz $\vec{w} \perp \vec{v}$. Dalej

$$\begin{aligned}
|\vec{w}|^2 &= (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\
&= \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \\
&= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \circ \vec{v})^2 \\
&= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\left(1 - \cos^2\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})\right) \\
&= \left(|\vec{u}||\vec{v}|\sin\sphericalangle(\vec{u},\vec{v})\right)^2.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że $|\vec{w}| = |\vec{u} \times \vec{v}|$. Ponadto

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$
$$= x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = |\vec{w}|^2.$$

W określeniu iloczynu wektorowego wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ są niewspółliniowe, zatem

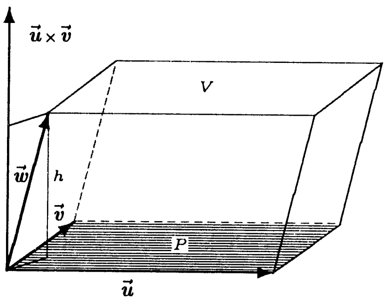
$$|\vec{u}|\,|\vec{v}| \sin \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0.$$

Stąd $|\vec{w}|^2 > 0$, więc orientacja układu wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych. Uzasadniliśmy, że wektor $\vec{w}$ ma ten sam kierunek, zwrot oraz tą samą długość, co wektor $\vec{u} \times \vec{v}$, zatem $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

■ Dowód interpretacji geometrycznej iloczynu mieszanego wektorów

Przyjmijmy, że podstawa równoległościanu jest równoległobokiem rozpiętym na wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$. Objętość $|V|$ tego równoległościanu jest równa iloczynowi pola $|P| = |\vec{u} \times \vec{v}|$ jego podstawy oraz wysokości $h = |\vec{w}|\,|\cos \sphericalangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})|$. Stąd

$$|V| = P \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}|\,|\vec{w}|\,|\cos \sphericalangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})| = |(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}|.$$



■ Dowód Faktu 5.4.3 *(wzór do obliczania iloczynu mieszanego)*

Mamy

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \circ (x_3, y_3, z_3)$$
$$= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \circ (x_3, y_3, z_3)$$
$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

■ Dowód Faktu 5.6.5 *(równanie parametryczne płaszczyzny)*

Jeżeli wektor $\vec{r}$ spełnia równanie $\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$, gdzie $s, t \in \mathbf{R}$, to spełnia on równanie normalne płaszczyzny z wektorem normalnym $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. Mamy bowiem

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \circ \vec{n} = (s\vec{u} + t\vec{v}) \circ (\vec{u} \times \vec{v}) = s\vec{u} \circ (\vec{u} \times \vec{v}) + t\vec{v} \circ (\vec{u} \times \vec{v})$$
$$= s(\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) + t(\vec{v}, \vec{u}, \vec{v}) = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0.$$

Z drugiej strony jeżeli $(\vec{r}-\vec{r}_0)\circ(\vec{u}\times\vec{v})=0$, to po rozpisaniu wektora $\vec{u}\times\vec{v}$ na współrzędne otrzymamy równość

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}(x-x_0)-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}(y-y_0)-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}(z-z_0)=0.$$

Pokażemy teraz, że istnieją liczby $s,t\in\mathbf{R}$, dla których mamy $\vec{r}=\vec{r}_0+s\vec{u}+t\vec{v}$. W tym celu należy stwierdzić niesprzeczność układu równań

$$\begin{cases} sa_1+ta_2 = x-x_0 \\ sb_1+tb_2 = y-y_0 \\ sc_1+tc_2 = z-z_0 \end{cases}.$$

Ponieważ $\vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$, więc choć jedna ze współrzędnych tego wektora jest niezerowa. Niech np. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$. Wówczas pierwsze dwa równania tworzą układ Cramera. Rozwiązanie tego układu ma postać

$$s=\frac{\begin{vmatrix} x-x_0 & a_2 \\ y-y_0 & b_2 \end{vmatrix}}{A},\qquad t=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & x-x_0 \\ b_1 & y-y_0 \end{vmatrix}}{A},\qquad \text{gdzie}\quad A=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Po podstawieniu uzyskanych wartości s i t do trzeciego równania otrzymujemy tożsamość, bowiem

$$sc_1+tc_2=\frac{(b_2c_1-b_1c_2)(x-x_0)+(a_1c_2-a_2c_1)(y-y_0)}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}(y-y_0)}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}(z-z_0)}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}=z-z_0.$$

■ **Dowód Faktu 5.6.8** *(równanie płaszczyzny przechodzącej przez 3 punkty)*
Równanie zapisane w tezie ma postać $xD_{11}+yD_{12}+zD_{13}+D_{14}=0$, gdzie D_{1j} dla $j=1,2,3,4$ oznaczają dopełnienia algebraiczne kolejnych elementów pierwszego wiersza wyznacznika. Jest to postać ogólna równania płaszczyzny. Współrzędne punktów P_1, P_2, P_3 spełniają to równanie, bo w odpowiednich wyznacznikach pojawiają się dwa identyczne wiersze.
Do takiej postaci równania płaszczyzny prowadzi też następujące rozumowanie. Niech $\vec{u}=\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{v}=\overrightarrow{P_1P_3}$. Dla wektora normalnego $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}$ płaszczyzny π oraz wektorów wodzących $\vec{r}_1$ i $\vec{r}=(x,y,z)$ odpowiednio punktów P_1 i P z płaszczyzny otrzymujemy ciąg równoważności

$$(\vec{r}-\vec{r}_1)\perp\vec{n}\iff(\vec{r}-\vec{r}_1)\circ(\vec{u}\times\vec{v})=0\iff(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{u},\vec{v})=0$$

$$\iff\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\iff\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

przy czym ostatnia równość wynika z własności wyznaczników.

■ **Dowód Faktu 5.6.10** *(równanie odcinkowe płaszczyzny)*
Ponieważ punkty $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ spełniają równanie ogólne płaszczyzny

$$\frac{1}{a}x+\frac{1}{b}y+\frac{1}{c}z-1=0,$$

więc jest to równanie szukanej płaszczyzny.

■ **Dowód Faktu 5.7.3** *(równanie kierunkowe prostej)*
Dla $a,b,c\neq 0$ równanie to powstaje po wyrugowaniu parametru t z równania parametrycznego, tzn.

$$t=\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

■ **Dowód Faktu 5.7.6** *(o wektorze kierunkowym prostej w postaci krawędziowej)*
Wszystkie wektory leżące w płaszczyźnie π_1 są prostopadłe do wektora normalnego $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$. Podobnie wszystkie wektory z płaszczyzny π_2 są prostopadłe do wektora normalnego $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. Ponieważ prosta l jest częścią wspólną obu płaszczyzn, więc wszystkie wektory znajdujące się na niej są prostopadłe zarówno do $\vec{n}_1$, jak i do $\vec{n}_2$. Kierunek tej prostej wyznacza więc wektor $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$.

■ **Dowód Faktu 5.8.3** *(odległość punktu od płaszczyzny)*
Prosta l prostopadła do płaszczyzny π i przechodząca przez punkt P ma równanie parametryczne

$$l:\ x=x_0+At,\ y=y_0+Bt,\ z=z_0+Ct,\ \text{gdzie } t\in\mathbf{R}.$$

Punkt $P'=(x',y',z')$ (rys. 5.7.1) przecięcia tej prostej z płaszczyzną π wyznaczamy z warunku

$$A(x_0+At)+B(y_0+Bt)+C(z_0+Ct)+D=0.$$

Stąd $t\left(A^2+B^2+C^2\right)=-\left(Ax_0+By_0+Cz_0+D\right)$. Zatem szukana odległość wynosi

$$\begin{aligned} d=|PP'| &= \sqrt{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2+(z'-z_0)^2}=\sqrt{(At)^2+(Bt)^2+(Ct)^2}\\ &= |t|\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\frac{|t|\left(A^2+B^2+C^2\right)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}$$

■ **Dowód Faktu 5.8.5** *(odległość płaszczyzn równoległych)*
Niech $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ (rys. 5.7.3) będzie dowolnym punktem płaszczyzny π_1. Współrzędne tego punktu spełniają równanie $Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0$. Odległość między płaszczyznami jest równa odległości punktu P_1 od płaszczyzny π_2. Zatem

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-D_1+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5.10 Odpowiedzi i wskazówki

5.1.8 a) $\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

5.1.13 a) 5; b) 6; c) $\sqrt{58}$.

