

## Funkcje i pochodne.

**zad. 1.** Znaleźć dziedzinę funkcji:

$$(1) f(x) = \frac{4x}{x+2} \quad (2) f(x) = \frac{6x+4}{2x-3} \quad (3) f(x) = \frac{5x^2+4}{x^2-9} \quad (4) f(x) = \frac{3x^2-2}{x^2-4}$$
$$(5) f(x) = \sqrt{4-2x} \quad (6) f(x) = \sqrt{7-3x} \quad (7) f(x) = \sqrt{x^2-9} \quad (8) f(x) = \sqrt{x^2-4}.$$

**zad. 2.** Dane są funkcje  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sin x$ ,  $h(x) = e^x$ ,  $m(x) = \ln x$ .

Wyznaczyć  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ ,  $f \circ h$ ,  $h \circ f$ ,  $f \circ m$ ,  $m \circ f$ ,  $g \circ h$ ,  $h \circ g$ ,  $g \circ m$ ,  $m \circ g$ .

**zad. 3.** Rozłóżć dane funkcje na podstawowe funkcje elementarne:

$$(1) y = \cos(2x+1) \quad (2) y = \sqrt{2x+1} \quad (3) y = \frac{1}{(x-2)^3} \quad (4) y = \frac{1}{\cos x^2}$$
$$(5) y = (3x-2)^5 \quad (6) y = e^{2x-3} \quad (7) y = \ln(4x-3) \quad (8) y = \sin^2 3x.$$

**zad. 4.** Wyznaczyć funkcje odwrotne

$$(1) y = f(x) = 2x+4 \quad (2) y = f(x) = 3x^2, x > 0$$
$$(3) y = f(x) = 0,5 \cdot 2^x \quad (4) y = f(x) = 2 \log(x+1), x > -1.$$

**zad. 5.** Obliczyć:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{x+2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-3}{x+4} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x-2} \quad (4) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2-10}{x+4}$$
$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} \quad (5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} \quad (6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-2x-8}{x^2-9x+20} \quad (8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-8x+15}{x^2-9}$$
$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-1}{x-1} \quad (10) \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt{x}-5}{x-25} \quad (11) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \quad (12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$$
$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3 \sin 2x} \quad (14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{4x} \quad (15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2 \operatorname{tg} 5x} \quad (16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

**zad. 6.** Zbadać ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x+5}, & x \neq -5 \\ -5, & x = -5 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & x \neq 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ x+2, & x \geq 0. \end{cases}$$

**zad. 7.** Dla jakich wartości parametrów  $a$  i  $b$  funkcja jest ciągła?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ x^2 - b, & x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - a, & x < 0 \\ 3, & x = 0 \\ \frac{\sin bx}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

**zad. 8.** Obliczyć pochodne funkcji:

- |                                   |                                     |                                  |
|-----------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| (1) $f(x) = 5x$                   | (2) $f(x) = 2x^2$                   | (3) $f(x) = -4x^3$               |
| (4) $f(x) = \frac{1}{x}$          | (5) $f(x) = \frac{3}{x^2}$          | (6) $f(x) = \frac{-2}{x^3}$      |
| (7) $f(x) = \sqrt{x}$             | (8) $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$           | (9) $f(x) = \sqrt[4]{x}$         |
| (10) $f(x) = \sqrt{x^3}$          | (11) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$         | (12) $f(x) = x\sqrt{x}$          |
| (13) $f(x) = x^3\sqrt{x}$         | (14) $f(x) = x\sqrt[3]{x}$          | (15) $f(x) = 2x + 3$             |
| (16) $f(x) = 7x^2 - 3x + 2$       | (17) $f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ | (18) $f(x) = (2x + 1)(3x - 4)$   |
| (19) $f(x) = (4x - 3)(5x + 2)$    | (20) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$     | (21) $f(x) = \frac{4x-3}{5x+2}$  |
| (22) $f(x) = (2x + 7)^9$          | (23) $f(x) = (3x^2 - 5x + 8)^7$     | (24) $f(x) = \sqrt{4x - 7}$      |
| (25) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 6}$ | (26) $f(x) = x^2 \sin x$            | (27) $f(x) = 2x^3 \cos x$        |
| (28) $f(x) = e^{2x}$              | (29) $f(x) = e^{3x+1}$              | (30) $f(x) = e^{x^2-3x}$         |
| (31) $f(x) = \ln(3x - 1)$         | (32) $f(x) = \ln(-x^2 + 7)$         | (33) $f(x) = \ln(2x^3 - 4x + 2)$ |

**zad. 9.** Dla podanych poniżej funkcji wyznaczyć:

- (1) dziedzinę funkcji,
- (2) miejsca zerowe funkcji i punkty przecięcia z osią  $OY$ ,
- (3) granice funkcji na końcach przedziałów określoności,
- (4) asymptoty funkcji,
- (5) przedziały monotoniczności,
- (6) ekstrema lokalne,
- (7) przedziały wypukłości i wklęsłości,
- (8) punkty przegięcia,
- (9) tabelkę (na podstawie wyników z poprzednich zadań) oraz naszkicować wykres funkcji:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2, & \text{b)} & f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 8, \\
\text{c)} & f(x) = \frac{2x-3}{x+1}, & \text{d)} & f(x) = \frac{3x-1}{2x+1}, \\
\text{e)} & f(x) = \frac{1}{1+x^2}, & \text{f)} & f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \\
\text{g)} & f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}, & \text{h)} & f(x) = x + \frac{4}{x-5}, \\
\text{i)} & f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}, & \text{j)} & f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x}.
\end{array}$$

**zad. 10.** Obliczyć granice z zadania 5 wykorzystując regułę de l'Hospitala (tam, gdzie jest to możliwe).

**zad. 11.** Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego funkcji podanych poniżej.

$$f(x, y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x,$$

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1,$$

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - x + 4y - 5,$$

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 6xy - 3y^2 - 15x - 15y,$$

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1,$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 5.$$

**zad. 12.** Zbadać ekstrema funkcji z poprzedniego zadania.