Teresa Jurlewicz   Zbigniew Skoczylas

# ALGEBRA LINIOWA 1

## Przykłady i zadania

Wydanie dziewiąte zmienione

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2003

*Projekt okładki*
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej



*Printed in Poland.*

Skład wykonano w systemie LaTeX.



ISBN 83-89020-15-7

Wydanie IX zmienione, Wrocław 2003
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., tel. (0-71) 357 85 65, e-mail: gis@kom-net.pl
Druk: TINTA Sp. z o.o., tel. (0-71) 325 17 88, e-mail: tinta@tinta.wroc.pl

# Spis treści

# Wstęp

Niniejszy zbiór zadań jest drugą częścią zestawu podręczników do algebry. Pierwszą częścią tego zestawu jest książka pt. *„Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory”*, a trzecią książka pt. *„Algebra liniowa 1. Kolokwia i egzaminy”*. Podręczniki te są przeznaczone dla studentów politechnik. Mogą z nich korzystać także studenci akademii ekonomicznych, pedagogicznych i rolniczych oraz niektórych wydziałów uniwersytetów.

Opracowanie obejmuje liczby zespolone, wielomiany, macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych oraz geometrię analityczną. Zbiór zawiera przykłady z pełnymi rozwiązaniami oraz podobne zadania przeznaczone do samodzielnej pracy. Podpunkty zadań oznaczone początkowymi literami alfabetu są z reguły najprostsze. Nierozwiązane w podręczniku zadania tworzą listę zadań. Lista ta powinna być przerabiana przez studentów samodzielnie lub na ćwiczeniach. Odpowiedzi i wskazówki do wszystkich zadań z listy podane są na końcu zbioru. Materiał teoretyczny niezbędny do rozwiązywania zadań można znaleźć w książce pt. *„Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory”*.

W obecnym wydaniu podręcznika zrezygnowano z podziału tygodniowego przykładów i zadań, zastępując go podziałem tematycznym według książki *„Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory”*. Ponadto poprawiono zauważone błędy i usterki.

Dziękujemy bardzo Panom dr. hab. Krzysztofowi Bogdanowi oraz dr. Markowi Wilhelmowi za informacje o błędach i usterkach z poprzedniego wydania i sugestie na przyszłość. Dziękujemy także Koleżankom i Kolegom z Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej oraz naszym Studentom za uwagi o podręczniku.

*Teresa Jurlewicz*
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
teresa.jurlewicz@pwr.wroc.pl

*Zbigniew Skoczylas*
Instytut Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.wroc.pl

# 1

# Liczby zespolone

## Przykłady

### Postać algebraiczna i sprzężenie liczby zespolonej

**• Przykład 1.1**

Wykonać podane działania:

**a)** $(-2+3i)+(7-8i)$; **b)** $(4i-3)-(1+10i)$;

**c)** $(\sqrt{2}+i)\cdot(3-\sqrt{3}i)$; **d)** $\dfrac{2-3i}{5+4i}$.

**Rozwiązanie**

Działania na liczbach zespolonych w postaci algebraicznej wykonujemy tak, jak na wielomianach zmiennej $i$, pamiętając o warunku $i^2=-1$.

**a)** Mamy $(-2+3i)+(7-8i)=(-2+7)+(3-8)i=5-5i$.

**b)** Mamy $(4i-3)-(1+10i)=(-3-1)+(4-10)i=-4-6i$.

**c)** Mamy

$$\left(\sqrt{2}+i\right)\cdot\left(3-\sqrt{3}i\right)=\sqrt{2}\cdot 3-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}i+3i-\sqrt{3}i^2=\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{6}\right)i.$$

$3\sqrt{2}$ $\quad -\sqrt{6}$ $\quad +3$ $\quad -\sqrt{3}$

**d)** Mamy

$$\frac{2-3i}{5+4i}=\frac{(2-3i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)}=\frac{10-8i-15i+12i^2}{25-16i^2}=\frac{-2-23i}{41}=-\frac{2}{41}-\frac{23}{41}i.$$

**• Przykład 1.2**

Znaleźć liczby rzeczywiste $x, y$ spełniające podane równania:

**a)** $x(2+3i)+y(4-5i)=6-2i$;

**b)** $(x-i)\cdot(2-yi)=11-23i$;

**c)** $\dfrac{x}{2-3i}+\dfrac{y}{3+2i}=1$.

**Rozwiązanie**
W rozwiązaniu wykorzystamy fakt mówiący, że dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są równe ich części rzeczywiste i urojone, tzn.

$$z_1 = z_2 \iff \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

**a)** Mamy

$$x(2+3i) + y(4-5i) = (2x+4y) + (3x-5y)i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $x(2+3i)+y(4-5i) = 6-2i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6, \\ 3x - 5y = -2. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 1$, $y = 1$.

**b)** Mamy

$$(x-i)\cdot(2-yi) = (2x-y) + (-2-xy)i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $(x-i)(2-yi) = 11-23i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 11, \\ -2 - xy = -23. \end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań:

$$\begin{cases} y = 2x - 11, \\ -2 - x(2x-11) = -23 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x - 11, \\ 2x^2 - 11x - 21 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x - 11, \\ x = 7 \text{ lub } x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 7, \\ y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}, \\ y = -14. \end{cases}$$

**c)** Mamy

$$\frac{x}{2-3i} + \frac{y}{3+2i} = \frac{x(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} + \frac{y(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$$
$$= \frac{2x+3xi}{13} + \frac{3y-2yi}{13} = \frac{2x+3y}{13} + \frac{3x-2y}{13}i.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $\dfrac{x}{2-3i} + \dfrac{y}{3+2i} = 1$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{13} = 1, \\[2mm] \dfrac{3x-2y}{13} = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x = 2$, $y = 3$.

## • Przykład 1.3

W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

**a)** $z^2 + 3\overline{z} = 0$; **b)** $2z + (1+i)\overline{z} = 1 - 3i$;

**c)** $z^2 - z + 1 = 0$; **d)** $\dfrac{z+1}{\overline{z}-1} = -1$;

**e)** $(z+\overline{z})+i(z-\overline{z})=2i-6$; **f)** $(i-3)z=5+i-z$;

**g)** $\dfrac{1-3i}{3z+2i}=\dfrac{2i-3}{5-2iz}$; **h*)** $z^4-4iz^3-6z^2+4iz+1=0$.

**Rozwiązanie**

**a)** Niech $z=x+iy$, gdzie $x,y\in\boldsymbol{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} z^2+3\overline{z} &= (x+iy)^2+3\overline{(x+iy)}=x^2-y^2+2xyi+3x-3yi \\ &= x^2-y^2+3x+(2xy-3y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $z^2+3\overline{z}=0$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x^2-y^2+3x=0, \\ 2xy-3y=0. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny kolejno układom

$$\begin{cases} x^2-y^2+3x=0 \\ y(2x-3)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2+3x=0 \\ y=0 \text{ lub } x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{3}{2}\sqrt{3} \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2}\sqrt{3} \end{cases}.$$

Równanie $z^2+3\overline{z}=0$ ma zatem cztery rozwiązania:

$$z_1=0,\ z_2=-3,\ z_3=\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right),\ z_4=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right).$$

**b)** Niech $z=x+iy$, gdzie $x,y\in\boldsymbol{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} 2z+(1+i)\overline{z} &= 2(x+iy)+(1+i)(x-iy)=2x+2iy+x-iy+ix+y \\ &= (3x+y)+(x+y)i. \end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $2z+(1+i)\overline{z}=1-3i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 3x+y &= 1, \\ x+y &= -3. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $x=2$, $y=-5$. Zatem $z=2-5i$.

**c) I sposób**. W rozwiązaniu wykorzystamy wzory na pierwiastki równania kwadratowego $az^2+bz+c=0$, gdzie $a,b,c\in\boldsymbol{C}$ oraz $a\neq 0$ :

$$z_1=\frac{-b-\delta}{2a},\quad z_2=\frac{-b+\delta}{2a}.$$

W tych wzorach $\delta$ jest jedną z liczb zespolonych spełniających warunek $\delta^2=\Delta=b^2-4ac$. Dla równania kwadratowego $z^2-z+1=0$ mamy $\Delta=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2$. Zatem

$$z_1=\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\quad z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}.$$

**II sposób.** Wyrażenie $z^2 - z + 1$ przekształcamy do postaci kanonicznej, a następnie zapisujemy jako różnicę kwadratów otrzymując

$$z^2-z+1 = \left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \left(z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0.$$

Stąd $z_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $z_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$.

**d)** Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$. Wtedy dla $\overline{z} \neq 1$ mamy

$$\frac{z+1}{\overline{z}-1} = -1 \iff z+1 = -\overline{z}+1 \iff (x+1)+iy = (-x+1)+iy.$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron tego równania, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x+1 = -x+1, \\ y = y. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są pary $x = 0$, $y \in \boldsymbol{R}$. Zatem rozwiązaniem równania $\dfrac{z+1}{\overline{z}-1} = -1$ są liczby zespolone postaci $z = iy$, gdzie $y \in \boldsymbol{R}$. Oczywiście liczby te spełniają warunek $\overline{z} \neq 1$.

**e)** Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$. Wtedy

$$(z+\overline{z})+i(z-\overline{z}) = [(x+iy)+(x-iy)]+i[(x+iy)-(x-iy)) = 2x+i\cdot 2iy = 2(x-y).$$

Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równania $(z+\overline{z})+i(z-\overline{z}) = 2i-6$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2(x-y) = -6, \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Jest to układ sprzeczny, zatem rozważane równanie nie ma rozwiązań.

**f)** Przekształcamy rozważane równanie do postaci

$$(i-3+1)z = 5+i.$$

Stąd wynika, że

$$z = \frac{5+i}{-2+i} = \frac{(5+i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-9-7i}{5}.$$

**g)** Dla $z \neq -\dfrac{2}{3}i$ oraz $z \neq -\dfrac{5}{2}i$ rozważane równanie jest równoważne równaniu

$$(1-3i)(5-2iz) = (3z+2i)(2i-3).$$

Stąd wynika, że

$$5-2iz-15i-6z = 6iz-9z-4-6i,$$

a więc

$$z(-2i-6-6i+9) = (-5+15i-4-6i).$$

Zatem

$$z = \frac{-9+9i}{3-8i} = \frac{(-9+9i)(3+8i)}{(3-8i)(3+8i)} = \frac{-99-45i}{73} = -\frac{99}{73}-\frac{45}{73}i.$$

**h*)** W rozwiązaniu wykorzystamy wzór

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

gdzie $a, b \in C$. Równanie $z^4 - 4iz^3 - 6z^2 + 4iz + 1 = 0$ jest zatem równoważne równaniu $(iz+1)^4 = 0$. Stąd $iz + 1 = 0$, czyli $z = i$.

## Przykład 1.4

Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb $z$ spełniających podane warunki:

**a)** $\operatorname{Im}[(1+2i)z - 3i] < 0$; **b)** $\operatorname{Re}(z-i)^2 \geqslant 0$;

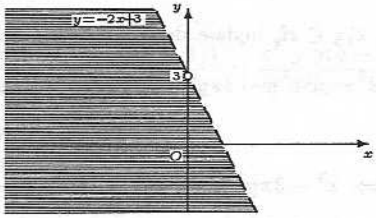
**c)** $z^2 = 2\operatorname{Re}(iz)$; **d)** $\operatorname{Re}(z^3) \geqslant \operatorname{Im}(z^3)$.

**Rozwiązanie**

**a)** Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in R$, będzie dowolną liczbą zespoloną. Wówczas

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}[(1+2i)z - 3i] < 0 &\iff \operatorname{Im}[(1+2i)(x+iy) - 3i] < 0\\ &\iff \operatorname{Im}[(x-2y) + (2x+y-3)i] < 0\\ &\iff 2x + y - 3 < 0\\ &\iff y < -2x + 3.\end{aligned}$$

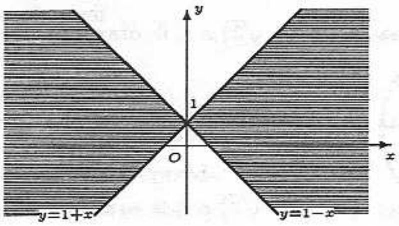
Poszukiwany zbiór jest półpłaszczyzną otwartą, bez prostej $y = -2x+3$ (zobacz rysunek).




**b)** Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in R$, będzie dowolną liczbą zespoloną. Wówczas

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z-i)^2 \geqslant 0 &\iff \operatorname{Re}\left[(x+iy-i)^2\right] \geqslant 0 \iff \operatorname{Re}[x + i(y-1)]^2 \geqslant 0\\ &\iff \operatorname{Re}\left[x^2 - (y-1)^2 + 2x(y-1)i\right] \geqslant 0 \iff x^2 - (y-1)^2 \geqslant 0\\ &\iff x^2 \geqslant (y-1)^2 \iff |x| \geqslant |y-1|.\end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór jest sumą dwóch obszarów kątowych ograniczonych prostymi $y = 1-x$, $y = 1+x$, łącznie z tymi prostymi (zobacz rysunek).



**c)** Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$, będzie dowolną liczbą zespoloną. Wówczas

$$\begin{aligned} z^2 = 2\,\mathrm{Re}\,(iz) &\iff (x+iy)^2 = 2\,\mathrm{Re}\,[i(x+iy)] \\ &\iff x^2 - y^2 + i2xy = 2\,\mathrm{Re}\,[-y + ix] \\ &\iff x^2 - y^2 + i2xy = -2y \end{aligned}$$

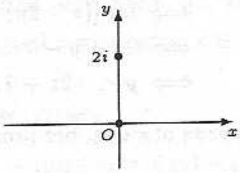
Ostatnia równość jest równoważna układowi równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2y, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest kolejno równoważny układom równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y = 0 \\ x = 0 \text{ lub } y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 - 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2. \end{cases}$$

Poszukiwany zbiór składa się zatem z dwóch punktów $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$ (zobacz rysunek).




**d)** Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$, będzie dowolną liczbą zespoloną. Wówczas

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right).$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\left(z^3\right) \geqslant \mathrm{Im}\,\left(z^3\right) &\iff x^3 - 3xy^2 \geqslant 3x^2y - y^3 \iff x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y \geqslant 0 \\ &\iff (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) - 3xy(x+y) \geqslant 0 \\ &\iff (x+y)\left(x^2 - 4xy + y^2\right) \geqslant 0 \\ &\iff (x+y)\left[(y-2x)^2 - 3x^2\right] \geqslant 0 \\ &\iff (y+x)\left[y - \left(2+\sqrt{3}\right)x\right]\left[y - \left(2-\sqrt{3}\right)x\right] \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest równoważna alternatywie warunków:

$$y + x \geqslant 0 \text{ oraz } y - \left(2+\sqrt{3}\right)x \geqslant 0 \text{ oraz } y - \left(2-\sqrt{3}\right)x \geqslant 0$$

lub

$$y + x \geqslant 0 \text{ oraz } y - \left(2+\sqrt{3}\right)x \leqslant 0 \text{ oraz } y - \left(2-\sqrt{3}\right)x \leqslant 0$$

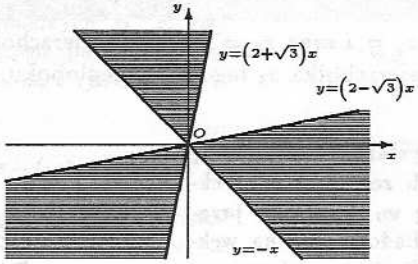
lub

$$y + x < 0 \text{ oraz } y - \left(2+\sqrt{3}\right)x \geqslant 0 \text{ oraz } y - \left(2-\sqrt{3}\right)x \leqslant 0$$

lub

$$y + x < 0 \text{ oraz } y - \left(2+\sqrt{3}\right)x \leqslant 0 \text{ oraz } y - \left(2-\sqrt{3}\right)x \geqslant 0.$$

Rozwiązanie tej nierówności przedstawiono na rysunku.




**Uwaga.** W dalszej części książki przedstawimy krótszy sposób rozwiązywania zadań tego typu (patrz **Przykład 1.13**).

## Przykład 1.5

Naszkicować zbiór wszystkich liczb zespolonych $z$, dla których liczba $w = \frac{z}{z+i}$ jest:

**a)** rzeczywista; **b)** czysto urojona.

**Rozwiązanie**

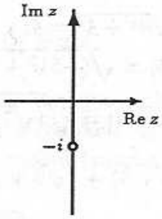
Zauważmy najpierw, że $z \neq -i$. Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbf{R}$. Przedstawiamy liczbę $w$ w postaci

$$w = \frac{x+iy}{x+i(y+1)} = \frac{(x+iy)(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2} = \frac{x^2+y(y+1)}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{-x}{x^2+(y+1)^2}.$$

**a)** Liczba $w$ jest rzeczywista wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Im} w = 0$. Warunek ten oznacza, że

$$\operatorname{Im} w = \frac{-x}{x^2+(y+1)^2} = 0,$$

tzn. $x = 0$. Szukany zbiór jest osią urojoną bez punktu $-i$ (rysunek obok).



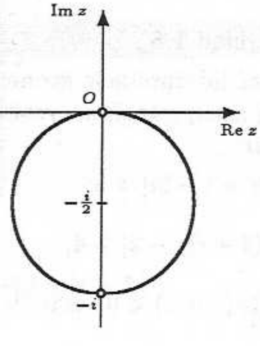

**b)** Liczba $w$ jest czysto urojona wtedy i tylko wtedy, gdy $w \neq 0$ oraz $\operatorname{Re} w = 0$. Stąd $z \neq 0$ oraz

$$\operatorname{Re} w = \frac{x^2+y^2+y}{x^2+(y+1)^2} = 0.$$

Mamy zatem $x^2 + y^2 + y = 0$, czyli

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Jest to równanie okręgu o środku w punkcie $z_0 = -\frac{i}{2}$ i promieniu $r = \frac{1}{2}$. Z poprzednich rozważań wynika, że z okręgu tego należy wykluczyć punkty 0 oraz $-i$. Szukany zbiór przedstawiono na rysunku obok.

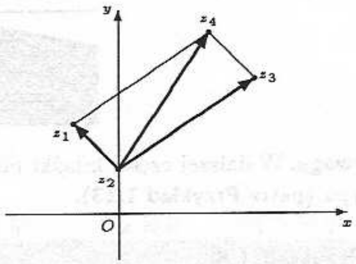


**Przykład 1.6**

Punkty $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = i$ oraz $z_4 = 2 + 4i$ są wierzchołkami równoległoboku. Wyznaczyć położenie wierzchołka $z_3$ tego równoległoboku.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy interpretację geometryczną sumy liczb zespolonych. Wektor reprezentujący sumę $w_1 + w_3$ jest przekątną równoległoboku zbudowanego na wektorach reprezentujących liczby zespolone $w_1$ i $w_3$. Zatem szukany wierzchołek tego równoległoboku spełnia warunek $z_4 - z_2 = (z_1 - z_2) + (z_3 - z_2)$. Stąd $z_3 = z_4 - z_1 + z_2 = (2 + 4i) - (-1 + 2i) + i = 3 + 3i$.