5.1.16 a) $(0,4,1)$; b) $(3,-6,-9)$; c) $(0,6,-3)$.

5.2.4 a) 1; b) -5.

5.2.6 a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{3}$.

5.2.9 a) 13; b) $\sqrt{41}$; c*) wektory $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ są niewspółpłaszczyznowe oraz spełniają warunki: $|\vec{p}| = |\vec{q} - \vec{r}|$, $|\vec{q}| = |\vec{p} - \vec{r}|$, $|\vec{r}| = |\vec{p} - \vec{q}|$; d*) nie istnieje.

5.2.10 a) $\frac{\pi}{3}$; b*) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.2.11 a) $\vec{w}_1 = \left(\frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}\right)$, $\vec{w}_2 = -\vec{w}_1$;
b) $\vec{c}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\vec{c}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

5.3.4 a) $(-6, 7, -4)$; b) $(-18, 18, 9)$.

5.3.7 a) $(11, -11, 11)$; b) $(-6, -20, -8)$.

5.3.8 a) $\sqrt{374}$; b) $\frac{5}{2}\sqrt{6}$; c) $4\left(\sqrt{14} + \sqrt{11}\right)$.

5.3.11* Wskazówka. Wykorzystać iloczyn wektorowy.

5.4.2 a) 2; b) 10.

5.4.4 a) -10; b) 30.

5.4.5 a) 14; b) $\frac{5}{6}$.

5.4.8 a) nie; b) tak.

5.5.4 a) $\left(1, \frac{4}{3}\right)$ dla wierzchołków $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,4)$; b) $\left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right)$, masa $M = 7$ znajduje się w początku układu współrzędnych, a masy $m = 1$ są w I oktancie.

5.5.7 a) 32; b*) 1.

5.5.9 a) $(-10, 5, -5)$; b) $\left(0, -\frac{5}{2}, 0\right)$.

5.5.11 $\vec{F} = \frac{2G}{3\sqrt{3}}(0, 2, 5)$, $|\vec{F}| = \frac{2G}{3\sqrt{3}}\sqrt{29}$.

5.5.12* Nie.

5.6.2 a) $2x - 3y + z + 8 = 0$; b) $x - y + 4z - 15 = 0$.

5.6.4 a) $x - 3 = 0$; b) $2x + z = 0$.

5.6.6 a) $(x, y, z) = s(1, 2, 3) + t(0, -1, 2)$, gdzie $s, t \in \boldsymbol{R}$; b) $P = \left(-\frac{28}{5}, 0, 0\right)$.

5.6.9 a) $12x + 7y - 3z - 1 = 0$; b) nie.

5.6.11 a) $x + y + z - 4 = 0$; b) 6.

5.7.2 a) $(x, y, z) = (-1, 0, 3) + t(2, -1, 5)$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$;
b) $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 0, -1)$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$.

5.7.4 a) $l \cap xOy = (-9, -22, 0)$, $l \cap xOz = \left(2, 0, \frac{11}{2}\right)$, $l \cap yOz = \left(0, -4, \frac{9}{2}\right)$;
b) tak, $A = (3, -3, 3)$.

5.7.7 a) $x = 2t$, $y = 5 - 5t$, $z = 1 + 2t$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$; b) $\left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{5}{2}\right)$.

5.8.2 a) $\left(\frac{10}{7}, -\frac{17}{14}, -\frac{19}{14}\right)$; **b)** $\left(-\frac{9}{11}, \frac{9}{11}, \frac{27}{11}\right)$; **c)** $\left(\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, -2\right)$; **d)** rzut nie istnieje, bo wektor $\vec{v}$ jest równoległy do płaszczyzny π, a $P \notin \pi$; **e)** $(-1, 7, -2)$; **f)** rzut nie istnieje.

5.8.4 a) $\frac{79}{13}$; **b)** $\sqrt{\frac{3}{10}}$.

5.8.6 a) $\frac{5}{\sqrt{11}}$; **b)** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

5.8.7 a) $2\sqrt{6}$; **b)** $\sqrt{30}$; **c)** $\frac{2}{\sqrt{5}}$; **d)** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

5.8.10 a) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$; **b)** $\arcsin \frac{1}{\sqrt{35}}$.

5.8.13 a) $\arccos \frac{7}{\sqrt{60}}$; **b)** $\arccos \frac{19}{13\sqrt{3}}$.

5.8.16 a) $\frac{\pi}{3}$; **b)** $\arccos \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Dodatek

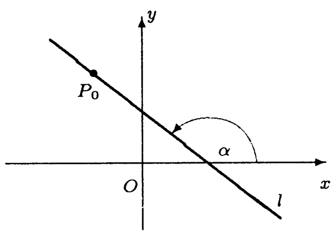
Geometria analityczna na płaszczyźnie

Prosta na płaszczyźnie

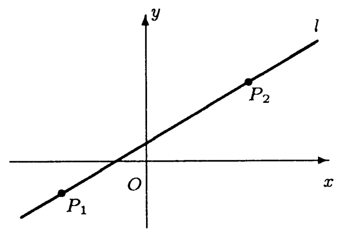
- **Fakt** *(równania prostej)*

1. Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ i nachylonej pod kątem α do dodatniej części osi Ox (rys. 1) ma postać:

$$l \,:\, y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_0)\,.$$



Rys. 1.



Rys. 2.

2. Równanie prostej l przechodzącej przez punkty $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ (rys. 2) ma postać:

$$l \,:\, (x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)\,.$$

3. Równanie prostej l odcinającej na osiach Ox i Oy odcinki (skierowane) o długościach odpowiednio a i b, gdzie $ab \neq 0$, (rys. 3) ma postać:

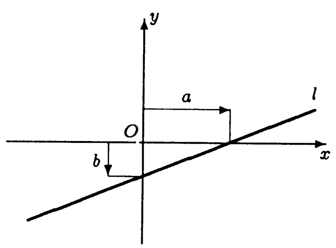
$$l \,:\, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Jest to tzw. równanie odcinkowe prostej.

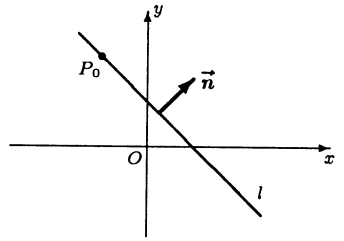
4. Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ i mającej wektor normalny $\vec{n} = (A, B) \neq \vec{0}$ (rys. 4) ma postać:

$$l \,:\, A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Jest tzw. równanie normalne prostej.



Rys. 3.

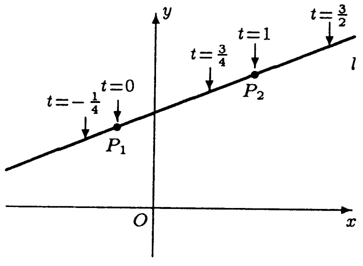


Rys. 4.

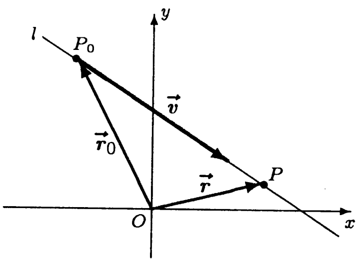
5. Równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez punkty $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ (rys. 5) ma postać:

$$l : \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\,t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\,t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Na rys. 5 przedstawiono położenie punktów na prostej w zależności od wartości parametru.



Rys. 5.



Rys. 6.

6. Równanie parametryczne (postać wektorowa) prostej l przechodzącej przez punkt P_0 o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i mającej kierunek zadany przez wektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ (rys. 6) ma postać:

$$l : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R},$$

a $\vec{r}$ jest promieniem wodzącym punktu P płaszczyzny.

- **Fakt** *(warunki równoległości prostych)*

1. Proste $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

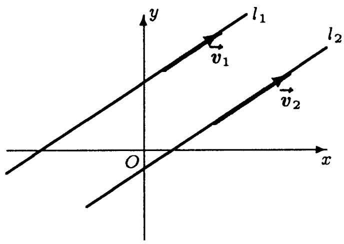
$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0.$$

2. Proste $l_1 : y = m_1x + b_1$, $l_2 : y = m_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m_1 = m_2.$$

3. Proste $l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{v}_1$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$, $l_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{v}_2$, gdzie $s \in \boldsymbol{R}$, są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\vec{v}_1 = k\vec{v}_2 \quad \text{dla pewnego } k \neq 0.$$

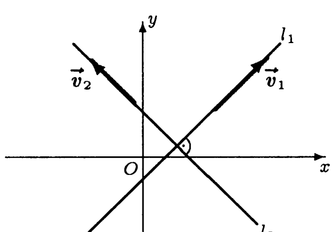


Rys. 7. Proste równoległe.

- **Fakt** *(warunki prostopadłości prostych)*

1. Proste $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy
$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$
2. Proste $l_1 : y = m_1x + b_1$, $l_2 : y = m_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy
$$m_1m_2 = -1.$$
3. Proste $l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{v}_1$, gdzie $t \in \boldsymbol{R}$, $l_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + t\vec{v}_2$, gdzie $s \in \boldsymbol{R}$, są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 = 0.$$



Rys. 8. Proste prostopadłe.

- **Fakt** *(kąt między prostymi)*

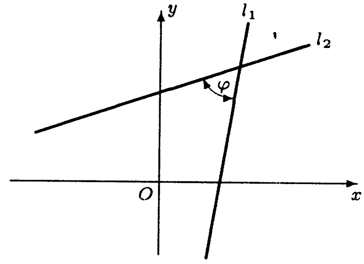
1. Miara kąta ostrego φ utworzonego przez proste $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ wyraża się wzorem:

$$\varphi = \arccos \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2}\,\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}.$$

2. Miara kąta ostrego φ utworzonego przez proste $l_1 : y = m_1 x + b_1$, $l_2 : y = m_2 x + b_2$ wyraża się wzorem:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| .$$

Jeżeli $m_1 m_2 = -1$, to przyjmujemy, że $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

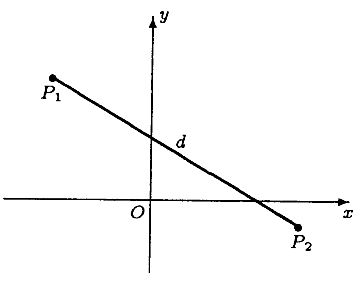


Rys. 9. Kąt ostry między prostymi.

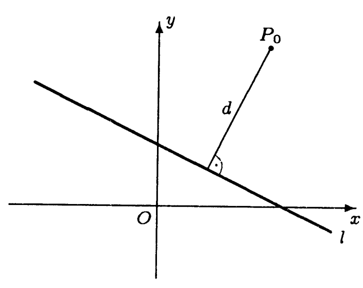
- **Fakt** *(odległości punktów i prostych)*

1. Odległość d punktów $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ wyraża się wzorem:

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Rys. 10. Odległość dwóch punktów.



Rys. 11. Odległość punktu od prostej.

2. Odległość d punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ od prostej $l : Ax + By + C = 0$ wyraża się wzorem:

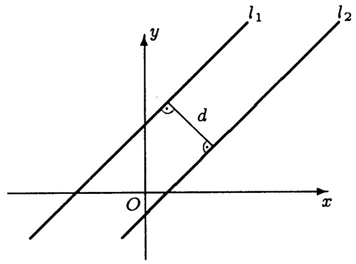
$$d = d(P_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3. Odległość d prostych równoległych

$$l_1 : Ax + By + C_1 = 0, \qquad l_2 : Ax + By + C_2 = 0,$$

wyraża się wzorem:

$$d = d(l_1, l_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



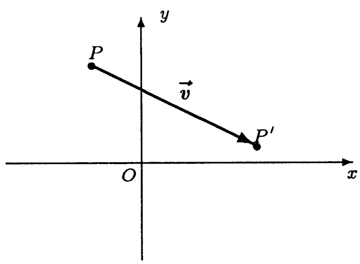
Rys. 12. Odległość dwóch prostych równoległych.

Przekształcenia płaszczyzny

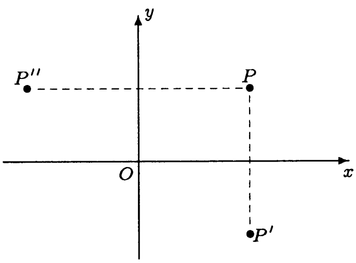
- **Fakt** *(przekształcenia płaszczyzny)*

1. Współrzędne punktu P' otrzymanego w wyniku przesunięcia punktu $P = (x, y)$ o wektor $\vec{v} = (a, b)$ wyrażają się wzorami:

$$P' : \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$$



Rys. 13. Przesunięcie punktu o wektor.



Rys. 14. Symetrie względem osi układu.

2. Współrzędne punktów P' i P'' otrzymanych w wyniku symetrii punktu $P = (x, y)$ odpowiednio względem osi Ox i Oy wyrażają się wzorami:

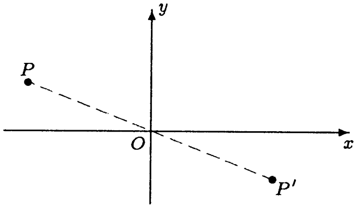
$$P' : \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y; \end{cases} \qquad P'' : \begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases}$$

3. Współrzędne punktu P' otrzymanego w wyniku symetrii punktu $P = (x, y)$ względem początku układu współrzędnych wyrażają się wzorami:

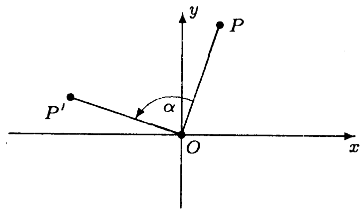
$$P' : \begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

4. Współrzędne punktu P' otrzymanego w wyniku obrotu punktu $P = (x, y)$ wokół początku układu współrzędnych o kąt α (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara) wyrażają się wzorami:

$$P' : \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$



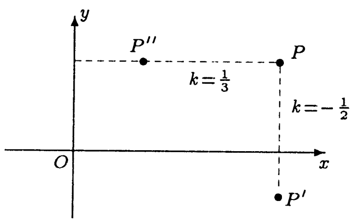
Rys. 15. Symetria względem początku układu.



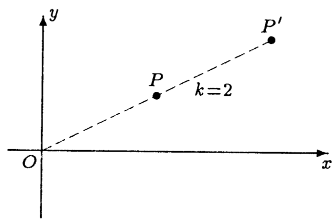
Rys. 16. Obrót wokół początku układu.

5. Współrzędne punktów P', P'' otrzymanych w wyniku podobieństw (powinowactw) punktu $P = (x, y)$ w skali k względem odpowiednio osi Ox i Oy wyrażają się wzorami:

$$P' : \begin{cases} x' = x, \\ y' = ky; \end{cases} \qquad P'' : \begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases}$$



Rys. 17. Podobieństwa względem osi układu.



Rys. 18. Jednokładność względem początku układu.

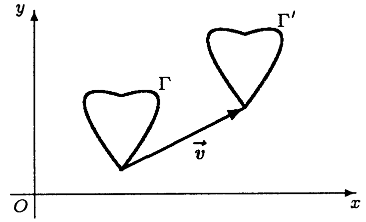
6. Współrzędne punktu P' otrzymanego w wyniku jednokładności (podobieństwa) punktu $P = (x, y)$ w skali k względem początku układu współrzędnych wyrażają się wzorami:

$$P' : \begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky. \end{cases}$$

● **Fakt** *(równania krzywych przesuniętych i obróconych)*

1. Niech Γ oznacza zbiór punktów $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ spełniających równanie $F(x, y) = 0$. Wtedy zbiór Γ' otrzymany w wyniku przesunięcia zbioru Γ o wektor $\vec{v} = (a, b)$ jest opisany przez równanie:

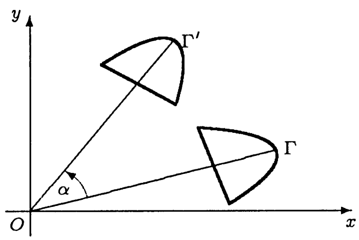
$$\Gamma' : F(x - a, y - b) = 0.$$



Rys. 19. Przesunięcie zbioru o wektor.