## Moduł i argument liczby zespolonej

**Przykład 1.7**

Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych:

**a)** $4i$; **b)** $12i - 5$; **c)** $\sqrt{7} + \sqrt{29}i$;

**d)** $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) i$; **e)** $\sin\alpha + i\cos\alpha$, gdzie $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

**Rozwiązanie**

Moduł liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$, jest określony wzorem $|z| \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$. Zatem

**a)** $|4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$;

**b)** $|12i - 5| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$;

**c)** $\left|\sqrt{7} + \sqrt{29}i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{29}\right)^2} = \sqrt{36} = 6$;

**d)** $\left|\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right) i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$;

**e)** $|\sin\alpha + i\cos\alpha| = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sqrt{1} = 1$.

**Przykład 1.8**

Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych $z$ spełniających podane warunki:

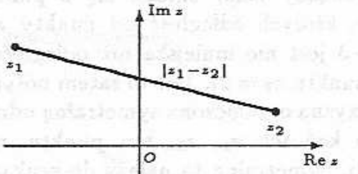
**a)** $|z + 1 - 2i| = 3$; **b)** $2 \leqslant |z + i| < 4$;

**c)** $|(1 + i)z - 2| \geqslant 4$; **d)** $\left|\dfrac{z + 3}{z - 2i}\right| \geqslant 1$;

**e)** $\operatorname{Re}(z + 1) < 0$ oraz $|i - z| \leqslant 3$; **f)** $|z^2 + 4| \leqslant |z - 2i|$.

**Rozwiązanie**

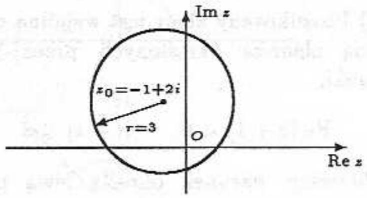
Moduł różnicy liczb zespolonych $z_1$, $z_2$ jest długością odcinka łączącego punkty $z_1$, $z_2$ płaszczyzny zespolonej (zobacz rysunek).




**a)** Mamy

$$|z+1-2i| = 3 \Longleftrightarrow |z-(-1+2i)| = 3.$$

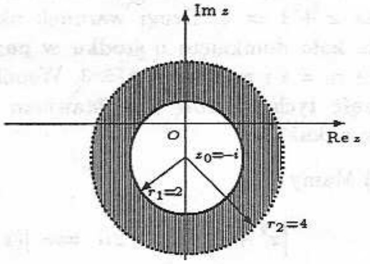
Szukany zbiór składa się z punktów $z$ położonych w odległości $r = 3$ od punktu $z_0 = -1+2i$. Jest to zatem okrąg o środku w punkcie $z_0 = -1+2i$ i promieniu $r = 3$ (zobacz rysunek).




**b)** Mamy

$$2 \leqslant |z+i| < 4 \Longleftrightarrow 2 \leqslant |z-(-i)| < 4.$$

Szukany zbiór składa się z punktów $z$ położonych w odległości nie mniejszej niż $r_1 = 2$ od punktu $z_0 = -i$ oraz w odległości mniejszej niż $r_2 = 4$ od tego punktu. Jest to zatem pierścień kołowy o środku w punkcie $z_0 = -i$ promieniu wewnętrznym $r_1 = 2$ i promieniu zewnętrznym $r_2 = 4$. Okrąg o promieniu $r_1 = 2$ należy do tego pierścienia, a okrąg o promieniu $r_2 = 4$ nie należy do niego (zobacz rysunek).

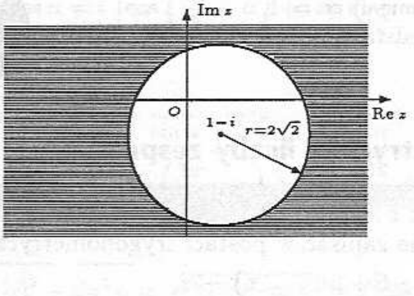



**c)** Mamy

$$|(1+i)z-2| \geqslant 4 \Longleftrightarrow \left|(1+i)\cdot\left(z-\frac{2}{1+i}\right)\right| \geqslant 4 \Longleftrightarrow |1+i|\cdot|z-(1-i)| \geqslant 4$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{2}|z-(1-i)| \geqslant 4 \Longleftrightarrow |z-(1-i)| \geqslant 2\sqrt{2}.$$

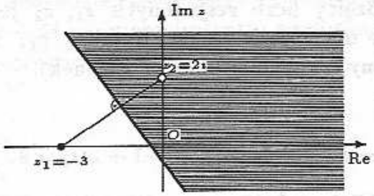
Szukany zbiór składa się z punktów $z$ położonych w odległości nie mniejszej niż $r = 2\sqrt{2}$ od punktu $z_0 = 1-i$. Jest to zatem zewnętrze koła o środku w punkcie $z_0 = 1-i$ i promieniu $r = 2\sqrt{2}$. Okrąg o promieniu $r = 2\sqrt{2}$ należy do tego zbioru (zobacz rysunek).




**d)** Dla $z \neq 2i$ mamy

$$\left|\frac{z+3}{z-2i}\right| \geqslant 1 \Longleftrightarrow |z+3| \geqslant |z-2i| \Longleftrightarrow |z-(-3)| \geqslant |z-2i|.$$

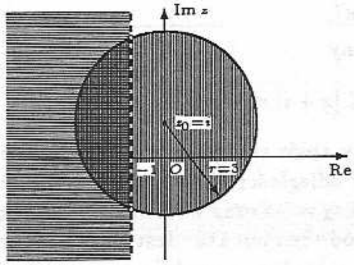
Szukany zbiór składa się z punktów $z$, których odległość od punktu $z_1 = -3$ jest nie mniejsza niż odległość od punktu $z_2 = 2i$. Jest to zatem półpłaszczyzna ograniczona symetralną odcinka o końcach $z_1$, $z_2$, bez punktu $z_2 = 2i$. Symetralna ta należy do szukanego zbioru (zobacz rysunek).




**e)** Poszukiwany zbiór jest wspólną częścią zbiorów określonych przez warunki:

$$\operatorname{Re}(z+1) < 0, \qquad |i - z| \leqslant 3.$$

Pierwszy warunek określa lewą półpłaszczyznę otwartą ograniczoną prostą $x + 1 = 0$. Drugi warunek określa koło domknięte o środku w punkcie $z_0 = i$ i promieniu $r = 3$. Wspólną część tych zbiorów przedstawiono na rysunku.




**f)** Mamy

$$\left|z^2+4\right| \leqslant |z-2i| \iff |(z+2i)\cdot(z-2i)| \leqslant |z-2i|$$
$$\iff |z+2i|\cdot|z-2i| \leqslant |z-2i|$$
$$\iff |z-2i| = 0 \text{ albo } |z-2i| > 0 \text{ oraz } |z+2i| \leqslant 1.$$

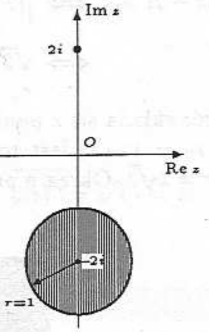
Warunek

$$|z-2i| = 0$$

wyznacza zbiór $\{2i\}$, a warunki

$$|z+2i| \leqslant 1 \text{ oraz } |z-2i| > 0$$

określają koło domknięte o środku w punkcie $z_0 = -2i$ i promieniu $r = 1$. Sumę tych zbiorów przedstawiono na rysunku.




## Postać trygonometryczna liczby zespolonej

● **Przykład 1.9**

Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

**a)** $-\sqrt{5}$; **b)** $-6+6i$; **c)** $-2i$; **d)** $\sqrt{3}+i$;

**e)** $\sin\alpha - i\cos\alpha$; **f)** $1 - i\operatorname{ctg}\alpha$; **g*)** $1+\cos\alpha + i\sin\alpha$.

**Uwaga**. W ćwiczeniach **e)**, **f*)**, **g)** kąt $\alpha$ spełnia nierówności $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

**Rozwiązanie**

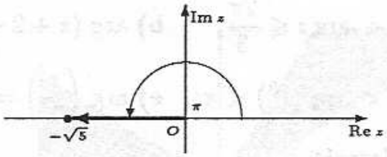
Każdą liczbę zespoloną $z$ można zapisać w postaci trygonometrycznej:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie $r$ jest modułem, a $\varphi$ argumentem liczby $z$.

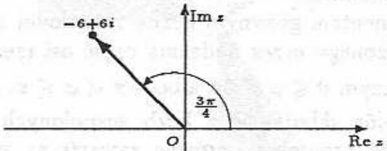
**a)** Dla $z = -\sqrt{5}$ mamy $r = \sqrt{5}$ oraz $\varphi = \pi$. Zatem

$$-\sqrt{5} = \sqrt{5}(\cos\pi + i\sin\pi).$$



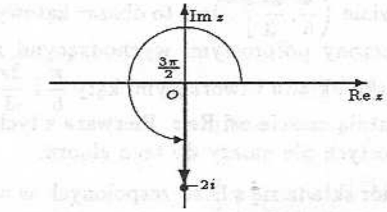

**b)** Dla $z = -6 + 6i$ mamy $r = 6\sqrt{2}$ oraz $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Zatem

$$-6+6i = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$



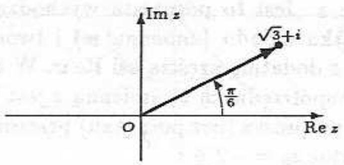

**c)** Dla $z = -2i$ mamy $r = 2$ oraz $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Zatem

$$-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$




**d)** Dla $z = \sqrt{3} + i$ mamy $r = 2$. Stąd $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, więc $\arg z = \varphi = \frac{\pi}{6}$. Zatem

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$




**e)** Dla $z = \sin\alpha - i\cos\alpha$ mamy $r = 1$. Stąd $\cos\varphi = \sin\alpha$, $\sin\varphi = -\cos\alpha$. Więc $\arg z = \varphi = \frac{3\pi}{2} + \alpha$. Zatem

$$\sin\alpha - i\cos\alpha = 1\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right].$$

**f)** Dla $z = 1 - i\operatorname{ctg}\alpha$ mamy

$$r = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{|\sin\alpha|} = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{oraz} \quad z = \frac{1}{\sin\alpha}(\sin\alpha - i\cos\alpha).$$

Zatem $\varphi = \frac{3\pi}{2} + \alpha$, stąd $z = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\right]$.

**g*)** Dla $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ mamy

$$r = \sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{2(1+\cos\alpha)} = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$$

oraz

$$z = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Zatem $\arg z = \varphi = \frac{\alpha}{2}$, stąd $z = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

## Przykład 1.10

Narysować zbiory liczb zespolonych $z$ spełniających podane warunki:

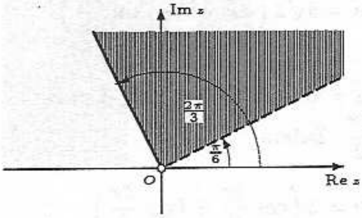
**a)** $\frac{\pi}{6} < \arg z \leqslant \frac{2\pi}{3}$; **b)** $\arg(z + 2 - i) = \pi$; **c)** $\pi \leqslant \arg[(-1+i)z] \leqslant \frac{3\pi}{2}$;

**d)** $\frac{\pi}{2} < \arg(z^3) < \pi$; **e)** $\arg\left(\frac{i}{z}\right) = \frac{3\pi}{4}$; **f)** $\frac{2\pi}{3} \leqslant \arg(3i - z) \leqslant \frac{5\pi}{6}$.

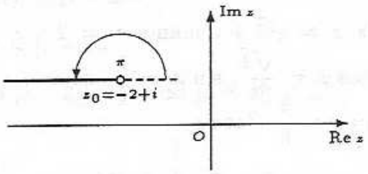
**Rozwiązanie**

Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy miarę $\varphi$ kąta zorientowanego, utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej $\operatorname{Re} z$ oraz promień wodzący liczby $z$, przy czym $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ albo $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Ponadto $\arg 0 \stackrel{def}{=} 0$.

**a)** Zbiór składa się z liczb zespolonych, których argumenty główne zawarte są w przedziale $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$. Jest to obszar kątowy ograniczony półprostymi wychodzącymi z początku układu i tworzącymi kąty $\frac{\pi}{6}$ i $\frac{2\pi}{3}$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} z$. Pierwsza z tych półprostych nie należy do tego zbioru.




**b)** Zbiór składa się z liczb zespolonych $w = z - (-2 + i)$, których argumenty główne są równe $\pi$. Jest to półprosta wychodząca z początku układu (zmienna $w$) i tworząca kąt $\pi$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} w$. W układzie współrzędnych ze zmienną $z$ jest to ta sama półprosta (bez początku) przesunięta o wektor $z_0 = -2 + i$.




**c)** W rozwiązaniu wykorzystamy wzór $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$, gdzie $z_1, z_2 \in C \setminus \{0\}$. Ponieważ $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$, więc nierówność

$$\pi \leqslant \arg[(-1+i)z] \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

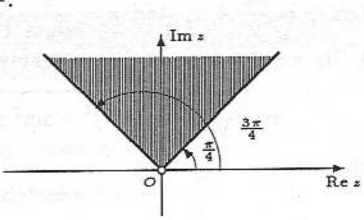
jest równoważna nierówności

$$\pi \leqslant \frac{3\pi}{4} + \arg z + 2k\pi \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

dla pewnych $k \in \mathbf{Z}$. Ale $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, więc $k = 0$. Stąd otrzymamy

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{4}.$$

Szukany zbiór jest domkniętym obszarem kątowym ograniczonym półprostymi wychodzącymi z punktu $O$ (bez tego punktu) i tworzącymi kąty $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} z$.

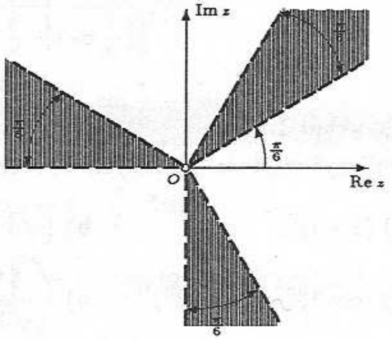


**d)** W rozwiązaniu wykorzystamy wzór $\arg\left(z^n\right) = n\cdot \arg z + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$, gdzie $z \in C$ oraz $n \in N$. Nierówność $\frac{\pi}{2} < \arg\left(z^3\right) < \pi$ jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{\pi}{2} < 3\cdot \arg z + 2k\pi < \pi$$

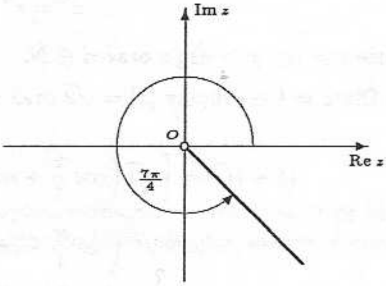
dla pewnych $k \in \mathbf{Z}$. Stąd

$$\frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3} - \frac{2k\pi}{3}.$$




Ale $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, więc powyższa nierówność ma sens tylko dla $k = 0$, $k = -1$ lub $k = -2$. Wtedy przyjmuje ona postać $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ lub $\frac{5}{6}\pi < \arg z < \pi$ lub $\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{5}{3}\pi$. Szukany zbiór składa się z trzech otwartych obszarów kątowych (bez początku układu).

**e)** W rozwiązaniu wykorzystamy wzór $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$, gdzie $z_1, z_2 \in C$ oraz $z_2 \neq 0$. Ponieważ $\arg i = \frac{\pi}{2}$, więc równość $\arg\left(\frac{i}{z}\right) = \frac{3\pi}{4}$ jest równoważna równości




$$\frac{\pi}{2} - \arg z + 2k\pi = \frac{3\pi}{4}$$

dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$. Ale $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, więc $k = 1$. Stąd $\arg z = \frac{7\pi}{4}$. Szukanym zbiorem jest półprosta (bez początku) wychodząca z punktu ) i tworząca kąt $\frac{7\pi}{4}$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} z$.

**f)** W rozwiązaniu wykorzystamy wzór $\arg(-z) = \arg z + \pi + 2k\pi$, dla pewnego $k \in \mathbf{Z}$, gdzie $z \in C$. Nierówność

$$\frac{2\pi}{3} \leqslant \arg(3i - z) \leqslant \frac{5\pi}{6}$$

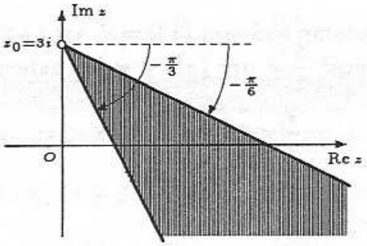
jest więc równoważna nierówności

$$\frac{2\pi}{3} \leqslant \arg(z - 3i) + \pi + 2k\pi \leqslant \frac{5\pi}{6} \quad \text{dla pewnych } k \in \mathbf{Z}.$$

Ale $0 \leqslant \arg(z - 3i) < 2\pi$, więc powyższa nierówność ma sens tylko dla $k = -1$, stąd otrzymujemy zależność

$$\frac{5\pi}{3} \leqslant \arg(z - 3i) \leqslant \frac{11\pi}{6}.$$

Otrzymana nierówność określa domknięty obszar kątowy o wierzchołku w punkcie $z_0 = 3i$ (bez tego wierzchołka), ograniczony półprostymi tworzącymi kąty $-\frac{\pi}{3}$ oraz $-\frac{\pi}{6}$ z dodatnią częścią osi $\operatorname{Re} z$.




## • Przykład 1.11

Obliczyć wartości podanych wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

**a)** $(1+i)^7$; **b)** $\left(\sqrt{3}-i\right)^{32}$; **c)** $(-2+2i)^8$;

**d)** $(\cos 33^0 + i\sin 33^0)^{10}$; **e)** $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$; **f)** $\left(-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)^{14}$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy wzór de Moivre'a

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right),$$

gdzie $r=|z|$, $\varphi = \arg z$ oraz $n \in N$.