2. Niech Γ oznacza zbiór punktów $(x, y) \in \boldsymbol{R}^2$ spełniających równanie $F(x, y) = 0$. Wtedy zbiór Γ' otrzymany w wyniku obrotu zbioru Γ wokół początku układu współrzędnych o kąt α jest opisany przez równanie:

$$\Gamma' \ : \ F(x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha) = 0.$$



Rys. 20. Obrót zbioru wokół początku układu.

Uwaga. Podobną postać mają równania zbiorów Γ' otrzymanych w wyniku zastosowania do zbioru

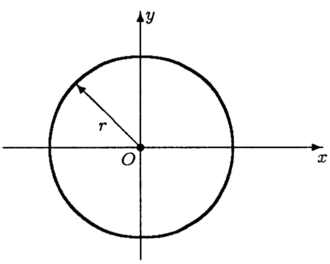
$$\Gamma = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

pozostałych przekształceń płaszczyzny tj.: symetrii osiowej lub punktowej, podobieństwa względem prostej lub punktu.

Krzywe stożkowe

- **Definicja** *(okrąg)*

Okręgiem o środku w punkcie O i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór punktów płaszczyzny położonych w odległości r od punktu O (rys. 21).



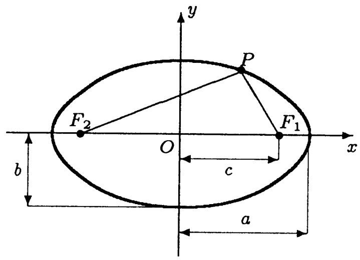
Rys. 21. Okrąg o środku w punkcie O i promieniu r.

- **Fakt** *(równanie okręgu)*

  Równanie okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r > 0$ ma postać:
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

- **Definicja** *(elipsa)*

  Elipsą o ogniskach w punktach F_1, F_2 oraz o dużej osi $2a$, gdzie $2a > 2c = |F_1F_2|$, nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których suma odległości od ognisk F_1 i F_2 jest stała i równa $2a$ (rys. 22);
$$|PF_1| + |PF_2| = 2a.$$



Rys. 22. Elipsa o ogniskach F_1, F_2.

- **Fakt** *(równanie elipsy)*

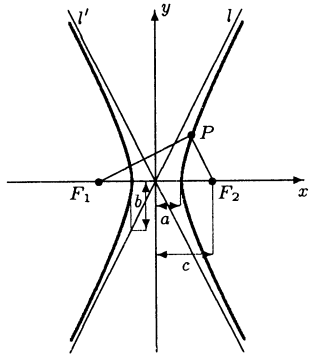
  Równanie elipsy o środku w początku układu współrzędnych i półosiach $a > 0$ i $b > 0$ ma postać:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
  Zależność między półosiami a, b oraz ogniskową c elipsy ma postać:
$$a^2 - b^2 = c^2.$$

- **Definicja** *(hiperbola)*

  Hiperbolą o ogniskach w punktach F_1, F_2 oraz o dużej osi $2a$, gdzie $2a < 2c = |F_1F_2|$, nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których wartość bezwzględna różnicy odległości od ognisk F_1 i F_2 jest stała i równa $2a$ (rys. 23);
$$\Big||PF_1| - |PF_2|\Big| = 2a.$$

- **Fakt** *(równanie hiperboli)*

  Równanie hiperboli o środku w początku układu współrzędnych i półosiach rzeczywistej $a > 0$ i urojonej $b > 0$ ma postać:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Rys. 23. Hiperbola o ogniskach F_1, F_2.

Zależność między półosiami a, b oraz ogniskową c hiperboli ma postać:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

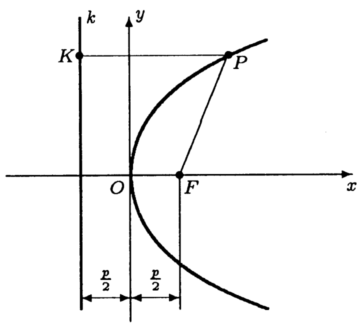
Asymptoty hiperboli mają równania:

$$l : y = \frac{b}{a}x, \qquad l' : y = -\frac{b}{a}x.$$

- **Definicja** *(parabola)*

Parabolą o ognisku w punkcie F i kierownicy k, nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od ogniska jest równa odległości od kierownicy (rys. 24);

$$|PF| = |PK| = d(P, k).$$



Rys. 24. Parabola o ognisku F i kierownicy k.

- **Fakt** *(równania paraboli)*

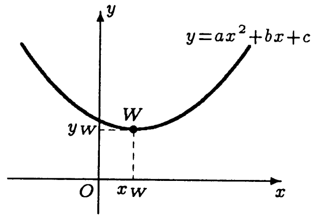
1. Równanie paraboli, której ognisko F ma współrzędne $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, gdzie $p \neq 0$, a kierownica k ma równanie $x = -\frac{p}{2}$ ma postać:

$$y^2 = 2px.$$

2. Równanie $y = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, przedstawia parabolę. Osią tej paraboli jest prosta $x = -\frac{b}{2a}$, a wierzchołek $W = (x_W, y_W)$ ma współrzędne określone wzorami:

$$x_W = -\frac{b}{2a}, \quad y_W = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Jeżeli $a > 0$, to parabola ma ramiona skierowane do góry, a dla $a < 0$ na dół.



Rys. 25. Parabola o równaniu $y = ax^2 + bx + c$.

Uwaga. Okrąg, elipsę, parabolę i hiperbolę nazywamy krzywymi stożkowymi, gdyż każda z nich jest przekrojem powierzchni bocznej stożka pewną płaszczyzną.

● **Fakt** *(równania parametryczne krzywych stożkowych)*

1. Równanie parametryczne elipsy E o środku w początku układu współrzędnych i półosiach $a > 0$, $b > 0$ ma postać:

$$E : \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in [0, 2\pi).$$

Gdy przyjmiemy $a = b = r$, to otrzymamy równanie parametryczne okręgu.

2. Równanie parametryczne hiperboli H o środku w początku układu współrzędnych i półosi rzeczywistej $a > 0$ oraz półosi urojonej $b > 0$ ma postać:

$$H : \begin{cases} x = \pm a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbf{R}.$$

Uwaga. Przyjmując we wzorze znak „+" otrzymamy prawą gałąź hiperboli, a przyjmując znak „−" otrzymamy lewą gałąź.

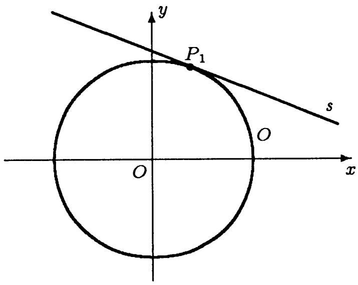
● **Fakt** *(równania stycznych do krzywych stożkowych)*

1. Równanie stycznej s do okręgu $O : x^2 + y^2 = r^2$ w punkcie $P_1 = (x_1, y_1)$ należącym do tego okręgu ma postać:

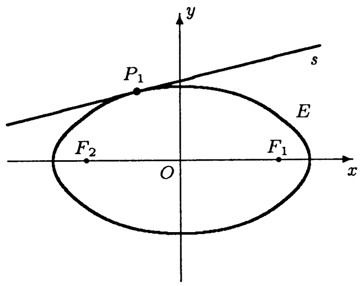
$$s : x_1x + y_1y = r^2.$$

2. Równanie stycznej s do elipsy E : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ w punkcie $P_1 = (x_1, y_1)$ należącym do tej elipsy ma postać:

$$s : \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$



Rys. 26. Styczna do okregu.



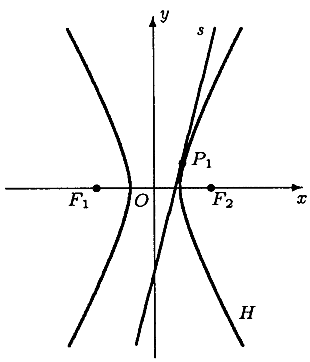
Rys. 27. Styczna do elipsy.

3. Równanie stycznej s do hiperboli H : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ w punkcie $P_1 = (x_1, y_1)$ należącym do tej hiperboli ma postać:

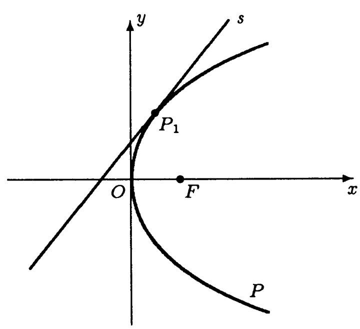
$$s : \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

4. Równanie stycznej s do paraboli P : $y^2 = 2px$ w punkcie $P_1 = (x_1, y_1)$ należącym do tej paraboli ma postać:

$$s : y_1 y = p(x + x_1).$$



Rys. 28. Styczna do hiperboli.



Rys. 29. Styczna do paraboli.

Elementy logiki matematycznej

Rachunek zdań i kwantyfikatory

- **Definicja** *(zdanie)*
  Zdaniem w logice nazywamy zdanie gramatyczne, o którym można orzec, czy jest prawdziwe, czy też fałszywe. Zdania logiczne oznaczamy zwykle literami p, q, r itd. Zdaniom prawdziwym przypisujemy wartość logiczną 1, a fałszywym 0.

- **Przykład**
  a) Zdanie „$2 + 3 = 5$” jest prawdziwe;
  b) Zdanie „$3 > 7$” jest fałszywe;
  c) Wyrażenie „$x^2 = 4$” nie jest zdaniem logicznym, gdyż jego wartość logiczna zależy od x;
  d) Sformułowanie „jestem głodny” także nie jest zdaniem logicznym, gdyż nie wiemy kto je wypowiada.

- **Definicja** *(negacja)*
  Zdanie „nieprawda, że p” nazywamy negacją zdania logicznego p i oznaczamy ją symbolem $\sim p$. Negacja zdania p jest prawdziwa, gdy zdanie p jest fałszywe.

- **Definicja** *(alternatywa)*
  Zdanie „p lub q” nazywamy alternatywą zdań logicznych p, q i oznaczamy ją symbolem $p \vee q$. Przyjmujemy, że alternatywa zdań p, q jest prawdziwa, gdy przynajmniej jedno ze zdań p, q jest prawdziwe.

- **Definicja** *(koniunkcja)*
  Zdanie „p i q” nazywamy koniunkcją zdań logicznych p, q i oznaczamy ją symbolem $p \wedge q$. Przyjmujemy, że koniunkcja zdań p, q jest prawdziwa, gdy oba zdania p, q są prawdziwe.

- **Definicja** *(implikacja)*
  Zdanie „jeżeli p, to q” nazywamy implikacją i oznaczamy ją symbolem $p \Longrightarrow q$. Przyjmujemy, że implikacja jest prawdziwa, gdy zdania p oraz q są prawdziwe lub gdy zdanie p jest fałszywe, a zdanie q jest dowolne (tzn. fałszywe lub prawdziwe). W implikacji zdanie p nazywamy poprzednikiem, a zdanie q następnikiem.

- **Definicja** *(równoważność)*
  Zdanie „p wtedy i tylko wtedy, gdy q” nazywamy równoważnością i oznaczamy ją symbolem $p \Longleftrightarrow q$. Przyjmujemy, że równoważność jest prawdziwa, gdy oba zdania p, q mają tę samą wartość logiczną.

W tabelkach poniżej podajemy wartości logiczne negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności w zależności od wartości logicznych zdań je tworzących.

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

- **Przykład**

a) Zdanie „nieprawda, że $3 \cdot 8 = 25$" jest prawdziwe;

b) Zdanie „$5 > 6$ lub $3 > 2$" jest prawdziwe;

c) Zdanie „$2^3 = 8$ i $\sqrt{9} = -3$" jest fałszywe;

d) Zdanie „jeżeli liczba 333 jest podzielna przez 9, to liczba 333 jest podzielna przez 6" jest fałszywe;

e) Zdanie „$0 \geqslant 0 \Longleftrightarrow 1 \geqslant 0$" jest prawdziwe.

- **Definicja** *(funkcja zdaniowa)*

Funkcją zdaniową nazywamy wyrażenie składające się ze zmiennych zdaniowych $p, q, r \ldots$, połączonych operacjami logicznymi (negacją, alternatywą itd).

- **Przykład**

a) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \Big[(\sim p) \vee q\Big]$;

b) $\sim \Big[p \wedge (q \vee r)\Big]$.

- **Definicja** *(prawo logiczne)*

Prawem logicznym nazywamy funkcję zdaniową, która jest prawdziwa po podstawieniu dowolnych zdań logicznych w miejsce zmiennych zdaniowych.

Najważniejsze prawa logiczne

Prawo	**Nazwa**
$\sim(\sim p) \Longleftrightarrow p$	prawo podwójnego zaprzeczenia
$p \vee (\sim p)$	prawo wyłączonego środka
$\Big[p \wedge (q \vee r)\Big] \Longleftrightarrow \Big[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)\Big]$	rozdzielność koniunkcji względem alternatywy
$\Big[p \vee (q \wedge r)\Big] \Longleftrightarrow \Big[(p \vee q) \wedge (p \vee r)\Big]$	rozdzielność alternatywy względem koniunkcji

Prawo	Nazwa
$\left[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)\right] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$	prawo przechodniości implikacji
$\left[\sim (p \vee q)\right] \Longleftrightarrow \left[(\sim p) \wedge (\sim q)\right]$	prawo de Morgana dla alternatywy
$\left[\sim (p \wedge q)\right] \Longleftrightarrow \left[(\sim p) \vee (\sim q)\right]$	prawo de Morgana dla koniunkcji
$\left[(\sim p) \Longrightarrow p\right] \Longrightarrow p$	prawo Claviusa
$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow \left[(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)\right]$	prawo transpozycji
$\left[p \wedge (p \Longrightarrow q)\right] \Longrightarrow q$	reguła odrywania

- **Definicja** *(kwantyfikator ogólny)*
  Zwrot „dla każdego x należącego do zbioru X” nazywamy kwantyfikatorem ogólnym wiążącym zmienną x ograniczoną do zbioru X i oznaczamy symbolem

$$\bigwedge_{x \in X}$$

- **Definicja** *(kwantyfikator szczegółowy)*
  Zwrot „istnieje x należące do zbioru X” nazywamy kwantyfikatorem szczegółowym wiążącym zmienną x ograniczoną do zbioru X i oznaczamy symbolem

$$\bigvee_{x \in X}$$

Jeżeli chcemy podkreślić, że istnieje tylko jeden element x, to stosujemy symbol

$$\bigvee_{x \in X}!$$

- **Przykład**
  a) $\bigwedge_{x \in (1,\infty)} \log x > 0$; b) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{R}} x^2 - x - 1 = 0$; c) $\bigvee_{x \in \boldsymbol{N}}! \; 2^n = 1024$.

- **Definicja** *(forma zdaniowa)*
  Formą zdaniową zmiennej x nazywamy wyrażenie $p(x)$, które stanie się zdaniem logicznym, gdy w miejsce x podstawimy dowolny element zbioru X. Zbiór ten nazywamy dziedziną formy zdaniowej p. Zbiór tych elementów x ze zbioru X, dla których forma zdaniowa p jest prawdziwa oznaczamy przez

$$\{x \in X : p(x)\}.$$

Forma zdaniowa może zależeć także od większej liczby zmiennych.

- **Przykład**

a) $\{x \in \boldsymbol{R} : x^2 = 4\}$;

b) $\left\{x \in \boldsymbol{R} : (x < 3) \wedge (x \geqslant 5)\right\}$;

c) $\left\{x \in \boldsymbol{R} : (x > 0) \Longrightarrow (x^2 > 0)\right\}$.

Własności kwantyfikatorów

Własność	Nazwa
$\sim\left(\bigwedge_{x\in X} p(x)\right) \iff \bigvee_{x\in X}\left[\sim p(x)\right]$	prawo de Morgana dla kwantyfikatora ogólnego
$\sim\left(\bigvee_{x\in X} p(x)\right) \iff \bigwedge_{x\in X}\left[\sim p(x)\right]$	prawo de Morgana dla kwantyfikatora szczegółowego
$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y} q(x,y) \iff \bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{x\in X} q(x,y)$	prawo przestawiania dla kwantyfikatorów ogólnych
$\bigvee_{x\in X}\bigvee_{y\in Y} q(x,y) \iff \bigvee_{y\in Y}\bigvee_{x\in X} q(x,y)$	prawo przestawiania dla kwantyfikatorów szczegółowych
$\bigvee_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y} q(x,y) \Longrightarrow \bigwedge_{y\in Y}\bigvee_{x\in X} q(x,y)$	prawo przestawiania kwantyfikatora ogólnego ze szczegółowym

W tabeli p oznacza formę zdaniową zależną od zmiennej $x \in X$, a q formę zdaniową zależną od zmiennych $x \in X$ i $y \in Y$.