**a)** Dla $z=1+i$ mamy $|z|=\sqrt{2}$ oraz $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$. Zatem

$$(1+i)^7 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$
$$= 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8-8i.$$

**b)** Dla $z=\sqrt{3}-i$ mamy $|z|=2$ oraz $\arg z = \dfrac{11\pi}{6}$. Zatem

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{32} = \left[2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]^{32} = 2^{32}\left(\cos\frac{176\pi}{3}+i\sin\frac{176\pi}{3}\right)$$
$$= 2^{32}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{32}\left(-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 2^{32}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{31}\left(i\sqrt{3}-1\right).$$

**c)** Dla $z=-2+2i$ mamy $|z|=2\sqrt{2}$ oraz $\arg z = \dfrac{3\pi}{4}$. Zatem

$$(-2+2i)^8 = \left[2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^8 = 2^{12}(\cos 6\pi + i\sin 6\pi) = 2^{12}(\cos 0 + i\sin 0) = 2^{12}.$$

**d)** Dla $z=\cos 33^0 + i\sin 33^0$ mamy $|z|=1$ oraz $\arg z = 33^0$. Zatem

$$\left(\cos 33^0 + i\sin 33^0\right)^{10} = 1^{10}\left(\cos 330^0 + i\sin 330^0\right) = \cos 30^0 - i\sin 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

**e)** Dla $z_1 = 1 - i$ mamy $|z_1| = \sqrt{2}$ oraz $\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$, a dla $z_2 = \sqrt{3} + i$ mamy $|z_2| = 2$ oraz $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$. Zatem

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^6 = \frac{(1-i)^6}{\left(\sqrt{3}+i\right)^6} = \frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^6}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6}$$

$$= \frac{2^3\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)}{2^6\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}}{-2^3} = -\frac{i}{8}.$$

**f)** Dla $z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$ mamy $|z| = 1$ oraz $\arg z = \pi - \frac{\pi}{7}$. Zatem

$$\left(-\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{14} = \left[1\left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7}\right)\right]^{14} = 1^{14}\left(\cos 12\pi + i\sin 12\pi\right) = 1.$$

## • Przykład 1.12

Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

**a)** $\cos 3x$ przez funkcję $\cos x$;

**b)** $\sin 6x$ przez funkcje $\sin x$ i $\cos x$;

**c*)** $\text{ctg}4x$ przez funkcję $\text{ctg}x$.

### Rozwiązanie

**a)** Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i\sin x)^3$ wykorzystując dwa wzory: wzór de Moivre'a oraz wzór dwumianowy Newtona. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^3 &= (\cos x)^3 + \binom{3}{1}(\cos x)^2(i\sin x) + \binom{3}{2}(\cos x)(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\ &= \left(\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x\right) + i\left(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right).\end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste prawych stron obu równości otrzymamy

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos x\left(\cos^2 x - 3\sin^2 x\right) \\ &= \cos x\left(\cos^2 x - 3 + 3\cos^2 x\right) = \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right).\end{aligned}$$

**b)** Obliczymy wartość wyrażenia $(\cos x + i\sin x)^6$ wykorzystując dwa wzory: wzór de Moivre'a oraz wzór dwumianowy Newtona. Stosując wzór de Moivre'a otrzymamy równość

$$(\cos x + i\sin x)^6 = \cos 6x + i\sin 6x.$$

Z kolei ze wzoru dwumianowego Newtona wynika równość

$$(\cos x + i\sin x)^6 = (\cos x)^6 + \binom{6}{1}(\cos x)^5(i\sin x) + \binom{6}{2}(\cos x)^4(i\sin x)^2 + \binom{6}{3}(\cos x)^3$$
$$\times(i\sin x)^3 + \binom{6}{4}(\cos x)^2(i\sin x)^4 + \binom{6}{5}(\cos x)(i\sin x)^5 + (i\sin x)^6$$
$$= \cos^6 x + 6i\cos^5 x\sin x - 15\cos^4 \sin^2 x - 20i\cos^3 x\sin^3 x$$
$$+15\cos^2 x\sin^4 x + 6i\cos x\sin^5 x - \sin^6 x$$
$$= \left(\cos^6 x - 15\cos^4 x\sin^2 x + 15\cos^2 x\sin^4 x - \sin^6 x\right)$$
$$+i\left(6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x\right).$$

Porównując części urojone prawych stron obu równości otrzymamy

$$\sin 6x = 6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x.$$

**c*)** Podobnie jak poprzednio wyrazimy $\sin 4x$ i $\cos 4x$ przez $\sin x$ i $\cos x$. Ze wzoru dwumianowego Newtona mamy

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \left(\cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x\right) + i\left(4\cos^3 \sin x - 4\cos x\sin^3 x\right).$$

Z kolei ze wzoru de Moivre'a mamy $(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x$. Zatem

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x \quad \text{oraz} \quad \sin 4x = 4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x.$$

Stąd dla $x \neq \frac{k\pi}{4}$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$, mamy

$$\operatorname{ctg} 4x = \frac{\cos 4x}{\sin 4x} = \frac{\cos^4 x - 6\cos^2 \sin^2 x + \sin^4 x}{4\cos^3 \sin x - 4\cos x\sin^3 x} = \frac{\dfrac{\cos^4 x - 6\cos^2 \sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^4 x}}{\dfrac{4\cos^3 \sin x - 4\cos x\sin^3 x}{\sin^4 x}}$$
$$= \frac{\operatorname{ctg}^4 x - 6\operatorname{ctg}^2 x + 1}{4\operatorname{ctg}^3 x - 4\operatorname{ctg} x}.$$

## • Przykład 1.13

Narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:

**a)** $\operatorname{Re}\left(z^2\right) \geqslant 0$; **b)** $\operatorname{Im}\left(z^6\right) < 0$.

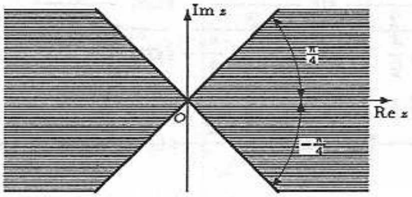
### Rozwiązanie

W rozwiązaniu wykorzystamy postać trygonometryczną liczby zespolonej oraz wzór de Moivre'a.

**a)** Dla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r \geqslant 0$ oraz $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ mamy

$$\operatorname{Re}\left(z^2\right) \geqslant 0 \iff \operatorname{Re}\left\{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2\right\} \geqslant 0$$
$$\iff \operatorname{Re}\left[r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\right] \geqslant 0$$
$$\iff r^2\cos 2\varphi \geqslant 0$$
$$\iff r = 0 \text{ lub } r > 0 \text{ i } \cos 2\varphi \geqslant 0$$
$$\iff r = 0 \text{ lub } r > 0 \text{ i } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right).$$

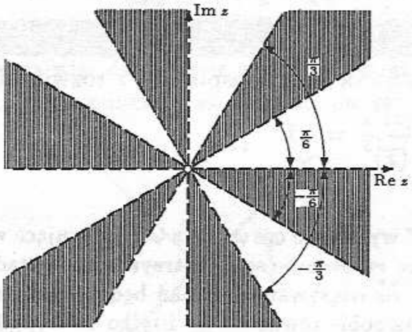
Poszukiwany zbiór składa się z dwóch domkniętych obszarów kątowych (zobacz rysunek).




**b)** Dla $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r \geqslant 0$ oraz $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, mamy

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(z^6\right) < 0 &\Longleftrightarrow \operatorname{Im}\left\{\left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^6\right\} < 0\\
&\Longleftrightarrow \operatorname{Im}\left[r^6(\cos 6\varphi + i\sin 6\varphi)\right] < 0 \Longleftrightarrow r^6 \sin 6\varphi < 0\\
&\Longleftrightarrow r > 0 \text{ i } \sin 6\varphi < 0\\
&\Longleftrightarrow r > 0 \text{ i } \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right)\\
&\qquad \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right).
\end{aligned}$$

Poszukiwany zbiór składa się z sześciu otwartych obszarów kątowych (rysunek).




## • Przykład* 1.14

Wykorzystując wzór na sumę wyrazów zespolonego ciągu geometrycznego obliczyć

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx, \quad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}.$$

**Rozwiązanie**

Niech $z = \cos x + i\sin x$. Wtedy $z^k = \cos kx + i\sin kx$, zatem $\cos kx = \operatorname{Re} z^k$ dla $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Stąd mamy

$$\begin{aligned}
1 + \cos x + \ldots + \cos nx &= \operatorname{Re}\left(1 + z + \ldots + z^n\right) = \operatorname{Re}\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\\
&= \operatorname{Re}\frac{1 - \cos(n+1)x - i\sin(n+1)x}{1 - \cos x - i\sin x}\\
&= \operatorname{Re}\frac{2\sin^2\dfrac{(n+1)x}{2} - 2i\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\cos\dfrac{(n+1)x}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2} - 2i\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \operatorname{Re} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\,\sin\frac{(n+1)x}{2} - i\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{x}{2} - i\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \operatorname{Re}\left(\sin\frac{(n+1)x}{2} - i\cos\frac{(n+1)x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2} + i\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \left(\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cos\frac{nx}{2}.$$

Ostatni rachunek jest prawdziwy dla $z \neq 1$, to znaczy dla $x \neq 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$. Dla $x = 2k\pi$ mamy $1 + \cos 2k\pi + \ldots + \cos n2k\pi = n + 1$.

## Postać wykładnicza liczby zespolonej

**• Przykład 1.15**

Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej $z$ rozwiązać podane równania:

**a)** $(\overline{z})^6 = 4\left|z^2\right|$; **b)** $\dfrac{|z|^2 z}{(\overline{z})^3} = -1$.

**Rozwiązanie**

Zastępując symbolem $e^{i\varphi}$ wyrażenie $\cos\varphi + i\sin\varphi$ występujące w postaci trygonometrycznej liczby zespolonej $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ otrzymamy postać wykładaniczą tej liczby, tzn. wzór $z = re^{i\varphi}$. Przy rozwiązywaniu równań będziemy korzystać z tego, że dwie niezerowe liczby zespolone są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich moduły są równe, a ich argumenty różnią się o wielokrotnoć $2\pi$, tzn. dla $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, $r_1, r_2 > 0$, mamy

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \text{ oraz } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

**a)** Liczba $z = 0$ spełnia równanie $(\overline{z})^6 = 4\left|z^2\right|$. Niech teraz $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Wówczas $\overline{z} = re^{-i\varphi}$ oraz, ze wzoru de Moivre'a, $(\overline{z})^6 = r^6 e^{-6i\varphi}$. Dalej $\left|z^2\right| = r^2$, a więc

$$(\overline{z})^6 = 4\left|z^2\right| \iff r^6 e^{-6i\varphi} = 4r^2 \iff r^6 e^{-6i\varphi} = 4r^2 e^{i\cdot 0}$$

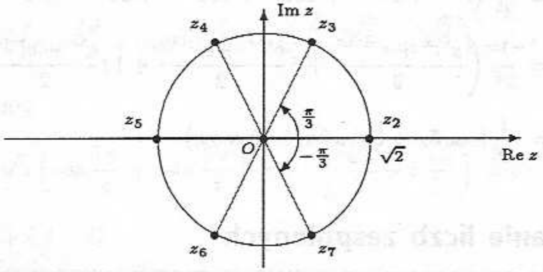
$$\iff \begin{cases} r^6 = 4r^2 \\ -6\varphi = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r = 0 \text{ lub } r = \sqrt{2} \\ \varphi = \dfrac{l\pi}{3},\ l = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Rozwiązaniami równania są zatem liczby

$$z_1 = 0,\ z_2 = \sqrt{2},\ z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i,\ z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i,\ z_5 = -z_2,\ z_6 = -z_3,\ z_7 = -z_4.$$

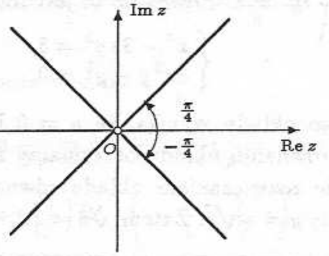
Są one przedstawione na rysunku poniżej.




**b)** Równoważnie możemy napisać, że $|z|^2 \cdot z = (-1) \cdot (\overline{z})^3$ dla $z \neq 0$. Niech $z = re^{i\varphi}$, gdzie $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Wówczas

$$\begin{aligned} |z|^2 \cdot z = (-1) \cdot (\overline{z})^3 &\iff r^2 \cdot \left(re^{i\varphi}\right) = e^{i\pi} \cdot \left(r^3 e^{-3i\varphi}\right) \\ &\iff r^3 e^{i\varphi} = r^3 e^{i(\pi - 3\varphi)} \\ &\iff \begin{cases} r^3 = r^3 \\ \varphi = \pi - 3\varphi + 2k\pi, \ k \in \mathbf{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} r \in (0, \infty), \\ \varphi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \ k = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwiązania równania tworzą więc dwie proste nachylone do osi rzeczywistej pod kątami $\frac{\pi}{4}$ oraz $-\frac{\pi}{4}$ i przechodzące przez punkt $O$, ale bez tego punktu (rysunek).




## • Przykład 1.16

Stosując wzory Eulera przedstawić $\cos^5 x$ w postaci sumy sinusów i cosinusów wielokrotności kąta $x$.

**Rozwiązanie**

Mamy $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Stosując teraz wzór dwumianowy Newtona otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos^5 x &= \frac{1}{2^5} \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^5 \\ &= \frac{1}{2^5} \left[ \binom{5}{0} \left(e^{ix}\right)^5 \left(e^{-ix}\right)^0 + \binom{5}{1} \left(e^{ix}\right)^4 \left(e^{-ix}\right)^1 + \binom{5}{2} \left(e^{ix}\right)^3 \left(e^{-ix}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \binom{5}{3} \left(e^{ix}\right)^2 \left(e^{-ix}\right)^3 + \binom{5}{4} \left(e^{ix}\right)^1 \left(e^{-ix}\right)^4 + \binom{5}{5} \left(e^{ix}\right)^0 \left(e^{-ix}\right)^5 \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{i5x} + e^{-i5x}}{2} + 5\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} + 10\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x).$$

## Pierwiastkowanie liczb zespolonych

• **Przykład 1.17**

Korzystając z definicji obliczyć podane pierwiastki:

**a)** $\sqrt{4i-3}$; **b)** $\sqrt[3]{8}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Niech $x+iy$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$, będzie szukanym pierwiastkiem. Wtedy $(x+iy)^2 = 4i-3$. Stąd $x^2 + 2ixy - y^2 = 4i - 3$. Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ 2xy \quad\;\; = 4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są pary liczb: $x = 1$, $y = 2$; $x = -1$, $y = -2$. Zatem $\sqrt{4i-3} = \{1+2i, -1-2i\}$.

**b)** Niech $x + iy$, gdzie $x, y \in \boldsymbol{R}$, będzie szukanym pierwiastkiem. Wtedy $(x + iy)^3 = 8$. Stąd $x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = 8$. Równanie to jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 8, \\ 3x^2y - y^3 = 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania tego układu wynika, że $y = 0$ lub $3x^2 = y^2$. Wykorzystując te zależności w pierwszym równaniu układu otrzymamy $x^3 = 8$ lub $-8x^3 = 8$. Stąd $x = 2$ lub $x = -1$. Ostatecznie rozwiązaniem układu równań są pary liczb: $x = 2$, $y = 0$; $x = -1$, $y = \sqrt{3}$; $x = -1$, $y = -\sqrt{3}$. Zatem $\sqrt[3]{8} = \{2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\}$.

• **Przykład 1.18**

Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

**a)** $\sqrt{-2i}$; **b)** $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$; **c)** $\sqrt[6]{1}$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy wzór na pierwiastki stopnia $n$ z liczby zespolonej $z \neq 0$ o argumencie $\varphi$. Wzór ten ma postać: $\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$, gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

**a)** Dla $z = -2i$ mamy $|z| = 2$ oraz $\arg z = \frac{3\pi}{2}$. Zatem

$$\sqrt{-2i} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right) : k = 0, 1\right\}.$$

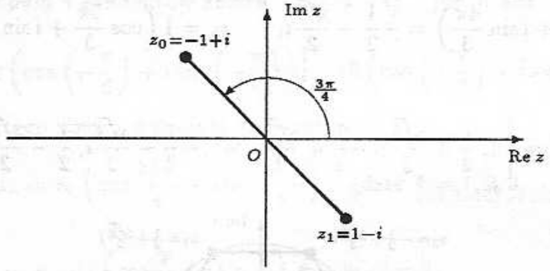
Dla $k=0$ mamy

$$z_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i.$$

Dla $k=1$ otrzymujemy

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1-i.$$

Zatem $\sqrt{-2i}=\{-1+i,1-i\}$.




**b)** Dla $z=-8+8\sqrt{3}i$ mamy $|z|=16$ oraz $\arg z=\dfrac{2\pi}{3}$. Zatem

$$\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}=\left\{\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right):k=0,1,2,3\right\}.$$

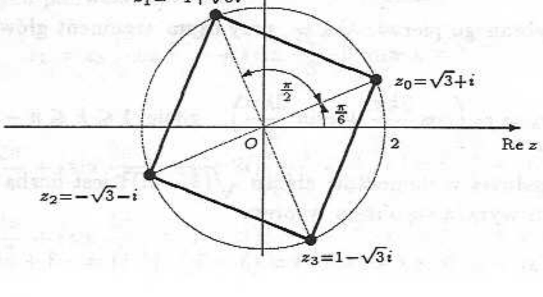
Tak więc dla $k=0,1,2,3$ mamy odpowiednio

$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}+i,$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i,$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i,$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\sqrt{3}i.$$



Stąd $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}=\left\{\sqrt{3}+i,-1+\sqrt{3}i,-\sqrt{3}-i,1-\sqrt{3}i\right\}$.

**c)** Dla $z=1$ mamy $|z|=1$ oraz $\arg z=0$. Zatem

$$\sqrt[6]{1}=\left\{\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{6}+i\sin\frac{0+2k\pi}{6}\right):k=0,1,\ldots,5\right\}.$$

Tak więc dla $k=0,1,2,3,4,5$ mamy odpowiednio

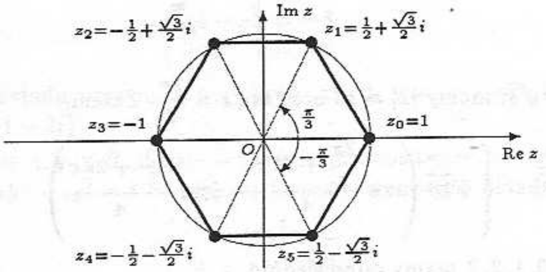
$$z_0=1(\cos 0+i\sin 0)=1,\qquad z_1=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_2=1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad z_3=1(\cos\pi+i\sin\pi)=-1,$$

$$z_4=1\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\qquad z_5=1\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ostatecznie

$$\sqrt[6]{1}=\left\{1,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$




## • Przykład 1.19

Odgadując jeden z elementów podanych pierwiastków obliczyć pozostałe elementy tych pierwiastków:

**a)** $\sqrt{(3-5i)^2}$; **b)** $\sqrt[3]{(1+i)^6}$; **c)** $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}}$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy wzór wyrażający elementy zbioru

$$\sqrt[n]{z}=\{z_0,z_1,\ldots,z_{n-1}\}$$

w zależności od wybranego pierwiastka $z_0$, przy czym argument główny $z_0$ niekoniecznie jest najmniejszy:

$$z_k=z_0\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),\quad\text{gdzie } 1\leqslant k\leqslant n-1.$$

**a)** Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt{(3-5i)^2}$ jest liczba $z_0=3-5i$. Drugi element tego zbioru wyraża się zatem wzorem

$$z_1=z_0(\cos\pi+i\sin\pi)=(3-5i)\cdot(-1)=-3+5i.$$

**b)** Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt[3]{(1+i)^6}$ jest liczba $z_0 = (1+i)^2 = 2i$. Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem

$$z_k = z_0\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), \text{ gdzie } k = 1, 2.$$

Zatem

$$z_1 = 2i\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i,$$

$$z_2 = 2i\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2i\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \sqrt{3} - i.$$

**c)** Zauważmy, że jednym z elementów zbioru $\sqrt[4]{\left(\sqrt{3}-i\right)^{12}}$ jest liczba

$$z_0 = \left(\sqrt{3}-i\right)^3 = \left[2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]^3 = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -8i.$$

Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem

$$z_k = z_0\left(\cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}\right), \text{ gdzie } k = 1, 2, 3.$$

Zatem

$$z_1 = -8i\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -8i \cdot i = 8,$$

$$z_2 = -8i\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -8i\cdot(-1) = 8i,$$

$$z_3 = -8i\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -8i\cdot(-i) = -8.$$

## Przykład 1.20

Jednym z wierzchołków trójkąta równobocznego jest punkt $z_0 = 1+2i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego trójkąta, jeżeli jego środkiem jest:

**a)** początek układu współrzędnych;

**b)** punkt $u = 6 - i$.

### Rozwiązanie

**a)** W rozwiązaniu wykorzystamy fakt mówiący, że zbiór pierwiastków stopnia $n \geqslant 3$ z liczby zespolonej $z \neq 0$ pokrywa się z wierzchołkami pewnego $n$-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w początku układu i promieniu $r = \sqrt[n]{|z|}$. Zatem znalezienie wierzchołków $z_1$, $z_2$ trójkąta równobocznego rozważanego w zadaniu, sprowadza się do wyznaczenia zbioru pierwiastków stopnia 3 z pewnej liczby zespolonej, gdy znana jest wartość jednego z tych pierwiastków, tzn. $z_0 = 1 + 2i$. Mamy

$$z_k = z_0\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right) \text{ dla } k = 1, 2.$$

Zatem

$$z_1 = (1+2i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = (1+2i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i,$$

$$z_2 = (1+2i)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = (1+2i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i.$$

**b)** Przesuwamy oba punkty tak, aby środek trójkąta znalazł się w początku układu współrzędnych. Wierzchołek $z_0$ znajdzie się wówczas w punkcie $z_0' = z_0 - u = -5 + 3i$. Pozostałe wierzchołki przesuniętego trójkąta można otrzymać teraz w taki sam sposób jak to pokazano w przykładzie **a)**, tzn. z zależności:

$$z_1' = (-5+3i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{5\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_2' = (-5+3i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{5\sqrt{3}}{2}i.$$

Wracamy do położenia początkowego i znajdujemy wierzchołki naszego trójkąta ze wzorów:

$$z_1 = z_1' + u = \frac{17}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{5\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = z_2' + u = \frac{17}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{5\sqrt{3}}{2}i.$$

## Przykład 1.21

Znaleźć rozwiązania podanych równań:

**a)** $z^6 = (2+4i)^6$; **b)** $(z-i)^4 = (z+i)^4$; **c)** $z^3 + 3z^2 + 3z = i - 1$.

**Rozwiązanie**

**a)** Zauważmy, że rozwiązanie równania $z^6 = (2+4i)^6$ sprowadza się do znalezienia zbioru pierwiastków 6-tego stopnia z liczby $(2+4i)^6$. Jednym z elementów tego zbioru jest oczywiście liczba $z_0 = 2 + 4i$. Pozostałe elementy tego zbioru wyrażają się wzorem:

$$z_k = z_0\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right), \text{ gdzie } 1 \leqslant k \leqslant 5.$$

Zatem

$$z_1 = (2+4i)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = (2+4i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - 2\sqrt{3} + \left(2+\sqrt{3}\right)i,$$

$$z_2 = (2+4i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = (2+4i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - 2\sqrt{3} + \left(-2+\sqrt{3}\right)i,$$

$$z_3 = (2+4i)(\cos\pi + i\sin\pi) = (2+4i)(-1) = -2 - 4i,$$

$$z_4 = (2+4i)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = (2+4i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + 2\sqrt{3} - \left(2+\sqrt{3}\right)i,$$

$$z_5 = (2+4i)\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = (2+4i)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + 2\sqrt{3} + \left(2-\sqrt{3}\right)i.$$

**b)** Oczywiście $z \neq -i$. Zatem nasze równanie ma równoważną postać $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$, która jest z kolei równoważna alternatywie równań

$$\frac{z-i}{z+i} = \omega_k,$$

gdzie $0 \leqslant k \leqslant 3$ oraz $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \sqrt[4]{1}$. Ponieważ $\sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\}$, zatem równania te przyjmują postać $z - i = z + i$ lub $z - i = -(z+i)$ lub $z - i = i(z+i)$ lub

$z - i = -i(z + i)$. Pierwsze z tych równań jest sprzeczne, a pozostałe mają odpowiednio rozwiązania $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$.

**c)** Równanie $z^3 + 3z^2 + 3z = i - 1$ można zapisać w postaci $(z+1)^3 = i$. Liczba $z+1$ jest zatem dowolnym elementem pierwiastka trzeciego stopnia z liczby $i$. Ponieważ

$$\sqrt[3]{i} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i \right\},$$

więc

$$z + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ lub } z + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ lub } z + 1 = -i.$$

Rozwiązaniami tych równań, a zatem i wyjściowego równania, są liczby

$$z_1 = -1 - i, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{1}{2}i.$$

# Zadania

## ○ Zadanie 1.1

Wykonać podane działania:

**a)** $(1 - 3i) + (4 - 5i)$; **b)** $(1 + \sqrt{2}i) - (\sqrt{3} - 6i)$;

**c)** $(\sqrt{7} - \sqrt{3}i) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3}i)$; **d)** $\dfrac{2 + 3i}{1 + i}$;

**e)** $z \cdot \overline{w}$, $\dfrac{z^2}{w}$, $\dfrac{z - w}{\overline{z} + \overline{w}}$, $\dfrac{\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} w}{z + w}$ dla $z = 5 - 2i$, $w = 3 + 4i$.

## ○ Zadanie 1.2

Znaleźć liczby rzeczywiste $x, y$ spełniające podane równania:

**a)** $x(2 + 3i) + y(5 - 2i) = -8 + 7i$; **b)** $(2 + yi) \cdot (x - 3i) = 7 - i$;

**c)** $\dfrac{1 + yi}{x - 2i} = 3i - 1$; **d)** $\dfrac{x + yi}{x - yi} = \dfrac{9 - 2i}{9 + 2i}$.

## ○ Zadanie 1.3

W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać podane równania:

**a)** $z^2 = 4\overline{z}$; **b)** $\dfrac{1 + i}{z} = \dfrac{2 - 3i}{\overline{z}}$; **c)** $z^2 - 4z + 13 = 0$;

**d)** $(z + 2)^2 = (\overline{z} + 2)^2$; **e)** $2z + \overline{z} = 6 - 5i$; **f)** $(1+i)z + 3(z - i) = 0$;

**g)** $\dfrac{2 + i}{z - 1 + 4i} = \dfrac{1 - i}{2z + i}$; **h)** $\overline{z + i} - z + i = 0$; **i*)** $z^3 - 6iz^2 - 12z + 8i = 0$.

## ○ Zadanie 1.4

Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb $z$ spełniających podane warunki:

**a)** $\operatorname{Re}(iz+2) \geqslant 0$; **b)** $\operatorname{Im} z^2 < 0$;

**c)** $\overline{z-i} = z-1$; **d)** $\dfrac{4}{z} = \overline{z}$;

**e)** $z\overline{z} + (5+i)z + (5-i)\overline{z} + 1 = 0$; **f)** $\operatorname{Im}\dfrac{1+iz}{1-iz} = 1$.

○ **Zadanie 1.5**

Niech $u = \dfrac{z+4}{z-2i}$, $v = \dfrac{z}{iz+4}$, gdzie $z \in \mathbf{C}$. Naszkicować zbiór wszystkich liczb zespolonych $z$, dla których:

**a)** liczba $u$ jest rzeczywista; **b)** liczba $u$ jest czysto urojona;

**c)** liczba $v$ jest rzeczywista; **d)** liczba $v$ jest czysto urojona.

○ **Zadanie 1.6**

Punkty $z_1$, $z_2$, $z_3$ płaszczyzny zespolonej są wierzchołkami trójkąta. Wyznaczyć położenie punktu przecięcia środkowych tego trójkąta.

Wskazówka. Wykorzystać fakt, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w stosunku 2 : 1 licząc od wierzchołka.

○ **Zadanie 1.7**

Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych:

**a)** $-\sqrt{3}i$; **b)** $6-8i$; **c)** $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3}i$;

**d)** $1 + i\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$; **e)** $\dfrac{1+3i}{3-4i}$.

○ **Zadanie 1.8**

Podać interpretację geometryczną modułu różnicy liczb zespolonych. Korzystając z tej interpretacji narysować zbiory liczb zespolonych $z$ spełniających podane warunki:

**a)** $|z-3+4i| = 1$; **b)** $\left|\dfrac{z-2i}{z+1}\right| = 1$; **c)** $2 \leqslant |iz-5| < 3$;

**d)** $|z+1-2i| \geqslant 3$ oraz $|z-3| < 4$; **e)** $\left|\dfrac{z+i}{z^2+1}\right| \geqslant 1$; **f)** $\sin(\pi|z+2i|) > 0$;

**g*)** $3|z+i| \leqslant |z^2+1| < 5|z-i|$; **h)** $|\overline{z} - 1 + 3i| \leqslant 5$.

○ **Zadanie 1.9**

Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

**a)** $7+7i$; **b)** $\sqrt{3} - i$; **c)** $-5+5\sqrt{3}i$;

**d)** $\sin\alpha + i\cos\alpha$; **e)** $-\cos\alpha + i\sin\alpha$; **f)** $1 + i\operatorname{tg}\alpha$.

**Uwaga.** W ćwiczeniach **d), e), f)** kąt $\alpha$ spełnia nierówności $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

○ **Zadanie 1.10**

Narysować zbiory liczb zespolonych $z$ spełniających podane warunki:

**a)** $\arg z = \dfrac{5\pi}{4}$; **b)** $\dfrac{\pi}{6} < \arg(z+3i) < \dfrac{\pi}{3}$;

**c)** $\pi \leqslant \arg(iz) < 2\pi$; **d)** $\arg\left(z^6\right) = \pi$;

**e)** $\dfrac{\pi}{3} \leqslant \arg(-z) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; **f*)** $\arg\left(\overline{z} - 1 - 2i\right) = \dfrac{3\pi}{2}$.

### ○ Zadanie 1.11

Obliczyć wartości podanych wyrażeń (wynik podać w postaci algebraicznej):

**a)** $(1-i)^{12}$; **b)** $\left(1+\sqrt{3}i\right)^8$; **c)** $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{30}$;

**d)** $\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{10}$; **e)** $\dfrac{(1+i)^{22}}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}$; **f)** $\left(\sin\dfrac{\pi}{6} + i\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^{24}$.

### ○ Zadanie 1.12

Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

**a)** $\sin 3x$ przez funkcję $\sin x$; **b)** $\cos 4x$ przez funkcje $\sin x$ i $\cos x$;

**c*)** $\operatorname{tg} 6x$ przez funkcję $\operatorname{tg} x$; **d*)** $\operatorname{ctg} 5x$ przez funkcję $\operatorname{ctg} x$.

### ○ Zadanie 1.13

Narysować zbiory liczb zespolonych $z$ spełniających podane warunki:

**a)** $\operatorname{Im}\left(z^3\right) < 0$; **b)** $\operatorname{Re}\left(z^4\right) \geqslant 0$;

**c)** $\operatorname{Im}\left(z^2\right) \geqslant \operatorname{Re}\left[\left(\overline{z}\right)^2\right]$; **d)** $\operatorname{Im}\dfrac{(1+i)\,z}{(1-i)\overline{z}} \geqslant 0$.

### ○ Zadanie* 1.14

Wykorzystując wzór na sumę wyrazów zespolonego ciągu geometrycznego obliczyć:

**a)** $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$; **b)** $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;

**c)** $\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$; **d)** $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x$;

**e)** $1 + (1-i) + (1-i)^2 + \ldots + (1-i)^n$;

**f)** $\dbinom{n}{0} - \dbinom{n}{2} + \dbinom{n}{4} - \ldots + (-1)^n\dbinom{n}{2m}$, gdzie $n \in N$ oraz $m = E\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

### ○ Zadanie 1.15

Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej rozwiązać podane równania:

**a)** $z^7 = \overline{z}$; **b)** $\overline{\left(z^4\right)} = z^2\left|z^2\right|$; **c)** $\left(\overline{z}\right)^2\left|z^2\right| = \dfrac{4}{z^2}$;

**d)** $|z|^3 = iz^3$; **e)** $z^6 = \left(\overline{z}\right)^6$; **f)** $\left|z^8\right| = z^4$.

### ○ Zadanie 1.16

Stosując wzory Eulera wyrazić podane funkcje w postaci sum sinusów i cosinusów wielokrotności kąta $x$:

**a)** $\sin^3 x$; **b)** $\cos^2 x$; **c)** $\sin^5 x$; **d)** $\sin^4 x + \cos^4 x$.

**Zadanie 1.17**
Korzystając z definicji obliczyć podane pierwiastki:

**a)** $\sqrt{5-12i}$; **b)** $\sqrt{-11+60i}$; **c)** $\sqrt[3]{i}$; **d)** $\sqrt[4]{16}$.

**Zadanie 1.18**
Obliczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej podane pierwiastki:

**a)** $\sqrt{-1+\sqrt{3}i}$; **b)** $\sqrt[3]{-27i}$; **c)** $\sqrt[4]{-4}$; **d)** $\sqrt[6]{-64}$;

**e)** $\sqrt[5]{32i}$; **f)** $\sqrt[3]{-1+i}$; **g*)** $\sqrt[4]{i}$; **h*)** $\sqrt[3]{2+2i}$.

**Zadanie 1.19**
Odgadując jeden z elementów podanych pierwiastków obliczyć pozostałe elementy tych pierwiastków:

**a)** $\sqrt{(5-4i)^4}$; **b)** $\sqrt[4]{(-2+3i)^4}$; **c)** $\sqrt[3]{(2-i)^6}$; **d)** $\sqrt[3]{(2-2i)^9}$.

**Zadanie 1.20**
Jednym z wierzchołków kwadratu jest punkt $z_1 = 4 - i$. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki tego kwadratu, jeżeli jego środkiem jest:

**a)** początek układu współrzędnych; **b)** punkt $u = 1$;

**c)** punkt $u = 3 + i$; **d)** punkt $u = 7 + \sqrt{2}i$.

**Zadanie 1.21**
Znaleźć rozwiązania podanych równań:

**a)** $z^4 = (1-i)^4$; **b)** $(z-1)^6 = (i-z)^6$; **c)** $z^3 = (iz+1)^3$.

# 2

# Wielomiany

## Przykłady

### Podstawowe definicje i własności

**Przykład 2.1**

Obliczyć iloczyny podanych par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych:

**a)** $P(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 3$, $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$;

**b)** $W(z) = z^2 + 3iz + 1 - i$, $V(z) = -iz^2 + 4z - 6i$, gdzie $z \in \boldsymbol{C}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Mamy

$$
\begin{aligned}
(P \cdot Q)(x) &= P(x) \cdot Q(x) \\
&= \left(x^2 - \sqrt{2}x + 3\right) \cdot \left(x^3 - 2x^2 + 5x - 1\right) \\
&= x^5 - 2x^4 + 5x^3 - x^2 - \sqrt{2}x^4 + 2\sqrt{2}x^3 - 5\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + 3x^3 - 6x^2 + 15x - 3 \\
&= x^5 - \left(2+\sqrt{2}\right)x^4 + 2\left(4+\sqrt{2}\right)x^3 - \left(7+5\sqrt{2}\right)x^2 + \left(15+\sqrt{2}\right)x - 3, \\
&\qquad \text{gdzie } x \in \boldsymbol{R}.
\end{aligned}
$$

**b)** Mamy

$$
\begin{aligned}
(W \cdot V)(z) &= W(z) \cdot V(z) \\
&= \left(z^2 + 3iz + 1 - i\right) \cdot \left(-iz^2 + 4z - 6i\right) \\
&= -iz^4 + 4z^3 - 6iz^2 + 3z^3 + 12iz^2 + 18z - (1+i)z^2 + 4(1-i)z - 6i - 6 \\
&= -iz^4 + 7z^3 + (5i - 1)z^2 + (22 - 4i)z - 6(1+i), \\
&\qquad \text{gdzie } z \in \boldsymbol{C}.
\end{aligned}
$$

**Przykład 2.2**

Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzieleń wielomianów $P$ przez wielomiany $Q$, jeżeli:

**a)** $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x$, $Q(x) = x^2 - 1$;

**b)** $P(x) = x^{15} - 1,\ \ Q(x) = x^5 + 1;$

**c)** $P(z) = z^5 + 3z^2 + 7iz - 1,\ \ Q(z) = z - i.$

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy algorytm dzielenia wielomianów.

**a)** Mamy

$$
\begin{array}{lllllll}
 & & & 2x^2 & -\ 5x & +\ 2 & \\
\hline
 & (2x^4 & -\ 5x^3 & & +\ 2x) & & :\ (x^2-1) \\
- & 2x^4 & & +\ 2x^2 & & & \\
\hline
= & & -\ 5x^3 & +\ 2x^2 & +\ 2x & & \\
 & & +\ 5x^3 & & -\ 5x & & \\
\hline
 & & = & 2x^2 & -\ 3x & & \\
 & & & -\ 2x^2 & & +\ 2 & \\
\hline
 & & & = & -\ 3x & +\ 2 &
\end{array}
$$

Iloraz $2x^2 - 5x + 2$, reszta z dzielenia $-3x + 2$.

**b)** Mamy

$$
\begin{array}{llllll}
 & & x^{10} & -\ x^5 & +\ 1 & \\
\hline
 & (x^{15} & & & -\ 1) & :\ (x^5+1) \\
- & x^{15} & -\ x^{10} & & & \\
\hline
= & & -\ x^{10} & & -\ 1 & \\
 & & +\ x^{10} & +\ x^5 & & \\
\hline
 & & = & x^5 & -\ 1 & \\
 & & & -\ x^5 & -\ 1 & \\
\hline
 & & & = & -\ 2 &
\end{array}
$$

Iloraz $x^{10} - x^5 + 1$, reszta z dzielenia $-2$.

**c)** Mamy

$$
\begin{array}{llllllll}
 & z^4 & +\ iz^3 & -\ z^2 & +\ (3-i)z & +\ 1+10i & & \\
\hline
 & (z^5 & & & +\ 3z^2 & +\ 7iz & -\ 1) & :\ (z-i) \\
- & z^5 & +\ iz^4 & & & & & \\
\hline
= & & iz^4 & & +\ 3z^2 & +\ 7iz & -\ 1 & \\
 & & -\ iz^4 & -\ z^3 & & & & \\
\hline
 & & = & -\ z^3 & +\ 3z^2 & +\ 7iz & -\ 1 & \\
 & & & +\ z^3 & -\ iz^2 & & & \\
\hline
 & & & = & (3-i)z^2 & +\ 7iz & -\ 1 & \\
 & & & & -\ (3-i)z^2 & +\ (1+3i)z & & \\
\hline
 & & & & = & (1+10i)z & -\ 1 & \\
 & & & & & -\ (1+10i)z & -\ (10-i) & \\
\hline
 & & & & & = & -\ (11-i) &
\end{array}
$$

Iloraz $z^4 + iz^3 - z^2 + (3-i)z + 1 + 10i$, reszta z dzielenia $-11 + i$.

## Pierwiastki wielomianów

### Przykład 2.3

Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:
**a)** $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$; **b)** $2x^3 - 5x^2 - 2x - 3$; **c)** $x^5 + 5x^3 + 3x^2 - x + 15$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o pierwiastkach całkowitych wielomianu

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach całkowitych: każdy całkowity pierwiastek tego wielomianu jest dzielnikiem wyrazu wolnego $a_0$.

**a)** Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 6$ są liczby: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. Obliczając wartości tego wielomianu kolejno dla tych dzielników widzimy, że pierwiastkami całkowitymi są $1, -2, 3$. Ponieważ jest to wielomian stopnia 3, więc są to jego jedyne pierwiastki.

**b)** Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = -3$ są liczby: $1, -1, 3, -3$. Obliczając wartości tego wielomianu kolejno dla tych dzielników widzimy, że jedynym pierwiastkiem całkowitym jest 3.

**c)** Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0 = 15$ są liczby: $1, -1, 3, -3, 5, -5, 15, -15$. Obliczając wartości tego wielomianu kolejno dla tych dzielników wnioskujemy, że nie ma on pierwiastków całkowitych.

**Uwaga.** W wielu przypadkach obliczenia można znacznie uprościć np. badając parzystość wartości wielomianu dla dzielników wyrazu wolnego. W przykładzie **c)** dla każdej wartości całkowitej $x$ wartość wielomianu jest liczbą nieparzystą (jako suma algebraiczna czterech liczb jednakowej parzystości oraz 15), zatem nie może być równa 0.

### Przykład 2.4

Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:
**a)** $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$; **b)** $x^3 + \frac{x^2}{6} - x + \frac{1}{3}$; **c)** $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o postaci pierwiastków wymiernych wielomianu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ o współczynnikach całkowitych: jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, jest pierwiastkiem tego wielomianu, to $p$ jest dzielnikiem wyrazu wolnego $a_0$, natomiast $q$ jest dzielnikiem współczynnika $a_n$.

**a)** Dla wielomianu $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$ mamy $a_4 = 4$ oraz $a_0 = -1$. Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0$ są liczby $1, -1$. Dzielnikami współczynnika $a_4$ są: $1, -1, 2, -2, 4, -4$. Zatem pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogą być tylko liczby: $\frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}$. Obliczając wartości wielomianu kolejno dla tych liczb wnioskujemy, że tylko $\frac{-1}{2}$ jest jego pierwiastkiem wymiernym.

**b)** Ponieważ $x^3 + \frac{x^2}{6} - x + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(6x^3 + x^2 - 6x + 2\right)$, więc pierwiastki wielomianu

$x^3 + \frac{x^2}{6} - x + \frac{1}{3}$ pokrywają się z pierwiastkami wielomianu $6x^3 + x^2 - 6x + 2$. Dla wielomianu $6x^3+x^2-6x+2$ mamy $a_3 = 6$ oraz $a_0 = 2$. Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0$ są liczby: $1, -1, 2, -2$. dzielnikami współczynnika $a_3$ są natomiast liczby: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. Zatem pierwiastkami wymiernymi rozważanego wielomianu mogą być tylko liczby: $\frac{1}{1}$, $\frac{-1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{-2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{-1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{-2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{-1}{6}$. Po sprawdzeniu okazuje się, że jedynym pierwiastkiem wymiernym jest $\frac{1}{2}$.

**c)** Dla wielomianu $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$ mamy $a_6 = 3$ oraz $a_0 = -9$. Dzielnikami wyrazu wolnego $a_0$ są liczby: $1, -1, 3, -3, 9, -9$. Dzielnikami współczynnika $a_6$ są natomiast liczby: $1, -1, 3, -3$. Zatem pierwiastkami wymiernymi tego wielomianu mogą być tylko liczby $\frac{1}{1}$, $\frac{-1}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{-3}{1}$, $\frac{9}{1}$, $\frac{-9}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{-1}{3}$. Po sprawdzeniu okazuje się, że żadna z tych liczb nie jest pierwiastkiem wielomianu.

**Uwaga.** Obliczenia w przykładzie **c)** można znacznie uprościć, jeżeli zauważymy, że dla każdego ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie $p$ i $q$ są liczbami nieparzystymi, wartość wyrażenia $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x$ jest ułamkiem nieskracalnym o parzystym liczniku i nieparzystym mianowniku. Stąd wynika, że wartość wielomianu $3x^6 + 5x^5 - x^4 + 7x - 9$ dla takiego ułamka jest ułamkiem o nieparzystym liczniku. A zatem wielomian nie może być równy 0 dla tych liczb wymiernych.

## • Przykład 2.5

Znaleźć pierwiastki podanych równań kwadratowych i dwukwadratowych:

**a)** $z^2 + 2iz + 3 = 0$; **b)** $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$;

**c)** $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$; **d)** $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

### Rozwiązanie

Do wyznaczenia pierwiastków równania kwadratowego $az^2 + bz + c = 0$ o współczynnikach zespolonych wykorzystamy wzory

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

gdzie $\delta$ oznacza jeden z pierwiastków kwadratowych z liczby zespolonej $\Delta = b^2 - 4ac$.

**a)** Dla równania kwadratowego $z^2 + 2iz + 3 = 0$ mamy $\Delta = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -16$. Przyjmując $\delta = 4i$ otrzymamy

$$z_1 = \frac{-2i-4i}{2} = -3i, \quad z_2 = \frac{-2i+4i}{2} = i.$$

**b)** Dla równania kwadratowego $z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0$, mamy $\Delta = (2+i)^2 - 4(-1+7i) = 7 - 24i = (4-3i)^2$. Przyjmując teraz $\delta = 4 - 3i$ we wzorze na pierwiastki równania kwadratowego otrzymamy

$$z_1 = \frac{(2+i)-(4-3i)}{2} = -1 + 2i, \quad z_2 = \frac{(2+i)+(4-3i)}{2} = 3 - i.$$

**c)** Podstawiając w rozważanym równaniu $w = z^2$ otrzymamy równanie kwadratowe $w^2 + 5w + 4 = 0$. Rozwiązaniami tego równania są $w_1 = -1$ oraz $w_2 = -4$. Pierwiastki wyjściowego równania są zatem rozwiązaniami równań $z^2 = -1$, $z^2 = -4$. Stąd $z_1 = -i$, $z_2 = i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 2i$.

**d)** Podstawiając w rozważanym równaniu $w = z^2$ otrzymamy równanie kwadratowe $w^2 - 30w + 289 = 0$. Rozwiązaniami tego równania są $w_1 = \dfrac{30 - 16i}{2} = 15 - 8i$ oraz $w_2 = \dfrac{30 + 16i}{2} = 15 + 8i$. Pierwiastki wyjściowego równania są zatem rozwiązaniami równań $z^2 = 15 - 8i$, $z^2 = 15 + 8i$. Stąd $z_1 = 4 - i$, $z_2 = -4 + i$, $z_3 = 4 + i$, $z_4 = -4 - i$.

## Zasadnicze twierdzenie algebry

### • Przykład 2.6

Znając niektóre pierwiastki podanych wielomianów rzeczywistych, znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

**a)** $W(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6$, $x_1 = -1 + i$;

**b)** $W(x) = x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13$, $x_1 = 2 - 3i$, $x_2 = i$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie: jeżeli liczba zespolona $x_0$ jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach rzeczywistych, to $\overline{x}_0$ także jest pierwiastkiem tego wielomianu.

**a)** Z twierdzenia tego wynika, że skoro $x_1 = -1 + i$ jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6$, to także liczba $x_2 = \overline{x}_1 = -1 - i$ jest pierwiastkiem tego wielomianu. Z twierdzenia Bezout wynika, że rozważany wielomian jest podzielny przez wielomian

$$(x - x_1)(x - x_2) = [x - (-1 + i)][x - (-1 - i)] = x^2 + 2x + 2.$$

Iloraz z dzielenia wielomianów

$$\left(x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6\right) : \left(x^2 + 2x + 2\right)$$

jest wielomianem $x^2 + 3$. Pierwiastkami tego wielomianu są liczby $x_3 = \sqrt{3}i$, $x_4 = -\sqrt{3}i$.

**b)** Skoro liczby $x_1 = 2 - 3i$ oraz $x_2 = i$ są pierwiastkami wielomianu rzeczywistego, to także liczby $x_3 = \overline{x}_1 = 2 + 3i$ oraz $x_4 = \overline{x}_2 = -i$ są jego pierwiastkami. Z twierdzenia Bezout wynika, że wielomian $x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13$ jest podzielny przez wielomian

$$\begin{aligned}(x - x_1)(x - x_3)(x - x_2)(x - x_4) &= [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)](x - i)(x + i) \\ &= \left(x^2 - 4x + 13\right)\left(x^2 + 1\right) \\ &= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13.\end{aligned}$$

Ilorazem z dzielenia wielomianów

$$\left(x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13\right) : \left(x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13\right)$$

jest wielomian $x - 1$. Pierwiastkiem wielomianu $x - 1$ jest oczywiście $x_5 = 1$.

**Uwaga.** Dla tego wielomianu końcowe obliczenia można uprościć próbując znaleźć pierwiastki całkowite wśród podzielników wyrazu wolnego $a_0 = -13$, tj. wśród liczb: 1, $-1$, 13, $-13$.

**Przykład 2.7**

Nie wykonując dzieleń znaleźć reszty z dzieleń wielomianów $P$ przez wielomiany $Q$, jeżeli:

**a)** $P(x) = x^{10} + x^2 - 2$, $Q(x) = x^3 - 4x$;

**b)** $P(x) = x^8 + 5x^3 + 1$, $Q(x) = x^2 - 2x + 2$.

**Rozwiązanie**

**a)** Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez wielomian stopnia 3 jest wielomianem stopnia $\leqslant 2$. Niech poszukiwana reszta ma postać $R(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbf{R}$. Wtedy $P(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie $I$ jest ilorazem z dzielenia tych wielomianów. Zatem

$$x^{10} + x^2 - 2 = I(x) \cdot \left(x^3 - 4x\right) + ax^2 + bx + c$$

dla każdego $x \in \mathbf{C}$. Podstawiając w tej tożsamości pierwiastki wielomianu $x^3 - 4x$, tj. liczby $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} -2 = c, \\ 1026 = 4a - 2b + c, \\ 1026 = 4a + 2b + c. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest trójka $a = 257$, $b = 0$, $c = -2$. Zatem reszta z dzielenia tych wielomianów ma postać $257x^2 - 2$.

**b)** Reszta z dzielenia dowolnego wielomianu przez wielomian stopnia 2 jest wielomianem stopnia $\leqslant 1$. Niech poszukiwana reszta ma postać $R(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$. Wtedy $P(x) = I(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie $I$ jest ilorazem z dzielenia tych wielomianów. Zatem

$$x^8 + 5x^3 + 1 = I(x)\left(x^2 - 2x + 2\right) + ax + b$$

dla każdego $x \in \mathbf{C}$. Ponieważ pierwiastki wielomianu $x^2 - 2x + 2$, tj. liczby $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$, nie są liczbami rzeczywistymi, więc w ostatniej tożsamości wystarczy podstawić tylko jeden z tych pierwiastków np. $x_1$. Wtedy otrzymamy równość

$$(1+i)^8 + 5(1+i)^3 + 1 = a(1+i) + b.$$

Stąd $7 + 10i = (a+b) + ai$. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron tej równości otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ a \qquad = 10. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para $a = 10$, $b = -3$. Zatem reszta z dzielenia tych wielomianów ma postać $10x - 3$.

**Przykład 2.8**

Podać przykłady wielomianów zespolonych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

**a)** liczba 1 jest pierwiastkiem podwójnym, a liczby 2, 3, $1 + i$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu;

**b)** liczba $2 - 3i$ jest pierwiastkiem podwójnym, a liczba $2 + 3i$ jest pierwiastkiem poczwórnym tego wielomianu.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o przedstawianiu wielomianu zespolonego w postaci iloczynu dwumianów. Jeżeli liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_m$ są pierwiastkami wielomianu $W$ o krotnościach odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_m$, to

$$W(z) = c(z - z_1)^{k_1} \cdot (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots (z - z_m)^{k_m},$$

gdzie $c \in C \setminus \{0\}$ jest współczynnikiem tego wielomianu przy najwyższej potędze.

**a)** Przykładem wielomianu spełniającego podany warunek jest wielomian postaci:

$$W(z) = c(z-1)^2 \cdot (z-2) \cdot (z-3) \cdot [z - (1+i)],$$

gdzie $c \in C \setminus \{0\}$. Wielomiany tej postaci są jedynymi wielomianami najniższego stopnia, które spełniają ten warunek.

**b)** Przykładem wielomianu spełniającego podany warunek jest wielomian postaci:

$$W(z) = c[z - (2-3i)]^2 \cdot [z - (2+3i)]^4,$$

gdzie $c \in C \setminus \{0\}$. Wielomiany tej postaci są jedynymi wielomianami najniższego stopnia, które spełniają ten warunek.

## Przykład 2.9

Podać przykłady wielomianów rzeczywistych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

**a)** liczby $0$, $3$ oraz $-i$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu;

**b)** liczby $1 + 2i$, $-5$ są pierwiastkami pojedynczymi, liczba $0$ jest pierwiastkiem podwójnym, a liczba $-3i$ jest pierwiastkiem potrójnym tego wielomianu.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego. Jeżeli liczba zespolona $x_0$ jest pierwiastkiem $k$-krotnym wielomianu rzeczywistego, to liczba $\overline{x}_0$ także jest pierwiastkiem $k$-krotnym tego wielomianu. Wykorzystamy także twierdzenie o przedstawianiu wielomianu rzeczywistego w postaci iloczynu dwumianów lub trójmianów rzeczywistych. Jeżeli liczby $x_1, x_2, \ldots, x_r$ są pierwiastkami rzeczywistymi wielomianu rzeczywistego $W$ o krotnościach odpowiednio $k_1, k_2, \ldots, k_r$ oraz liczby zespolone $z_1, z_2, \ldots, z_s$, gdzie $\operatorname{Im} z_j > 0$ dla $1 \leqslant j \leqslant s$, są pierwiastkami istotnie zespolonymi tego wielomianu o krotnościach odpowiednio $l_1, l_2, \ldots, l_s$, to

$$\begin{aligned} W(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \cdot \ldots (x - x_r)^{k_r} \\ \times \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \cdot \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{l_2} \cdot \ldots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s}, \end{aligned}$$

gdzie $a \in R \setminus \{0\}$ jest współczynnikiem wielomianu $W$ przy najwyższej potędze, a liczby $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_s, q_s$ są określone przez równości

$$p_j = -2 \operatorname{Re} z_j, \ q_j = |z_j|^2 \ \text{dla } 1 \leqslant j \leqslant s.$$

**a)** Ponieważ liczba $-i$ jest pojedynczym pierwiastkiem zespolonym szukanego wielomianu rzeczywistego, więc także liczba $\overline{-i} = i$ jest jego pierwiastkiem pojedynczym. Przykładem wielomianu rzeczywistego najniższego stopnia, którego pierwiastkami jednokrotnymi są liczby: $0, 3, i, -i$ jest wielomian

$$W(x) = ax(x-3)(x-i)(x+i) = ax(x-3)\left(x^2+1\right),$$

gdzie $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Wielomiany tej postaci są jedynymi wielomianami rzeczywistymi stopnia 4, których pierwiastkami są liczby $0, 3, i, -i$.

**b)** Ponieważ liczba $1+2i$ jest pojedynczym pierwiastkiem zespolonym szukanego wielomianu rzeczywistego, więc także liczba $\overline{1+2i} = 1-2i$ jest jego pierwiastkiem pojedynczym. Podobnie, skoro liczba $-3i$ jest potrójnym pierwiastkiem zespolonym tego wielomianu, więc także liczba $\overline{-3i} = 3i$ jest jego pierwiastkiem potrójnym. Przykładem wielomianu rzeczywistego najniższego stopnia, którego pierwiastkami pojedynczymi są liczby: $-5, 1+2i, 1-2i$, pierwiastkiem podwójnym jest $0$, a pierwiastkiem potrójnym są liczby $3i$ oraz $-3i$ jest wielomian

$$\begin{aligned} W(x) &= ax^2(x+5)[x-(1+2i)][x-(1-2i)] \cdot (x-3i)^3 \cdot (x+3i)^3 \\ &= ax^2(x+5)\left(x^2-2x+5\right)\left(x^2+9\right)^3, \end{aligned}$$

gdzie $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Wielomiany tej postaci są jedynymi wielomianami rzeczywistymi stopnia 11, które mają wymienione wyżej pierwiastki wielokrotne.

## Przykład 2.10

Podane wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

**a)** $iz^2 - 4$; **b)** $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i$; **c)** $z^4 - (1-i)^4$.

**Rozwiązanie**

Wykorzystamy twierdzenie sformułowane w rozwiązaniu **Przykładu 2.8**.

**a)** Szukamy pierwiastków wielomianu $iz^2 - 4 = i\left(z^2 + 4i\right)$. Pierwiastkami tego wielomianu są liczby $z_1 = \sqrt{2}(1-i)$, $z_2 = -\sqrt{2}(1-i)$. Zatem

$$iz^2 - 4 = i\left[z - \sqrt{2}(1-i)\right]\left[z + \sqrt{2}(1-i)\right].$$

**b)** Szukamy pierwiastków wielomianu $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i = (z-1)^3 + 8i$. Zbiór pierwiastków tego wielomianu pokrywa się ze zbiorem $1 + \sqrt[3]{-8i}$. Korzystając ze wzoru na pierwiastki z liczb zespolonych otrzymamy

$$z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 1 - \left(\sqrt{3} + i\right) \quad \text{oraz} \quad z_3 = 1 + \left(\sqrt{3} - i\right).$$

Zatem

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 8i = [z - (1+2i)] \cdot \left[z - \left(1 - \sqrt{3} - i\right)\right] \cdot \left[z - \left(1 + \sqrt{3} - i\right)\right].$$

**c)** Szukamy pierwiastków wielomianu $z^4 - (1-i)^4$. Korzystając dwukrotnie ze wzoru $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} z^4 - (1-i)^4 &= \left[z^2 + (1-i)^2\right]\left[z^2 - (1-i)^2\right] \\ &= \left[z^2 + (1-i)^2\right][z + (1-i)][z - (1-i)]. \end{aligned}$$

Pozostały jeszcze do znalezienia pierwiastki wielomianu $z^2 + (1-i)^2$. Zbiór tych pierwiastków pokrywa się ze ze zbiorem $\sqrt{-(1-i)^2}$. Jednym z elementów tego zbioru jest $i(1-i) = 1 + i$, a drugim $-(1+i) = -1 - i$. Zatem poszukiwany rozkład ma postać

$$[z - (1+i)] \cdot [z - (-1-i)] \cdot [z - (1-i)] \cdot [z - (-1+i)].$$

## Przykład 2.11

Podane wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

**a)** $x^4+81$; **b)** $x^7-x$; **c)** $x^4+x^2+1$.

**Rozwiązanie**

Wykorzystamy twierdzenie sformułowane w rozwiązaniu **Przykładu 2.9**.