Pojęcia pierwotne, aksjomaty, definicje, twierdzenia i dowody

- **Definicja** *(pojęcia pierwotne)*

Najprostsze obiekty matematyczne, takie jak np. punkt, zbiór, liczba naturalna oraz podstawowe relacje między tymi obiektami, takie jak np. należenie do zbioru, nazywamy pojęciami pierwotnymi. Tych pojęć nie definiuje się. Zakłada się przy tym, że ich treść jest rozumiana jednoznacznie przez wszystkich.

- **Definicja** *(aksjomaty)*

Układ zdań logicznych dotyczących pojęć pierwotnych nazywamy aksjomatami. Przyjmuje się, że aksjomaty są zdaniami prawdziwymi. Zatem nie wymagają one uzasadniania. Układ aksjomatów musi być niesprzeczny, tzn., że korzystając z praw logiki nie można z niego wydedukować zdania jak i jego zaprzeczenia. Wprowadzanie nowych pojęć matematycznych, takich jak np. ciąg, pochodna funkcji, całka oznaczona, przy pomocy reguł logiki, nazywamy *definiowaniem*. Określanie nowych pojęć prowadzi do rozwoju istniejących teorii matematycznych lub też do powstawania nowych.

- **Definicja** *(twierdzenie)*
Twierdzeniami będziemy nazywali zdania logiczne dotyczace pojęć matematycznych, które można wyprowadzić z aksjomatów stosując prawa logiki. Nazwę twierdzenie będziemy często zastępowali jej synonimami takimi jak: fakt, lemat, stwierdzenie, wniosek, algorytm, wzór. Zdanie logiczne, przed jego wyprowadzeniem z układu aksjomatów, nazywamy *hipotezą*. Niektóre hipotezy okazywały się fałszywe. Twierdzenia mają zwykle postać implikacji

$$Z \Longrightarrow T.$$

Poprzednik implikacji nazywamy założeniem, a następnik tezą twierdzenia. Jednocześnie zdanie Z nazywamy warunkiem wystarczającym dla T, a zdanie T warunkiem koniecznym dla Z. Twierdzenie (hipotezę) postaci

$$T \Longrightarrow Z$$

nazywamy twierdzeniem odwrotnym do poprzedniego.

- **Przykład**
Nie każde twierdzenie odwrotne (hipoteza) jest prawdziwe. Np. „twierdzenie" odwrotne do twierdzenia:

$$\bigwedge_{f} (\text{funkcja } f \text{ ma pochodną w } x_0) \Longrightarrow (\text{funkcja } f \text{ jest ciagła w } x_0)$$

jest fałszywe. Np. funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w $x_0 = 0$, ale nie ma tam pochodnej. Natomiast twierdzenie odwrotne do twierdzenia:

$$\bigwedge_{n\in N} (\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez } 3) \Longrightarrow \left(\begin{array}{l}\text{suma cyfr rozwinięcia dziesiętnego}\\ \text{liczby } n \text{ jest podzielna przez } 3\end{array}\right)$$

jest prawdziwe.

- **Przykład**
Jeżeli X jest zbiorem obiektów matematycznych (liczb, ciągów, funkcji itp.), a twierdzenie ma postać

$$\bigwedge_{x\in X} Z(x) \Longrightarrow T(x),$$

to z faktu, że założenie Z nie jest spełnione dla pewnego $x_0 \in X$ nie wynika jeszcze, że zdanie $T(x_0)$ jest fałszywe. Np. w twierdzeniu

$$\bigwedge_{n\in N} (\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez } 6) \Longrightarrow (\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez } 3).$$

liczba naturalna $n = 9$ nie spełnia jego założenia, jednakże spełnia tezę, gdyż jest podzielna przez 3.

- **Definicja** („porównywanie" twierdzeń)
Mówimy, że twierdzenie

$$\bigwedge_{x\in X} Z_1(x) \Longrightarrow T_1(x)$$

jest „mocniejsze" od twierdzenia

$$\bigwedge_{x\in X} Z_2(x) \Longrightarrow T_2(x),$$

gdy przy „mniejszych wymaganiach" od elementu x daje „ więcej informacji" o nim, tzn. gdy spełniony jest warunek:

$$\bigwedge_{x\in X} Z_2(x) \Longrightarrow Z_1(x) \quad \text{lub} \quad \bigwedge_{x\in X} T_1(x) \Longrightarrow T_2(x).$$

- **Przykład**
Twierdzenie:

$$\bigwedge_{n\in N} (\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez } 8) \Longrightarrow (\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez } 4)$$

jest „mocniejsze" od twierdzenia:

$$\bigwedge_{n\in N} (\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez } 16) \Longrightarrow (\text{liczba } n \text{ jest podzielna przez } 2).$$

- **Definicja** *(dowód)*
Dowodem twierdzenia nazywamy skończony ciag prawdziwych zdań logicznych, który wychodząc od aksjo:matów, wprowadzonych definicji lub też wcześniej udowodnionych twierdzeń, prowadzi do danego twierdzenia.

Uwaga. Wyróżnia się dowody twierdzeń:

a) wprost, w których, korzystając z praw logiki, z założenia wyprowadza się tezę;

b) nie wprost, który polega na zaprzeczeniu dowodzonej tezy i uzyskaniu zdania fałszywego lub sprzecznego z przyjetym założeniam.

Aby pokazać, że hipoteza postaci

$$\bigwedge_{x\in X} Z(x) \Longrightarrow T(x)$$

jest fałszywa wystarczy wskazać element $x_0 \in X$, dla którego zdanie

$$Z(x_0) \wedge \left[\sim T(x_0)\right]$$

jest prawdziwe. Element ten (liczbę, funkcję) nazywamy wtedy *kontrprzykładem* dla tej hipotezy. Podobnie, aby uzasadnić, że hipoteza postaci

$$\bigvee_{x \in X} W(x)$$

jest fałszywa należy pokazać, że zdanie

$$\bigwedge_{x \in X} [\sim W(x)]$$

jest prawdziwe.

Jednym ze sposobów dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych jest zasada indukcji matematycznej.

- **Twierdzenie** *(zasada indukcji matematycznej)*
  Niech $T(n)$ oznacza formę zdaniową zmiennej $n \in \boldsymbol{N}$. Jeżeli:
  i) zdanie $T(1)$ jest prawdziwe oraz
  ii) $\bigwedge_{n \in N}$ prawdziwa jest implikacja $T(n) \Longrightarrow T(n+1)$,
  to forma zdaniowa $T(n)$ jest prawdziwa dla dowolnej liczby naturalnej n.

Elementy teorii mnogości

Zbiory składają się z elementów. Zbiory będzimy oznaczali dużymi literami alfabetu. Fakt, że x jest elementem zbioru A zapisujemy symbolicznie w postaci $x \in A$. Natomiast, jeżeli y nie jest elementem tego zbioru, to piszemy $y \notin A$. Zbiory będziemy określali przez wyliczenie ich elementów albo przez podanie warunku W, który mają spełniać jego elementy x. Piszemy wtedy

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}, \quad \{x_1, x_2, x_3, \ldots\} \quad \text{albo} \quad \{x : W(x)\}.$$

Zbiór, który nie ma żadnego elementu nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy przez $\emptyset$.

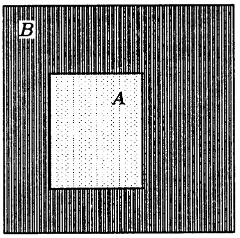
- **Przykład**

$$\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}, \qquad \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \qquad \{x : x \in \boldsymbol{R} \wedge 0 \leqslant x < 5\}.$$

- **Definicja** *(podzbiór)*
  Jeżeli każdy element zbioru A jest jednocześnie elementem zbioru B, to mówimy, że A jest podzbiorem zbioru B. Fakt ten zapisujemy symbolicznie w postaci $A \subset B$. Mamy zatem

$$A \subset B \Longleftrightarrow \bigwedge_{x} \Big[(x \in A) \Longrightarrow (x \in B)\Big].$$

Jeśli przy tym $A \neq B$, to mówimy, że A jest *podzbiorem właściwym* zbioru B. Oczywiście $\emptyset \subset A$ oraz $A \subset A$ dla każdego zbioru A.