**a)** Szukamy pierwiastków zespolonych wielomianu $x^4+81$. Zbiór tych pierwiastków pokrywa się ze zbiorem $\sqrt[4]{-81}$. Korzystając teraz ze wzoru na pierwiastki z liczb zespolonych otrzymamy

$$\sqrt[4]{-81}=\left\{\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i),\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i),-\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i),\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)\right\}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}x^4+81&=\left[\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\right]\left[\left(x+\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)\right)\left(x+\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)\right]\\&=\left[x^2-3\sqrt{2}x+9\right]\left[x^2+3\sqrt{2}x+9\right].\end{aligned}$$

**Uwaga.** Ten sam wynik można uzyskać zapisując $x^4+81$ w postaci różnicy kwadratów pewnych wyrażeń. Mamy

$$\begin{aligned}x^4+81&=\left(x^4+18x^2+81\right)-18x^2=\left(x^2+9\right)^2-\left(3\sqrt{2}x\right)^2\\&=\left[\left(x^2+9\right)-3\sqrt{2}x\right]\cdot\left[\left(x^2+9\right)+3\sqrt{2}x\right].\end{aligned}$$

**b)** Szukamy pierwiastków zespolonych wielomianu $x^7-x=x\left(x^6-1\right)$. Zbiór tych pierwiastków jest sumą $\{0\}$ oraz zbioru pierwiastków stopnia 6 z liczby zespolonej 1. Ponieważ

$$\sqrt[6]{1}=\left\{1,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-1,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}x^7-x&=(x-0)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left[\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\right]\\&\qquad\times\left[\left(x-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\cdot\left(x-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\right]\\&=x(x-1)(x+1)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right).\end{aligned}$$

**Uwaga.** Ten sam rozkład można uzyskać korzystając ze wzoru $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ oraz ze wzoru $a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$. Mamy

$$\begin{aligned}x^7-x&=x\left(x^6-1\right)=x\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)\\&=x(x-1)\left(x^2+x+1\right)(x+1)\left(x^2-x+1\right).\end{aligned}$$

**c)** Ponieważ wielomian $x^4+x^2+1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, więc jego rozkład na rzeczywiste czynniki nierozkładalne ma postać

$$x^4+x^2+1=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right),$$

gdzie $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$. Współczynniki $a, b, c, d$ znajdziemy rozwiązując odpowiedni układ równań. Mamy

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + (a+c)x^3 + (b+ac+d)x^2 + (ad+bc)x + bd$$

dla każdego $x \in \boldsymbol{R}$. Zatem

$$\begin{cases} a+c & = 0, \\ b+ac+d & = 1, \\ ad+bc & = 0, \\ bd & = 1. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań są dwie czwórki liczb $a=-1$, $b=1$, $c=1$, $d=1$ lub $a=1$, $b=1$, $c=-1$, $d=1$. Z pierwszej czwórki otrzymamy rozkład

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right).$$

Druga czwórka daje ten sam rozkład. Zmieniona jest tylko kolejność czynników.

**Uwaga.** Ten sam rozkład można uzyskać korzystając z faktu, że pierwiastkami równania dwukwadratowego $x^4 + x^2 + 1 = 0$ są liczby

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_2 = \overline{z}_1, \quad z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = \overline{z}_3.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= \left[\left(x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \cdot \left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\right] \\ &\quad \times \left[\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\right] \\ &= \left[x^2 - x + 1\right]\left[x^2 + x + 1\right]. \end{aligned}$$

Można także wykorzystać wzór $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Mamy wtedy

$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) - x^2 = \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2 = \left[x^2 - x + 1\right]\left[x^2 + x + 1\right].$$

## Ułamki proste

### • Przykład 2.12

Podane funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

**a)** $\dfrac{z^6}{2z^3 + z - 3}$; **b)** $\dfrac{3x^4 + 2x^2 - 1}{x^4 + x^3 - x}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Po podzieleniu wielomianów $z^6 : \left(2z^3 + z - 3\right)$ jak w **Przykładzie 2.2** otrzymujemy iloraz $\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z + \frac{3}{4}$ i resztę $\frac{1}{4}z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{4}$. Zatem

$$\frac{z^6}{2z^3 + z - 3} = \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{4}z + \frac{3}{4} + \frac{z^2 - 6z + 9}{4\left(2z^3 + z - 3\right)}.$$

**b)** Mamy

$$\frac{3x^4+2x^2-1}{x^4+x^3-x}=\frac{3\left(x^4+x^3-x\right)-3x^3+3x+2x^2-1}{x^4+x^3-x}=3+\frac{-3x^3+2x^2+3x-1}{x^4+x^3-x}.$$

## • Przykład* 2.13

Zaproponować rozkłady podanych zespolonych funkcji wymiernych właściwych na zespolone ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

**a)** $\dfrac{3iz}{(z+1)^3\left(z^2+1\right)^2}$; **b)** $\dfrac{(1-i)z^4+iz^3+z-5i}{z^4\left[z+(1-2i)\right]^2(z-5)}$.

**Rozwiązanie**

Zespolone ułamki proste mają postać: $\dfrac{A}{(z+a)^n}$, gdzie $a, A\in \mathbf{C}$ oraz $n\in \mathbf{N}$.

**a)** Wielomian w mianowniku funkcji wymiernej rozważanej w tym przykładzie ma następujący rozkład na zespolone czynniki nierozkładalne

$$(z+1)^3\left(z^2+1\right)^2=(z+1)^3(z+i)^2(z-i)^2.$$

Zatem szukany rozkład zespolonej funkcji wymiernej ma postać

$$\frac{3iz}{(z+1)^3(z+i)^2(z-i)^2}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{(z+1)^2}+\frac{C}{(z+1)^3}+\frac{D}{z+i}+\frac{E}{(z+i)^2}+\frac{F}{z-i}+\frac{G}{(z-i)^2},$$

gdzie $A, B,\ldots, G\in \mathbf{C}$. Postać tego rozkładu wynika z twierdzenia o rozkładzie zespolonej funkcji wymiernej właściwej na zespolone ułamki proste. Współczynniki zespolone $A, B,\ldots, G$ tego rozkładu są wyznaczone jednoznacznie.

**b)** Rozkład zespolonej funkcji wymiernej rozważanej w przykładzie na zespolone ułamki proste ma postać

$$\frac{(1-i)z^4+iz^3+z-5i}{z^4\left[z+(1-2i)\right]^2(z-5)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z^3}+\frac{D}{z^4}+\frac{E}{z+(1-2i)}+\frac{F}{\left[z+(1-2i)\right]^2}+\frac{G}{z-5},$$

gdzie $A, B, C, D, E, F, G\in \mathbf{C}$. Postać tego rozkładu wynika z twierdzenia o rozkładzie zespolonej funkcji wymiernej właściwej na zespolone ułamki proste. Współczynniki zespolone $A, B,\ldots, G$ tego rozkładu są wyznaczone jednoznacznie.

## • Przykład 2.14

Zaproponować rozkłady podanych rzeczywistych funkcji wymiernych właściwych na rzeczywiste ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

**a)** $\dfrac{x^5-x^3+1}{x(x+1)^3\left(x^2+1\right)}$; **b)** $\dfrac{x^8-7x^5+3x^2-5}{\left(x^2-9\right)^2\left(x^2+2x+6\right)^3}$.

**Rozwiązanie**

Rzeczywiste ułamki proste pierwszego rodzaju mają postać

$$\frac{A}{(x+a)^n},\ \text{gdzie } a, A\in \mathbf{R} \text{ oraz } n\in \mathbf{N}.$$

Rzeczywiste ułamki proste drugiego rodzaju mają postać

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, \text{ gdzie } p,q,A,B\in \boldsymbol{R} \text{ oraz } n\in \boldsymbol{N},$$

przy czym spełniony jest warunek $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Twierdzenie o rozkładzie rzeczywistej funkcji wymiernej właściwej na rzeczywiste ułamki proste orzeka, że każda taka funkcja jest sumą rzeczywistych ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju. Nieznane współczynniki określone są jednoznacznie.

**a)** Ponieważ wielomian w mianowniku rozważanej funkcji wymiernej jest przedstawiony w postaci iloczynu rzeczywistych czynników nierozkładalnych, więc szukany rozkład na ułamki proste ma postać

$$\frac{x^5-x^3+1}{x(x+1)^3(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}+\frac{Ex+F}{x^2+1},$$

gdzie współczynniki rzeczywiste $A,B,\ldots,F$ są określone jednoznacznie.

**b)** Wielomian w mianowniku rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na rzeczywiste czynniki nierozkładalne

$$\left(x^2-9\right)^2\left(x^2+2x+6\right)^3 = (x-3)^2(x+3)^2\left(x^2+2x+6\right)^3.$$

Zatem rozkład rozważanej funkcji wymiernej na rzeczywiste ułamki proste ma postać

$$\begin{aligned}\frac{x^8-7x^5+3x^2-5}{\left(x^2-9\right)^2\left(x^2+2x+6\right)^3} &= \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+3}+\frac{D}{(x+3)^2}\\ &+\frac{Ex+F}{x^2+2x+6}+\frac{Gx+H}{\left(x^2+2x+6\right)^2}+\frac{Ix+J}{\left(x^2+2x+6\right)^3},\end{aligned}$$

gdzie współczynniki rzeczywiste $A,B,\ldots,J$ są określone jednoznacznie.

## • Przykład* 2.15

Podane zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na zespolone ułamki proste:

**a)** $\dfrac{iz+9}{z^2+9}$; **b)** $\dfrac{z+3}{(z-1)\left(z^2+1\right)}$; **c)** $\dfrac{2z^4+8z^2+32}{z\left(z^2+4\right)^2}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na zespolone czynniki nierozkładalne

$$z^2+9=(z-3i)(z+3i),$$

więc szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma postać

$$\frac{iz+9}{z^2+9}=\frac{A}{z-3i}+\frac{B}{z+3i}, \text{ gdzie } A,B\in \boldsymbol{C}.$$

Po sprowadzeniu prawej strony równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$iz+9=A(z+3i)+B(z-3i),$$

stąd

$$iz+9=(A+B)z+3(A-B)i.$$

Ponieważ ostatnia równość jest prawdziwa dla każdego $z \in C$, więc

$$\begin{cases} A + B = i, \\ 3i(A - B) = 9. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $A = -i$, $B = 2i$. Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{iz + 9}{z^2 + 9} = \frac{-i}{z - 3i} + \frac{2i}{z + 3i}.$$

**b)** Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład za zespolone czynniki nierozkładalne

$$(z - 1)\left(z^2 + 1\right) = (z - 1)(z - i)(z + i),$$

więc szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma postać

$$\frac{z + 3}{(z - 1)(z^2 + 1)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - i} + \frac{C}{z + i},$$

gdzie $A, B, C \in C$. Po sprowadzeniu prawej strony równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$z + 3 = A(z - i)(z + i) + B(z - 1)(z + i) + C(z - 1)(z - i).$$

Podstawiając w otrzymanej równości kolejne pierwiastki mianownika funkcji wymiernej, tj. liczby $1, i$ oraz $-i$, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 4 & = A(1 - i)(1 + i), \\ 3 + i & = B(i - 1)2i, \\ 3 - i & = C(-i - 1)(-2i). \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest trójka liczb $A = 2$, $B = -1 + \frac{i}{2}$, $C = -1 - \frac{i}{2}$. Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{z + 3}{(z - 1)(z^2 + 1)} = \frac{2}{z - 1} + \frac{-1 + \frac{i}{2}}{z - i} + \frac{-1 - \frac{i}{2}}{z + i}.$$

**c)** Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na zespolone czynniki nierozkładalne

$$z\left(z^2 + 4\right)^2 = z(z - 2i)^2(z + 2i)^2,$$

więc szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma postać

$$\frac{2z^4 + 8z^2 + 32}{z\left(z^2 + 4\right)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - 2i} + \frac{C}{(z - 2i)^2} + \frac{D}{z + 2i} + \frac{E}{(z + 2i)^2},$$

gdzie $A, B, C, D, E \in C$. Po sprowadzeniu prawej strony ostatniej równości do wspólnego mianownika otrzymamy

$$\begin{aligned} 2z^4 + 8z^2 + 32 = {} & A(z - 2i)^2(z + 2i)^2 + Bz(z - 2i)(z + 2i)^2 + Cz(z + 2i)^2 \\ & + Dz(z - 2i)^2(z + 2i) + Ez(z - 2i)^2. \end{aligned}$$

Stąd

$$2z^4 + 8z^2 + 32 = (A + B + D)z^4 + (2Bi + C - 2Di + E)z^3$$
$$+(8A + 4B + 4Ci + 4D - 4Ei)z^2 + (8Bi - 4C - 8Di - 4E)z + 16A$$

dla każdego $z \in C$. Korzystając teraz z faktu, że dwa wielomiany są równe, gdy ich stopnie są jednakowe i współczynniki stojące przy jednakowych potęgach zmiennej $z$ są sobie równe, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} A + B + D = 2, \\ 2iB + C - 2iD + E = 0, \\ 8A + 4B + 4iC + 4D - 4iE = 8, \\ 8iB - 4C - 8iD - 4E = 0, \\ 16A = 32. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest piątka liczb $A = 2$, $B = 0$, $C = i$, $D = 0$, $E = -i$. Szukany rozkład na zespolone ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{2z^4 + 8z^2 + 32}{z(z^2 + 4)^2} = \frac{2}{z} + \frac{i}{(z - 2i)^2} + \frac{-i}{(z + 2i)^2}.$$

## • Przykład 2.16

Podane rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

**a)** $\dfrac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; **b)** $\dfrac{4}{x^3 - x^5}$; **c)** $\dfrac{3x^3 + 6}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$;

**d)** $\dfrac{2x + 1}{x^2(x^2 + 1)^2}$; **e)** $\dfrac{x^3 + 3}{(x + 3)^{100}}$; **f)** $\dfrac{x^3}{(x^2 + 1)^2}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej jest już rozłożony na iloczyn nierozkładalnych czynników rzeczywistych, więc rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma postać

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}, \text{ gdzie } A, B, C \in R.$$

Po pomnożeniu obu stron powyższej równości przez mianownik funkcji wymiernej otrzymamy tożsamość

$$2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

dla każdego $x \in R$. Wstawiając do tej tożsamości kolejno pierwiastki mianownika, tj. liczby $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 2 = 2A, \\ 2 = -B, \\ 2 = 2C. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{x-2} + \frac{1}{x-3}.$$

**b)** Mianownik rozważanej funkcji wymiernej ma następujący rozkład na rzeczywiste czynniki nierozkładalne

$$x^3 - x^5 = x^3(1-x)(1+x).$$

Rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{-4}{x^5 - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{x+1}, \text{ gdzie } A, B, C, D, E \in \mathbf{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron tej równości przez mianownik funkcji wymiernej otrzymamy tożsamość

$$-4 = Ax^2\left(x^2-1\right) + Bx\left(x^2-1\right) + C\left(x^2-1\right) + Dx^3(x+1) + Ex^3(x-1)$$

dla każdego $x \in \mathbf{R}$. Stąd

$$-4 = (A+D+E)x^4 + (B+D-E)x^3 + (-A+C)x^2 - Bx - C.$$

Korzystając teraz z faktu, że dwa wielomiany są równe, gdy ich stopnie są jednakowe i współczynniki stojące przy jednakowych potęgach zmiennej $x$ są sobie równe, otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} A \phantom{+B+C} + D + E = 0, \\ B \phantom{+C} + D - E = 0, \\ -A + C = 0, \\ -B = 0, \\ -C = -4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest piątka liczb $A = 4$, $B = 0$, $C = 4$, $D = -2$, $E = -2$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{-4}{x^5 - x^3} = \frac{4}{x} + \frac{4}{x^3} + \frac{-2}{x-1} + \frac{-2}{x+1}.$$

**c)** Ponieważ mianownik rozważanej funkcji wymiernej jest już rozłożony na iloczyn nierozkładalnych czynników rzeczywistych, więc rozkład tej funkcji na rzeczywiste ułamki proste ma postać

$$\frac{3x^3+6}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}, \text{ gdzie } A, B, C, D \in \mathbf{R}.$$

Po pomnożeniu obu stron tej równości przez $\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)$ otrzymamy równość

$$3x^3 + 6 = (Ax+B)\left(x^2+4\right) + (Cx+D)\left(x^2+1\right)$$

prawdziwą dla każdego $x \in \mathbf{C}$. Podstawiając w tej równości po jednym pierwiastku zespolonym każdego z wielomianów $x^2+1$ oraz $x^2+4$, tj. liczby $i$ oraz $2i$, otrzymamy układ równań ze współczynnikami zespolonymi i rzeczywistymi niewiadomymi

$$\begin{cases} 6 - 3i = (Ai+B)\cdot 3, \\ 6 - 24i = (2Ci+D)\cdot(-3). \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi o współczynnikach rzeczywistych

$$\begin{cases} 3B = 6, \\ 3A = -3, \\ -3D = 6, \\ -6C = -24. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest czwórką liczb $A = -1$, $B = 2$, $C = 4$, $D = -2$. Szukany rozkład na ułamki proste ma zatem postać

$$\frac{3x^3 + 6}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{-x+2}{x^2+1} + \frac{4x-2}{x^2+4}.$$

**d)** Rozkład na ułamki proste rozważanej funkcji wymiernej ma postać

$$\frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}, \text{ gdzie } A, B, C, D, E, F \in R.$$

W tym przykładzie nieznane współczynniki $A, B, \ldots, F$ znajdziemy dokonując kilku przekształceń algebraicznych. Mamy

$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x^2(x^2+1)^2} &= (2x+1) \cdot \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)^2} = (2x+1)\left[\frac{1}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right] \\ &= (2x+1)\left[\frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right] \\ &= (2x+1)\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right] = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

**e)** W tym przykładzie obliczenia nieznanych współczynników rozkładu można znacznie uprościć dokonując podstawienia $y = x + 3$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}\frac{x^3+3}{(x+3)^{100}} &= \frac{(y-3)^3+3}{y^{100}} = \frac{y^3 - 9y^2 + 27y - 24}{y^{100}} = \frac{1}{y^{97}} + \frac{-9}{y^{98}} + \frac{27}{y^{99}} + \frac{-24}{y^{100}} \\ &= \frac{1}{(x+3)^{97}} + \frac{-9}{(x+3)^{98}} + \frac{27}{(x+3)^{99}} + \frac{-24}{(x+3)^{100}}.\end{aligned}$$

**f)** Rozkład na ułamki proste uzyskamy wykonując kilka przekształceń algebraicznych

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^3+x)-x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^2+1)-x}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

# Zadania

## ○ Zadanie 2.1

Obliczyć iloczyny podanych par wielomianów rzeczywistych lub zespolonych:

**a)** $P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$, $Q(x) = x^2 - x + 4$;

**b)** $W(z) = z^3 + 5z^2 - iz + 3$, $V(z) = (1+i)z - 2$.

## Zadanie 2.2

Obliczyć ilorazy oraz reszty z dzieleń wielomianów $P$ przez wielomiany $Q$, jeżeli:

a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x^2 - 3x + 1$;

b) $P(x) = x^{16} - 16$, $Q(x) = x^4 + 2$;

c) $P(z) = z^5 - z^3 + 1$, $Q(z) = (z - i)^3$.

## Zadanie 2.3

Znaleźć wszystkie pierwiastki całkowite podanych wielomianów:

a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$; b) $3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$;

c) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$; d) $x^4 + 3x^3 - x^2 + 17x + 99$.

## Zadanie 2.4

Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne podanych wielomianów:

a) $x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$; b) $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1$;

c) $4x^3 + x - 1$; d) $x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

## Zadanie 2.5

Znaleźć pierwiastki podanych równań kwadratowych i dwukwadratowych:

a) $z^2 - 4z + 13 = 0$; b) $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$;

c) $z^4 + 8z^2 + 15 = 0$; d) $z^4 - 3iz^2 + 4 = 0$.

## Zadanie 2.6

Znając niektóre pierwiastki podanych wielomianów rzeczywistych, znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

a) $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 7x - 3\sqrt{2}$, $x_1 = \sqrt{2} + i$;

b) $W(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 6x - 30$, $x_1 = 1 - 3i$;

c) $W(x) = x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25$, $x_1 = 2 + i$;

d) $W(x) = x^6 - 2x^5 + 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 4x + 4$, $x_1 = i$, $x_2 = -\sqrt{2}i$;

e) $W(x) = x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 28x^3 + 31x^2 - 22x + 14$, $x_1 = 1 - i$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

## Zadanie 2.7

Nie wykonując dzieleń znaleźć reszty z dzieleń wielomianów $P$ przez wielomiany $Q$, jeżeli:

a) $P(x) = x^8 - 3x^3 + 5x$, $Q(x) = x^2 - x - 2$;

b) $P(x) = x^{14} - 4x^{10} + x^2 + \sqrt{2}x$, $Q(x) = x^2 + 2$;

c) $P(x) = x^{30} + 3x^{14} + 2$, $Q(x) = x^3 + 1$;

d) $P(x) = x^{100} + 2x^{51} - 3x^2 + 1$, $Q(x) = x^2 - 1$;

e) $P(x) = x^5 + x - 2$, $Q(x) = x^2 - 2x + 5$;

f) $P(x) = x^6 + x - 50$, $Q(x) = x^3 + 8$.

○ **Zadanie 2.8**

Podać przykłady wielomianów zespolonych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

**a)** liczby $0, 1-5i$ są pierwiastkami pojedynczymi, a liczby $-1, -3+i$ są pierwiastkami podwójnymi tego wielomianu;

**b)** liczba $-4i$ jest pierwiastkiem podwójnym, a liczby $3, -5$ pierwiastkami potrójnymi tego wielomianu.

○ **Zadanie 2.9**

Podać przykłady wielomianów rzeczywistych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

**a)** liczby $1, -5, -\sqrt{2}$ oraz $1-3i$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu;

**b)** liczba $1+i$ jest pierwiastkiem pojedynczym, liczby $-i$ oraz $3$ są pierwiastkami podwójnymi, a liczba $-4+3i$ jest pierwiastkiem potrójnym tego wielomianu.

○ **Zadanie 2.10**

Podane wielomiany zespolone przedstawić w postaci iloczynu dwumianów:

**a)** $z^2-2iz-10$; **b)** $z^4+5z^2+6$; **c)** $z^3-6z-9$.

○ **Zadanie 2.11**

Podane wielomiany rzeczywiste przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

**a)** $x^6+8$; **b)** $x^4+4$;

**c)** $x^4-x^2+1$; **d)** $4x^5-4x^4-13x^3+13x^2+9x-9$.

○ **Zadanie 2.12**

Podane funkcje wymierne (rzeczywiste lub zespolone) rozłożyć na sumy wielomianów oraz funkcji wymiernych właściwych:

**a)** $\dfrac{z^5-3z^2+z}{z^3+4z^2+1}$; **b)** $\dfrac{x^5+3}{x^5+4}$; **c)** $\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+4x+5}{x^3+2x^2+3x+4}$.

○ **Zadanie* 2.13**

Zaproponować rozkłady podanych zespolonych funkcji wymiernych właściwych na zespolone ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

**a)** $\dfrac{z^3+i}{z^2(z-2i)^3}$; **b)** $\dfrac{z^2+z+5}{(z+1)(z+i)^2[z-(1+i)]^3}$; **c)** $\dfrac{iz+7}{(z^4-4)^2}$.

○ **Zadanie 2.14**

Zaproponować rozkłady podanych rzeczywistych funkcji wymiernych właściwych na rzeczywiste ułamki proste (nie obliczać nieznanych współczynników):

**a)** $\dfrac{x^2+2x-7}{x^3(x-1)(x+5)^2}$; **b)** $\dfrac{x^3-8x-4}{(x^2+4)(x^2+x+3)^3}$; **c)** $\dfrac{x^4+x^3}{(x+3)^2(x^2-4x+5)^2}$.

○ **Zadanie* 2.15**

Podane zespolone funkcje wymierne właściwe rozłożyć na zespolone ułamki proste:

**a)** $\dfrac{z^2}{(z-1)(z+2)(z+3)}$; **b)** $\dfrac{z}{(z^2-1)^2}$;

**c)** $\dfrac{16i}{z^4+4}$; **d)** $\dfrac{z^2+2z}{(z^2+2z+2)^2}$.

○ **Zadanie 2.16**

Podane rzeczywiste funkcje wymierne właściwe rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

**a)** $\dfrac{12}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$; **b)** $\dfrac{x^2}{x^4-1}$; **c)** $\dfrac{4x}{(x+1)(x^2+1)^2}$;

**d)** $\dfrac{x^2+2x}{(x^2+2x+2)^2}$; **e)** $\dfrac{1}{x^3+x}$; **f)** $\dfrac{x^2+1}{x^3(x+1)^2}$.

# 3

# Macierze i wyznaczniki

## Przykłady

### Macierze - podstawowe określenia

**Przykład 3.1**

**a)** Zaproponować opis, w formie macierzy złożonej z liczb całkowitych, położenia pionków w grze w warcaby.

**b)** Każde ze 150 państw eksportuje oraz importuje towary do oraz z pozostałych państw. Zaproponować zapis w formie jednej macierzy, wielkości eksportu i importu w mln \$ między tymi państwami. W jaki sposób, można odczytać z tej macierzy deficyt w handlu zagranicznym każdego z tych państw?

**c)** Obraz na ekranie monitora komputerowego złożony z $1024 \times 768$ punktów można zapisać w postaci macierzy zero-jedynkowej. Przyjmując, że ekran monitora przedstawia pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych, z początkiem układu w lewym górnym rogu tego ekranu, zapisać w formie macierzy zero-jedynkowej, zbiór przedstawiający w przybliżeniu prostą $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

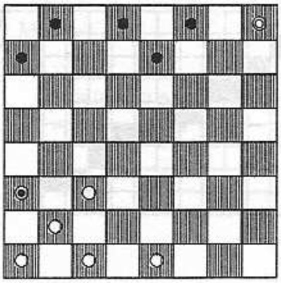
**Rozwiązanie**

**a)** Położenie pionków w grze zapiszemy w formie macierzy o 8 wierszach i 8 kolumnach. Jeżeli w $i$-tym wierszu i w $j$-tej kolumnie szachownicy, gdzie $1 \leqslant i \leqslant 8$ oraz $1 \leqslant j \leqslant 8$
1) nie stoi żaden pionek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 0$;
2) stoi biały pionek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 1$;
3) stoi czarny pionek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = -1$;
4) stoi biała damka, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 2$;
5) stoi czarna damka, to przyjmujemy, że $a_{ij} = -2$.

Ponieważ w warcaby gra się tylko na czarnych polach szachownicy, więc w każdej macierzy opisującej położenie pionów mamy $a_{ij} = 0$, gdy $i + j$ jest liczbą parzystą.

**Uwaga.** Zastosowany przez nas zapis jest inny niż w notacji szachowej. W tej notacji kolumny szachownicy oznacza się literami $a, b, \ldots, h$ licząc od lewej kolumny, a wiersze liczbami $1, 2, \ldots, 8$ licząc od dolnego wiersza.

Niżej podajemy przykład pozycji warcabowej i jej zapis w formie macierzy.



$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**b)** Każde ze 150 państw ustawionych według alfabetu numerujemy kolejnymi liczbami naturalnymi:

1 – Afganistan,
2 – Argentyna,
3 – Australia,
⋮ ⋮
150 – Zair.

Elementy $h_{ij}$ macierzy $H$ opisującej handel zagraniczny między tymi państwami są określone wzorem

$$h_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = j, \\ \text{wielkość eksportu państwa } j \text{ do państwa } i & \text{dla } i \neq j, \end{cases}$$

gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant 150$. W macierzy $H$ nie ma potrzeby podawania wielkości importu państwa $i$ z państwa $j$, gdyż jest on równy eksportowi państwa $j$ do państwa $i$. Deficyt w handlu zagranicznym państwa $k$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant 150$, tj. różnica między eksportem a importem tego państwa do oraz z pozostałych państw, jest określony wzorem

$$(h_{k1} + h_{k2} + \ldots + h_{k150}) - (h_{1k} + h_{2k} + \ldots + h_{150k}).$$

Inaczej mówiąc, deficyt tego państwa jest równy różnicy sumy elementów $k$-tego wiersza i sumy elementów $k$-tej kolumny macierzy $H$.

**c)** Niech $C = [c_{ij}]$ oznacza macierz o 768 wierszach i 1024 kolumnach opisującą obraz na ekranie monitora komputerowego. Jeżeli punkt ekranu stojący w $i$-tym wierszu i w $j$-tej kolumnie

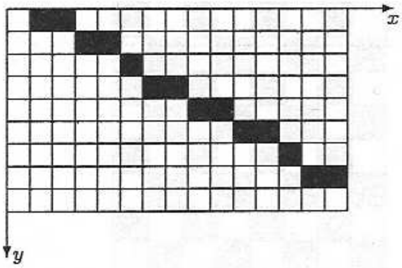
świeci się, to przyjmujemy, że $c_{ij} = 1$;
nie świeci się, to przyjmujemy, że $c_{ij} = 0$.

Elementy $c_{ij}$ macierzy $C$ opisującej wykres funkcji $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x \geqslant 0$, określone są wzorem

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } j = E\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right), \\ 0, & \text{gdy } j \neq E\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right), \end{cases}$$

gdzie symbol $E(u)$ oznacza część całkowitą liczby $u$ oraz $1 \leqslant i \leqslant 1024$, $1 \leqslant j \leqslant 768$. Niżej przedstawiono fragment macierzy opisującej na ekranie prostą $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ oraz powiększony fragment ekranu z tą prostą.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$




## Działania na macierzach

**Przykład 3.2**

Obliczyć:

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; **b)** $3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$;

**c)** $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix}$;

**e)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\cdot 2 & 3+2\cdot 1 \\ -2+2\cdot 0 & 1+2\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

**b)** Mamy

$$3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1-3 & 3\cdot 0-1 & 3\cdot 1-0 \\ 3\cdot 0-1 & 3\cdot 2-1 & 3\cdot 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

**c)** Iloczyn macierzy $A$ wymiaru $m \times n$ oraz macierzy $B$ wymiaru $k \times l$ jest określony tylko wtedy, gdy $n = k$. Element iloczynu $AB$ stojący w $i$-tym wierszu i $j$-kolumnie jest równy sumie iloczynów odpowiadających sobie elementów $i$-tego wiersza macierzy $A$ i elementów $j$-tej kolumny macierzy $B$. Mamy

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3+(-4)\cdot 2+5\cdot 0 & 3\cdot 29+(-4)\cdot 18+5\cdot(-3) \\ 2\cdot 3+(-3)\cdot 2+1\cdot 0 & 2\cdot 29+(-3)\cdot 18+1\cdot(-3) \\ 3\cdot 3+(-5)\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 3\cdot 29+(-5)\cdot 18+(-1)\cdot(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**d)** Mamy

$$\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin\beta & \cos\beta \\ -\cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

**e)** Mamy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) \\ (-1)\cdot 0 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 2 + 1\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

## • Przykład 3.3

**a)** Rozwiązać równanie macierzowe $3\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{bmatrix} + X\right) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ i & 4 \end{bmatrix} = X$;

**b)** Rozwiązać układ równań macierzowych $\begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$

**Rozwiązanie**

Dodawanie i odejmowanie macierzy oraz mnożenie macierzy przez liczbę mają te same własności jak zwykłe działania w zbiorze liczb rzeczywistych. W obu przykładach wykorzystamy te własności.

**a)** Mamy

$$3\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{bmatrix} + X\right) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ i & 4 \end{bmatrix} = X \iff \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3i & 0 \end{bmatrix} + 3X + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ i & 4 \end{bmatrix} = X$$

$$\iff 3X - X = -\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ i & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$\iff 2X = -\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2i & 4 \end{bmatrix}$$

$$\iff X = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -2i & 4 \end{bmatrix}$$

$$\iff X = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ i & -2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniem równania jest macierz

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ i & -2 \end{bmatrix}.$$

**b)** Odejmując od drugiego równania podwojone pierwsze otrzymamy

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odejmując teraz od drugiego równania potrojone pierwsze uzyskamy

$$-X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zatem rozwiązaniem układu równań jest para macierzy

$$\begin{cases} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ Y = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

## • Przykład 3.4

Obliczyć kilka początkowych potęg macierzy $A$, następnie wysunąć hipotezę o postaci macierzy $A^n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ i uzasadnić ją za pomocą indukcji matematycznej, jeżeli:

**a)** $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Mamy

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & (-i)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^5 = A^2 \cdot A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = A.$$

Na podstawie zauważonych prawidłowości w macierzy $A^n$ dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ wysuwamy hipotezę o postaci tej macierzy

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} & \text{dla} \quad n = 4k+1, \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \text{dla} \quad n = 4k+2, \\ \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & i \end{bmatrix} & \text{dla} \quad n = 4k+3, \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{dla} \quad n = 4k+4, \end{cases} \qquad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Przeprowadzimy teraz dowód tej hipotezy dla $n = 4k + 1$ za pomocą indukcji matematycznej. Udowodnimy więc wzór

$$A^{4k+1} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ . Dla $k = 0$ i $k = 1$ wzór jest prawdziwy. Niech $k$ będzie dowolną liczbą naturalną. Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla $k$. Pokażemy, że jest on prawdziwy także dla $k + 1$. Mamy

$$A^{4(k+1)+1} = A^{4k+1} \cdot A^4 \overset{\text{założenie}}{\underset{\text{indukcyjne}}{=\!=\!=}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Zatem z prawdziwości hipotezy dla $k$ wynika jego prawdziwość dla $k + 1$. Ponadto wzór jest prawdziwy dla $k = 1$, więc z zasady indukcji matematycznej wynika, że jest on prawdziwy dla każdej liczby naturalnej oraz dla $k = 0$.

**Uwaga*.** Wzór ogólny na $n$-tą potęgę macierzy $A$ ma postać

$$A^n = \begin{bmatrix} i^n & \dfrac{1-(-1)^n}{2} \cdot (-1)^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \\ 0 & (-i)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i^n & \sin\dfrac{n\pi}{2} \\ 0 & (-i)^n \end{bmatrix},$$

gdzie $E(u)$ oznacza część całkowitą liczby $u$.

**b)** Mamy

$$A^1 = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

Na podstawie obserwacji macierzy $A^n$ dla $n = 1, 2, 3, 4$ wysuwamy hipotezę, że

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Przeprowadzimy dowód tej hipotezy za pomocą indukcji matematycznej. Dla $n = 1$ hipoteza ta jest prawdziwa. Niech teraz $n$ będzie dowolną liczbą naturalną. Załóżmy, że hipoteza jest prawdziwa dla liczby $n$. Pokażemy, że jest ona prawdziwa dla liczby $n+1$. Mamy

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \underset{\text{indukcyjne}}{\overset{\text{założenie}}{=\!=\!=\!=}} \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{bmatrix}.$$

Zatem z prawdziwości hipotezy dla liczby naturalnej $n$ wynika, jej prawdziwość dla liczby $n+1$. Ponieważ hipoteza jest prawdziwa dla $n = 1$, więc z zasady indukcji matematycznej wynika, że jest ona prawdziwa dla każdej liczby naturalnej.

## Przykład 3.5

Układając odpowiednie układy równań znaleźć wszystkie macierze zespolone $X$ spełniające podane równania macierzowe:

**a)** $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $X \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$; **c)** $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

### Rozwiązanie

**a)** Niech $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in C$, będzie szukaną macierzą. Wtedy

$$X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}.$$

Równanie $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ jest zatem równoważne układowi równań

$$\begin{cases} a^2 + bc &= 1, \\ b(a+d) &= 0, \\ c(a+d) &= 0, \\ bc + d^2 &= 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika alternatywa warunków $b = 0$ lub $a+d = 0$. Rozważmy zatem pierwszą możliwość $b = 0$. Wtedy pierwsze równanie przyjmuje postać $a^2 = 1$, a czwarte $d^2 = 0$. Stąd $a = 1$ lub $a = -1$ oraz $d = 0$. Ponieważ $a + d = \pm 1 \neq 0$, więc z trzeciego równania wynika, że $c = 0$. Ostatecznie otrzymaliśmy w tym przypadku dwa rozwiązania $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$ lub $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$. Jeżeli natomiast $a + d = 0$, to drugie i trzecie równania są spełnione dla dowolnych liczb zespolonych $b$ i $c$. Równanie czwarte przyjmuje wtedy postać $bc + a^2 = 0$ i jest sprzeczne z pierwszym równaniem. Uzyskana sprzeczność wyklucza tę możliwość. Rozważane równanie macierzowe ma zatem tylko dwa rozwiązania

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**b)** Z postaci równania wynika, że macierz $X$ jest macierzą kwadratową stopnia 2. Niech zatem $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in C$. Równanie macierzowe przyjmie wtedy postać

$$\begin{bmatrix} a & a+b & 2a+b \\ c & c+d & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix},$$

która jest równoważna układowi równań

$$\begin{cases} a = 1, \\ a+b = 1, \\ 2a+b = 2, \\ c = 3, \\ c+d = 5, \\ 2c+d = 8. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest czwórka liczb $a = 1$, $b = 0$, $c = 3$, $d = 2$. Rozwiązaniem rozważanego równania jest zatem macierz

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

**c)** Niech $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in C$, będzie szukaną macierzą. Wtedy z warunku

$$X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}, \quad \text{który jest równoważny układowi} \quad \begin{cases} a^2 - d^2 = 0 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases}.$$

Możliwe są zatem dwa przypadki $a = d$ lub $a = -d$. Jeżeli $a = d$, to $ab = ac = 0$ i $bc = 1 - a^2$. Wtedy dla $a = 0$ mamy $bc = 1$. Macierz $X$ jest więc postaci

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Gdy $a \neq 0$, to $b = c = 0$ i wtedy $a = 1$ lub $a = -1$. W tym przypadku macierz $X$ ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Natomiast w drugim przypadku, gdy $a = -d$, otrzymamy zależność $bc = 1 - a^2$. Wtedy dla $b = 0$ mamy $a = 1$ lub $a = -1$, przy czym $c$ jest dowolne. Jeżeli jednak $b \neq 0$, to $c = \frac{1-a^2}{b}$. Macierz $X$ jest więc w tym przypadku odpowiednio postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

Zatem rozwiązaniem równania są tylko macierze $X$ postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } a, b, c \in C,\ b \neq 0.$$

**• Przykład 3.6**

Korzystając z własności działań z macierzami oraz własności operacji transponowania macierzy uzasadnić podane tożsamości:

**a)** $(A-B)^T = A^T - B^T$, gdzie $A$ i $B$ są macierzami tych samych wymiarów;

**b)** $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, gdzie $A$ i $B$ są przemiennymi macierzami kwadratowymi tych samych stopni.