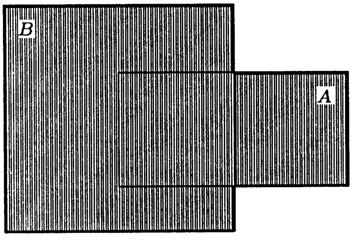
Rys. 1. Zawieranie zbiorów.

- **Definicja** *(suma mnogościowa)*

Sumą mnogościową zbiorów A i B nazywamy zbiór, który składa się z wszystkich elementów zbioru A oraz wszystkich elementów zbioru B. Sumę zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \cup B$. Mamy zatem

$$(x \in A \cup B) \iff \Big[(x \in A) \vee (x \in B)\Big].$$

W podobny sposób określa się sumę mnogościową większej liczby zbiorów.



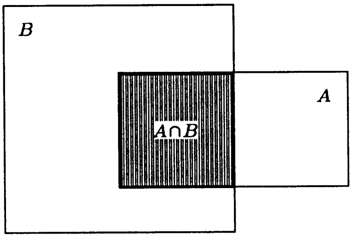
Rys. 2. Suma mnogościowa zbiorów.

- **Definicja** *(iloczyn mnogościowy)*

Iloczynem mnogościowym zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony tylko z elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B. Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \cap B$. Mamy zatem

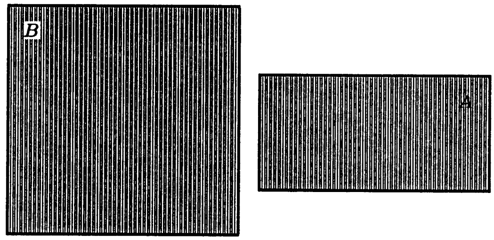
$$(x \in A \cap B) \iff \Big[(x \in A) \wedge (x \in B)\Big].$$

W podobny sposób określa się iloczyn mnogościowy większej liczby zbiorów.



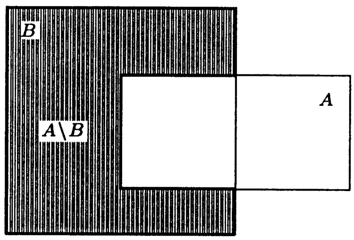
Rys. 3. Iloczyn mnogościowy zbiorów.

- **Definicja** *(zbiory rozłączne)*
  Mówimy, że zbiory A i B są rozłączne, gdy ich iloczyn jest zbiorem pustym; $A \cap B = \emptyset$.



Rys. 4. Zbiory rozłączne.

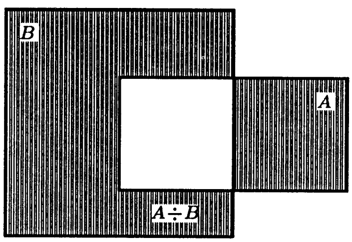
- **Definicja** *(różnica mnogościowa)*
  Różnicą mnogościową zbiorów A i B nazywamy zbiór złożony tylko z tych elementów zbioru A, które nie należą do B. Różnicę zbiorów A i B oznaczamy przez $A \setminus B$.



Rys. 5. Różnica mnogościowa zbiorów.

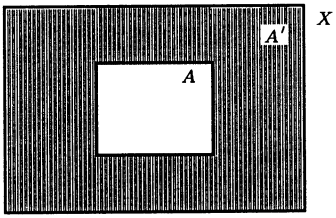
- **Definicja** *(różnica symetryczna)*
  Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Różnicę symetryczną zbiorów A i B oznaczamy przez $A \div B$. Oczywiście dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi równość

$$A \div B = B \div A.$$



Rys. 6. Różnica symetryczna zbiorów.

- **Definicja** *(dopełnienie)*
Niech X będzie ustalonym zbiorem zwanym przestrzenią oraz niech A będzie dowolnym podzbiorem tej przestrzeni. Dopełnieniem zbioru A względem przestrzeni X nazywamy zbiór $X \setminus A$ i oznaczamy go symbolem A'. Oczywiście $(A')' = A$. Ponadto $\emptyset' = X$ i $X' = \emptyset$.

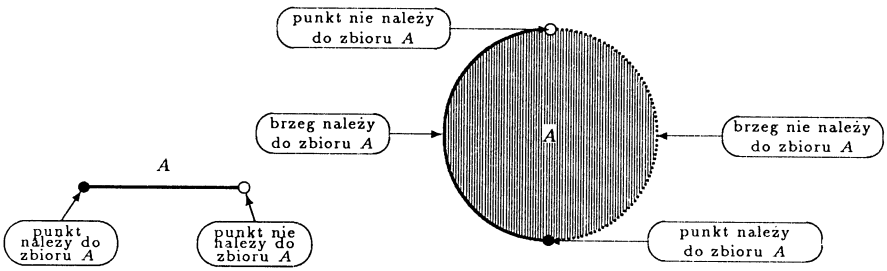


Rys. 7. Dopełnienie zbioru.

Własności działań na zbiorach

Własność	Nazwa
$A \cup B = B \cup A$	przemienność dodawania zbiorów
$A \cap B = B \cap A$	przemienność mnożenia zbiorów
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	prawo de Morgana dla sumy zbiorów
$(A \cap B)' = A' \cup B'$	prawo de Morgana dla iloczynu zbiorów
$(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$	rozdzielność dodawania względem mnożenia zbiorów
$(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$	rozdzielność mnożenia względem dodawania zbiorów
$A \subset B \Longleftrightarrow B' \subset A'$	
$\left[(A \subset B) \wedge (B \subset C)\right] \Longrightarrow (A \subset C)$	przechodniość zawierania zbiorów
$\left[(A \subset B) \wedge (B \subset A)\right] \Longleftrightarrow (A = B)$	warunek równoważny równości zbiorów
$A \cap A' = \emptyset, \quad A \cup A' = X$	

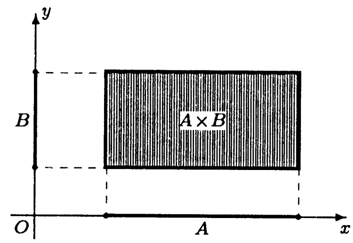
Uwaga. Będziemy stosowali następujace sposoby oznaczania przynależności punktów brzegowych do zbiorów na prostej i na płaszczyźnie:



- **Definicja** *(iloczyn kartezjański)*

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (x, y), dla których $x \in A$ oraz $y \in B$. Iloczyn kartezjański zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \times B$. Mamy zatem

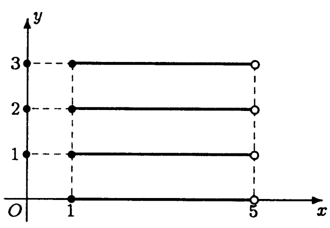
$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$



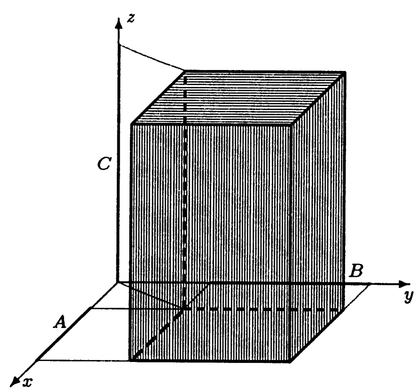
Rys. 8. Iloczyn kartezjański zbiorów.

W podobny sposób określa się iloczyn kartezjański większej liczby zbiorów. Jeżeli $A = B$, to zamiast $A \times A$ będziemy pisali A^2 np. $\boldsymbol{R}^2 \stackrel{def}{=} \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$.

- **Przykład**



produkt $[1, 5) \times \{1, 2, 3\}$.



produkt $A \times B \times C$.

Literatura

1. A.Białynicki-Birula, *Algebra liniowa z geometrią,* PWN, Warszawa 1976.
2. G.Birkhoff, S.Mac Lane, *Przegląd algebry współczesnej,* PWN, Warszawa 1960.
3. H.T.Burgess, *On the matrix equation $AX=B$*, American Mathematical Monthly, vol. 23 (1916), str. 152-155.
4. Z.Furdzik, J.Maj-Kluskowa, A.Kulczycka, M.Sękowska, *Nowoczesna matematyka dla inżynierów*, Cz. I, *Algebra*, Wydawnictwo Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków 1998.
5. J.Gancarzewicz, *Algebra liniowa z elementami geometrii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1998.
6. I.M.Gelfand, *Wykłady z algebry liniowej,* PWN, Warszawa 1976.
7. B.Gleichgewicht, *Algebra, Podręcznik dla kierunków nauczycielskich studiów matematycznych*, PWN, Warszawa 1976.
8. M.Grzesiak, *Liczby zespolone i algebra liniowa*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1999.
9. T.Huskowski, H.Korczowski, H.Matuszczyk, *Algebra liniowa,* Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1992.
10. T.Jankowski, *Linear Algebra*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 1997.
11. A.I.Kostrykin, J.I.Manin, *Algebra liniowa i geometria,* PWN, Warszawa 1993.
12. A.Kiełbasiński, H.Schetlick, *Numeryczna algebra liniowa,* PWN, Warszawa 1992.
13. J.Knop, *Geometria*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Częstochowie, Częstochowa 1998.
14. F.Leja, *Geometria analityczna,* PWN, Warszawa 1970.
15. A.Mostowski, M.Stark, *Elementy algebry wyższej,* PWN, Warszawa 1970.

16. Z.Opial, *Algebra wyższa,* PWN, Warszawa 1970.

17. E.Piegat, *Wektory i geometria,* PZWS, Warszawa 1964.

18. W.Sierpiński, *Zasady algebry wyższej,* PTM, Warszawa–Wrocław 1951.

19. A.Sołtysiak, *Algebra liniowa,* Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1996.

20. T.Świrszcz, *Algebra liniowa z geometrią analityczną,* Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1990.

21. T.Trajdos, *Matematyka, cz. III,* WNT, Warszawa, 1993.

22. W.Więsław, *Liczby i geometria,* WSiP, Warszawa 1996.

Skorowidz

Księgarnie prowadzące sprzedaż książek naszego wydawnictwa

Księgarnia DOM KSIĄŻKI
Politechnika Białostocka
15-351 **Białystok**, ul. Wiejska 45C

Księgarnia Akademii Bydgoskiej
85-064 **Bydgoszcz**, ul. Chodkiewicza 30

Księgarnia ELEKTRA
Politechnika Częstochowska
42-200 **Częstochowa**, ul. Dekabrystów 26/30

Księgarnia KOLIBER
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
42-200 **Częstochowa**, ul. Waszyngtona 4/8

Księgarnia Wydawnictwa PG
Politechnika Gdańska
80-952 **Gdańsk**, ul. Narutowicza 11/12

Księgarnia KALLIMACH
Biblioteka Główna Uniwersytetu Gdańskiego
81-824 **Sopot**, ul. Armii Krajowej 119/121

Księgarnia LITERKA
Uniwersytet Gdański
80-952 **Gdańsk-Oliwa**, ul. Wita Stwosza 55

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Gliwice**, ul. Akademicka 2, 7, 16

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Katowice**, ul. Krasińskiego 8

Księgarnia OR PAN
Uniwersytet Śląski
40-007 **Katowice**, ul. Bankowa 11

Księgarnia STACHURSKI
Politechnika Świętokrzyska
25-314 **Kielce**, al. 1000-lecia P.P. 7b

Księgarnia Akademicka ŚWIATOWID
25-315 **Kielce**, ul. Starodomaszowska 30

Księgarnia Naukowa
Politechnika Koszalińska
75-620 **Koszalin**, ul. Racławicka 15-17

Sprzedaż Uczelnianych Wydawnictw
Akademia Górniczo-Hutnicza
30-059 **Kraków**, al. Mickiewicza 30

Księgarnia
Politechnika Krakowska
31-155 **Kraków**, ul. Warszawska 24

Księgarnia ACADEMICUS
Akademia Pedagogiczna
30-084 **Kraków**, ul. Podchorążych 2

Główna Księgarnia Naukowa
31-118 **Kraków**, ul. Podwale 6

Księgarnia Naukowo-Techniczna
Politechnika Lubelska
20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 36

Księgarnia SINUS
Politechnika Lubelska
20-618 **Lublin**, ul. Nadbystrzycka 40

Księgarnia Uniwersytecka
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
20-031 **Lublin**, pl. Curie-Skłodowskiej 5

Księgarnia MERITUM
Politechnika Łódzka
90-924 **Łódź**, ul. Żwirki 36

Księgarnia PRUSZYŃSKI BEZ SPÓŁKI
Uniwersytet Łódzki
90-938 **Łódź**, ul. Matejki 34/38

Księgarnia ŻAK
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
10-718 **Olsztyn**, ul. Oczapowskiego 6

Księgarnia TECHNICZNA
Politechnika Opolska
45-271 **Opole**, ul. Sosnkowskiego 31

Księgarnia AKADEMICKA
Uniwersytet Opolski
45-058 **Opole**, ul. Kośnego 45

Księgarnia Akademicka
Filia Politechniki Warszawskiej
00-271 **Płock**, pl. Łukasiewicza 17

Księgarnia Uniwersytecka
Uniwersytet Adama Mickiewicza
60-813 **Poznań**, ul. Zwierzyniecka 7

Księgarnia Naukowa KAPITAŁKA
61-725 **Poznań**, ul. Mielżyńskiego 27/29

Księgarnia Techniczna DOM KSIĄŻKI
61-888 **Poznań**, ul. Półwiejska 14

Sklep papierniczy
Politechnika Poznańska
61-141 **Poznań**, ul. Kórnicka 30
(osiedle akademickie Piotrowo)

Księgarnia Akademii Ekonomicznej
61-895 **Poznań**, ul. Powstańców Wielkopolskich 16

Księgarnia EKONOMIK
Politechnika Radomska
26-600 **Radom**, ul. Chrobrego 31 i 42

Księgarnia UNKA
Politechnika Rzeszowska
35-329 **Rzeszów**, al. Powstańców Warszawy 8

Księgarnia Akademicka LIBRA
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
35-310 **Rzeszów**, ul. Rejtana 16c

Kiosk-Księgarnia
Politechnika Szczecińska
70-311 **Szczecin**, al. Piastów 48

Uniwersytecka Księgarnia Naukowa
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
87-100 **Toruń**, ul. Reja 25

Księgarnia Naukowa OR PAN
Pałac Kultury i Nauki
00-901 **Warszawa**

Księgarnia Naukowa OR PAN – BIS
00-818 **Warszawa**, pl. Twarda 51/55

Księgarnia Studencka
Politechnika Warszawska
00-661 **Warszawa**, pl. Politechniki 1

Księgarnia Studencka
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego
02-787 **Warszawa**, ul. Nowoursynowska 161

Księgarnia
Szkoła Główna Handlowa
02-554 **Warszawa**, al. Niepodległości 162

Księgarnia POLITECHNIKA
Politechnika Wrocławska (bud. A-1)
50-370 **Wrocław**, wyb. Wyspiańskiego 27

Księgarnia TECH
Politechnika Wrocławska (bud. D-1)
50-377 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 13

Księgarnia-Ksero ADUŚ
Instytut Matematyczny UWr.
50-314 **Wrocław**, pl. Grunwaldzki 2/4

Kiosk-Księgarnia
Akademia Rolnicza
50-357 **Wrocław**, ul. Grunwaldzka 53

Księgarnia ZETKA
Akademia Ekonomiczna
53-345 **Wrocław**, ul. Komandorska 118/120

Księgarnia Wydawnictwa PŚ
Politechnika Śląska
44-100 **Zabrze**, ul. Roosevelta 26

Księgarnia WSP
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
65-625 **Zielona Góra**, al. Wojska Polskiego 69

•

Internetowa Księgarnia Akademicka
www.ika.edu.pl

Księgarnia Internetowa MERLIN
www.merlin.com.pl

Księgarnia Internetowa UNIVERSITAS
www.universitas.com.pl

Księgarnia Internetowa KAPITAŁKA
www.kapitalka.com.pl