**Uwaga.** Mówimy, że macierze $A$ i $B$ są przemienne, gdy spełniają warunek

$$AB = BA.$$

**Rozwiązanie**

**a)** W dowodzie wykorzystamy następujące własności transpozycji macierzy: $(A+B)^T = A^T + B^T$ oraz $(\alpha A)^T = \alpha\left(A^T\right)$, gdzie $A$ i $B$ są macierzami tych samych wymiarów, a $\alpha$ jest liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Mamy

$$(A-B)^T = [A+(-1)B]^T = A^T + [(-1)B]^T = A^T + \left(-B^T\right) = A^T - B^T.$$

**b)** W dowodzie wykorzystamy wzór $(A \pm B)C = AC \pm BC$, gdzie $A$, $B$ są macierzami wymiaru $n \times m$, a $C$ jest macierzą wymiaru $m \times k$ oraz wzór $D(A \pm B) = DA \pm DB$, gdzie $D$ jest macierzą wymiaru $l \times n$. Dla macierzy przemiennych mamy

$$\begin{aligned}(A-B)(A+B) &= A(A+B) - B(A+B) = \left(A^2 + AB\right) - \left(BA + B^2\right) \\ &= A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2.\end{aligned}$$

## Definicja indukcyjna wyznacznika

**• Przykład 3.7**

Obliczyć podane wyznaczniki drugiego i trzeciego stopnia:

**a)** $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{5}-2 \\ \sqrt{5}+2 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$;

**c)** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$, gdzie $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Mamy

$$\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & \sqrt{5}-2 \\ \sqrt{5}+2 & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix} = \left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right) = -2.$$

**b)** Mamy

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha) - 1 \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Do obliczania wyznaczników trzeciego stopnia zastosujemy regułę Sarrusa

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi).$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \ominus \quad \oplus \quad \oplus \quad \oplus$$

**c)** Mamy

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= [(-1)\cdot(-2)\cdot 6 + 5\cdot 0\cdot(-1) + 4\cdot 3\cdot 3] - [4\cdot(-2)\cdot(-1) + (-1)\cdot 0\cdot 3 + 5\cdot 3\cdot 6]$$
$$= 48 - 98 = -50.$$

**d)** Zauważmy najpierw, że liczba $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ jest jednym z elementów zbioru $\sqrt[3]{1}$. Zatem $z^3 = 1$. Tak więc mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \left(1 + z^3 + z^6\right) - \left(z^3 + z^3 + z^3\right) = z^6 - 2z^3 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

## • Przykład 3.8

Napisać rozwinięcie Laplace'a podanych wyznaczników względem wskazanego wiersza lub kolumny:

**a)** $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$, druga kolumna; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$, czwarty wiersz.

**Rozwiązanie**

Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika macierzy kwadratowej $A$ stopnia $n \geqslant 2$ względem $i$-tego wiersza ma postać

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \ldots + a_{in}D_{in},$$

gdzie $D_{ij}$ oznacza dopełnienie algebraiczne elementu $a_{ij}$ tej macierzy, tj. wyznacznik macierzy powstałej przez skreślenie $i$-tego wiersza i $j$-tej kolumny tej macierzy, pomnożony przez $(-1)^{i+j}$. Podobnie wygląda wzór na rozwinięcie Laplace'a wyznacznika względem $j$-tej kolumny

$$\det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \ldots + a_{nj}D_{nj}.$$

**a)** Rozwinięcie rozważanego wyznacznika względem drugiej kolumny ma postać

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**b)** Rozwinięcie rozważanego wyznacznika względem czwartego wiersza ma postać

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & -1 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & -4 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{4+2}\,|?|$$

$$+2\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 7\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 6 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$$

W wyznaczniku występującym w drugim iloczynie nie ma potrzeby wypisywania wszystkich elementów, gdyż ten iloczyn i tak będzie równy 0.

## Przykład 3.9

Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć podane wyznaczniki. Wyznaczniki rozwinąć względem wiersza lub kolumny z największą liczbą zer.

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix};\quad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

**Rozwiązanie**

**a)** Pierwszy wyznacznik obliczymy stosując rozwinięcie Laplace'a względem drugiego wiersza. Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Do obliczania wyznaczników trzeciego stopnia zastosujemy regułę Sarrusa. Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2+16+0)-(0+4+6) = 4.$$

oraz

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (2+4+18)-(8-6-3) = 25.$$

Poszukiwany wyznacznik jest zatem równy $1\cdot 4 + (-3)\cdot 25 = -71$.

**b)** Drugi wyznacznik obliczymy stosując rozwinięcie Laplace'a względem czwartej kolumny. Mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Otrzymany wyznacznik czwartego stopnia obliczymy stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza. Mamy

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+1\cdot(-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Otrzymane wyznaczniki trzeciego stopnia obliczymy za pomocą reguły Sarrusa. Mamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (8 - 75 - 1) - (10 - 6 - 10) = -62,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4 + 45 + 0) - (5 + 0 + 6) = 38,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2 + 30 + 0) - (-25 + 0 - 3) = 56.$$

Poszukiwany wyznacznik jest zatem równy

$$(-2)\left[(-3)\cdot(-62) + 4\cdot 38 + (-1)\cdot 56\right] = -564.$$

## • Przykład* 3.10

Korzystając z zasady indukcji matematycznej uzasadnić podane tożsamości ($n$ oznacza stopień wyznacznika):

**a)** $$W_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3^{n+1} - 2^{n+1},$$ $n$ – stopień wyznacznika;

$$\textbf{b)}\ V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \end{vmatrix} = 1,\ n \text{ – stopień wyznacznika.}$$

**Rozwiązanie**

**a)** Obliczymy najpierw wartości wyznacznika $W_n$ dla $n = 1$ oraz $n = 2$. Mamy

$$W_1 = |5| = 5 = 3^2 - 2^2$$

oraz

$$W_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19 = 3^3 - 2^3.$$

Zatem wzór

$$W_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$

jest prawdziwy dla $n = 1$ i $n = 2$. Niech $n \geqslant 2$ będzie dowolną liczbą naturalną. Załóżmy, że rozważana tożsamość jest prawdziwa dla $n - 1$ oraz $n$. Wykażemy jej prawdziwość dla $n + 1$. Rozwijając wyznaczniki stopnia $n + 1$ względem pierwszego wiersza i następnie rozwijając drugi z otrzymanych wyznaczników względem pierwszej kolumny dostaniemy

$$W_{n+1} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5W_n - 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5W_n - 6W_{n-1}.$$

Korzystając teraz z założenia indukcyjnego otrzymamy dalej

$$W_{n+1} = 5W_n - 6W_{n-1} = 5\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) - 6\left(3^n - 2^n\right) = 3^{n+2} - 2^{n+2}.$$

Z zasady indukcji wynika, że badana tożsamość jest prawdziwa dla każdego $n \in N$.

**b)** Obliczamy wartość wyznacznika $V_n$ dla $n = 1$. Mamy

$$V_1 = |1| = 1.$$

Niech $n$ będzie dowolną liczbą naturalną. Załóżmy, że rozważana tożsamość jest prawdziwa dla liczby $n$. Wykażemy jej prawdziwość dla liczby $n + 1$. W wyznaczniku $V_{n+1}$

od elementów drugiego, trzeciego, ..., $n+1$ wiersza odejmujemy elementy pierwszego wiersza, a otrzymany wyznacznik rozwijamy względem pierwszej kolumny. Zatem

$$V_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n & n+1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{w_2-w_1 \\ w_3-w_1 \\ \vdots \\ w_n-w_1 \\ w_{n+1}-w_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix} = V_n.$$

Korzystając teraz z założenia indukcyjnego $V_n = 1$, otrzymamy równość $V_{n+1} = 1$. Z zasady indukcji wynika, że badana tożsamość jest prawdziwa dla każdego $n \in N$.

## Własności wyznaczników

### • Przykład 3.11

Nie obliczając wyznaczników znaleźć rozwiązania podanych równań:

**a)** $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0;$ **b)** $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 & 3 \\ -1 & 1-x^2 & -9 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & x^2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

**Rozwiązanie**

**a)** Łatwo zauważyć, że wyznacznik po lewej stronie równania zeruje się dla $x = 0$ (pierwsza i trzecia kolumna są takie same); $x = 2$ (druga i trzecia kolumna są takie same); $x = 6$ (trzecia i czwarta kolumna są takie same). Ponadto z rozwinięcia Laplace'a wynika, że lewa strona równania jest wielomianem stopnia trzeciego. Ponieważ wielomian tego stopnia ma nie więcej niż trzy pierwiastki, więc 0, 2 i 6 są jedynymi pierwiastkami naszego równania.

**b)** Jak powyżej łatwo zauważyć, że wyznacznik po lewej stronie równania zeruje się dla $x = -1$, $x = 1$ (pierwsza i czwarta kolumna są proporcjonalne); $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$ (druga i czwarta kolumna są proporcjonalne); $x = -3$, $x = 3$ (trzecia i czwarta kolumna są proporcjonalne). Ponadto z rozwinięcia Laplace'a wynika, że lewa strona równania jest wielomianem stopnia szóstego. Jak wiadomo wielomian szóstego stopnia ma co najwyżej sześć pierwiastków, więc wskazane powyżej liczby są jedynymi pierwiastkami naszego równania.

## Przykład 3.12

Obliczyć podane wyznaczniki wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -4 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}.$$

**Rozwiązanie**

**a)** Odejmując pierwszy wiersz od drugiego oraz trzeci od czwartego otrzymamy wyznacznik, w którym drugi i czwarty wiersz są takie same. Zatem

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} \underset{w_4 - w_3}{\overset{w_2 - w_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{w_2 = w_4}{=\!=\!=} 0.$$

**b)** Wykonując wskazane operacje elementarne na wierszach i kolumnach otrzymamy

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -4 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{w_3 - w_5 \\ w_4 - w_5}}{\overset{\substack{w_1 - w_5 \\ w_2 - w_5}}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{k_5 + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-6)^4 = 11\,664.$$

## Przykład 3.13

Obliczyć podane wyznaczniki stopnia $n \geqslant 2$ wykorzystując występujące w nich regularności:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 1 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 1 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

**Rozwiązanie**

**a)** Dodając pierwszy wiersz kolejno do drugiego, trzeciego, ... i ostatniego wiersza otrzymamy macierz trójkątną górną. Wykorzystując następnie fakt, że wyznacznik takiej macierzy jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \overset{\substack{w_2+w_1 \\ w_3+w_1 \\ \vdots \\ w_n+w_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n!.$$

**b)** Najpierw do pierwszego wiersza dodajemy wszystkie pozostałe. Potem z pierwszego wiersza wyłączamy wspólny czynnik. Następnie pierwszy wiersz pomnożony przez 5 odejmujemy kolejno od wiersza drugiego, trzeciego, ..., i ostatniego. W wyniku tych operacji otrzymamy macierz trójkątną górną, której wyznacznik jest równy iloczynowi elementów stojących na głównej przekątnej. Zatem

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 1 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 1 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 1 \end{vmatrix} \underset{w_1 : (5n-4)}{\overset{w_1+(w_2+w_3+\dots+w_n)}{=\!=\!=\!=\!=}} (5n-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 5 & 1 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 1 & \dots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{w_2-5w_1 \\ w_3-5w_1 \\ \vdots \\ w_n-5w_1}}{=\!=\!=} (5n-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -4 \end{vmatrix} = (5n-4) \cdot (-4)^{n-1}.$$

## Przykład 3.14

Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych wyznaczników (powodujące obniżenie ich stopni) obliczyć:

**a)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

**Rozwiązanie**

Celem przekształceń będzie uzyskanie w wybranym wierszu lub kolumnie wyznacznika tylko jednego elementu niezerowego (najlepiej jedynki). Wtedy zastosowanie rozwinięcia Laplace'a względem tego wiersza lub tej kolumny spowoduje obniżenie o 1 stopnia obliczanego wyznacznika. Do przekształceń będziemy wybierać wiersze lub kolumny zawierające „wiele" zer i „małych" liczb całkowitych, co znacznie uprości obliczenia.

**a)** Wykonując wskazane operacje elementarne na wierszach otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 2 & \boxed{1} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[w_4+w_1]{w_2-2w_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{-1} \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{w_3+2w_2} -\begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 46.$$

**b)** Wykonując zaznaczone operacje elementarne na wierszach mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & \boxed{1} & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[w_5-w_3]{w_4-2w_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[w_4+w_1]{\substack{w_2-2w_1 \\ w_3+w_1}} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & -20 \\ 0 & -2 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{w_2\cdot(-1)} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 20 \\ -2 & 5 & 14 \\ 1 & 3 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal[w_3-w_1]{w_2+2w_1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 20 \\ 0 & 11 & 54 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -55.$$

## • Przykład* 3.15

Korzystając z algorytmu Chió obliczyć podane wyznaczniki:

**a)** $\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

**Rozwiązanie**

Algorytm Chió pozwala obliczać wyznaczniki przez kolejne obniżanie ich stopni. Wyznacznik macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia $n \geqslant 3$, w której element $a_{11}$ jest niezerowy, wyraża się wzorem

$$\det A = \frac{1}{(a_{11})^{n-2}} \cdot \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} \\ a'_{32} & a'_{33} & \dots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & a'_{n3} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix}, \text{ gdzie } a'_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} \text{ dla } 2 \leqslant i, j \leqslant n.$$

**a)** Postępując zgodnie z algorytmem Chió otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -9 & 44 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 25 = 50.$$

**b)** Stosując dwukrotnie algorytm Chió kolejno otrzymamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & -1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1^{4-2}} \cdot \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -3 & -5 \\ -8 & -4 & -1 \\ -15 & -19 & -7 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-2)^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -15 & -19 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -15 & -7 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{vmatrix} -16 & -38 \\ -7 & -61 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 19 \\ 7 & 61 \end{vmatrix} = -355.$$

## Macierz odwrotna

**Przykład 3.16**

Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do podanych:

**a)** $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

**Rozwiązanie**

Wzór określający macierz odwrotną do nieosobliwej macierzy kwadratowej $A$ stopnia $n$ ma postać

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

gdzie $D_{ij}$ oznacza dopełnienie algebraiczne elementu $a_{ij}$ tej macierzy.

**a)** Dla macierzy z ćwiczenia a) mamy $\det A = (1+i)(1-i) - 1^2 = 1$ oraz

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\det[1-i] = 1-i, \quad D_{12} = (-1)^{1+2}\det[1] = -1,$$
$$D_{21} = (-1)^{2+1}\det[1] = -1, \quad D_{22} = (-1)^{2+2}\det[1+i] = 1+i.$$

Zatem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ -1 & 1+i \end{bmatrix}.$$

**b)** Dla macierzy z ćwiczenia b) mamy

$$\det A = [2\cdot 3\cdot(-3) + 5\cdot 4\cdot 5 + 7\cdot 6\cdot(-2)] - [7\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot(-2) + 6\cdot 5\cdot(-3)] = -1$$

oraz

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38,$$

$$D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27, \quad D_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$D_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41, \quad D_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29,$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34,$$

$$D_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

Zatem

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T = -\begin{bmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

## Przykład 3.17

Korzystając z metody bezwyznacznikowej obliczyć macierze odwrotne do podanych:

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

**Rozwiązanie**

Bezwyznacznikowa metoda znajdowania macierzy odwrotnej polega na wykonywaniu tych samych operacji elementarnych na **wierszach** macierzy wyjściowej oraz macierzy jednostkowej. Celem tych operacji jest sprowadzenie macierzy wyjściowej do macierzy jednostkowej. Macierz jednostkowa przechodzi wtedy na macierz odwrotną do wyjściowej.

$$\left[A|I\right] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} \left[I|A^{-1}\right].$$

**a)** Wykonując te same operacje na wierszach rozważanej macierzy oraz macierzy jednostkowej otrzymamy kolejno

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - 3w_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-w_2]{w_1 + 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

**b)** Wykonując te same operacje na wierszach rozważanej macierzy oraz macierzy jednostkowej otrzymamy kolejno

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 + w_1]{\substack{w_1 : 2 \\ w_3 : 2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - 2w_2]{w_1 - 2w_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \longleftrightarrow w_4]{w_2 \longleftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Przykład 3.18

Rozwiązać podane równania macierzowe wykorzystując operację odwracania macierzy:

**a)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; **b)** $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Mamy

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = 4X + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**b)** Mnożąc obie strony rozważanego równania prawostronnie przez macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

otrzymamy

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Ponieważ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

więc

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Przykład 3.19

Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej $A$ stopnia $n$, jeżeli:

**a)** $A^2 = A^T$; **b)** $A^T - A^{-1} = \mathbf{O}$; **c)** $A^2 + A^{-1} = \mathbf{O}$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy następujące własności wyznaczników:

$$\det\left(A^T\right) = \det A,\ \det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1};$$
$$\det\left(A^k\right) = (\det A)^k,\ \text{gdzie } k \in N;$$
$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A,\ \text{gdzie } n \text{ oznacza stopień macierzy } A.$$

**a)** Korzystając z tych własności kolejno otrzymamy

$$\det\left(A^2\right) = \det\left(A^T\right) \Longrightarrow (\det A)^2 = \det A \Longleftrightarrow \det A = 1 \text{ lub } \det A = 0.$$

Zatem jedynymi możliwymi wartościami wyznacznika macierzy $A$ są 0 i 1. Przyjmując $A = [0]$ i $A = [1]$ widzimy, że obie te wartości są realizowane.

**b)** Korzystając z własności podanych na początku rozwiązania otrzymamy

$$A^T - A^{-1} = \mathbf{O} \Longleftrightarrow A^T = A^{-1} \Longrightarrow \det\left(A^T\right) = \det\left(A^{-1}\right)$$
$$\Longleftrightarrow \det A = (\det A)^{-1} \Longleftrightarrow \det A = 1 \text{ lub } \det A = -1.$$

Zatem jedynymi możliwymi wartościami wyznacznika macierzy $A$ są liczby $-1$ i 1. Przyjmując $A = [1]$ i $A = [-1]$ widzimy, że obie te wartości są realizowane.

**c)** Korzystając, jak poprzednio, z przytoczonych na wstępie rozwiązania własności wyznaczników kolejno otrzymamy

$$A^2 + A^{-1} = \mathbf{O} \Longleftrightarrow A^2 = -A^{-1} \Longrightarrow \det\left(A^2\right) = \det\left(-A^{-1}\right)$$
$$\Longleftrightarrow (\det A)^2 = (-1)^n (\det A)^{-1} \Longleftrightarrow (\det A)^3 = (-1)^n,$$

gdzie $n$ oznacza stopień macierzy $A$. Zatem jedyną możliwą wartością wyznacznika macierzy rzeczywistej stopnia nieparzystego jest liczba $-1$, a macierzy stopnia parzystego jest 1. Przyjmując

$$A = [-1] \text{ oraz } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

widzimy, że obie wartości wyznacznika są realizowane.

# Zadania

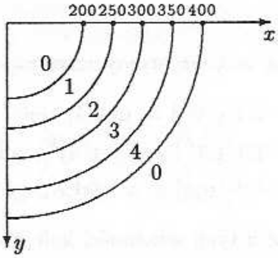
## ○ Zadanie 3.1

**a)** Zaproponować opis, w formie macierzy złożonej z liczb całkowitych, położenia figur w grze w szachy. W jaki sposób można by sprawdzić, czy dana macierz odzwierciedla pozycję możliwą do uzyskania w czasie gry?

**b)** Zaproponować zapis, w postaci jednej macierzy, odległości drogowych i kolejowych w km między stolicami wszystkich województw w Polsce.

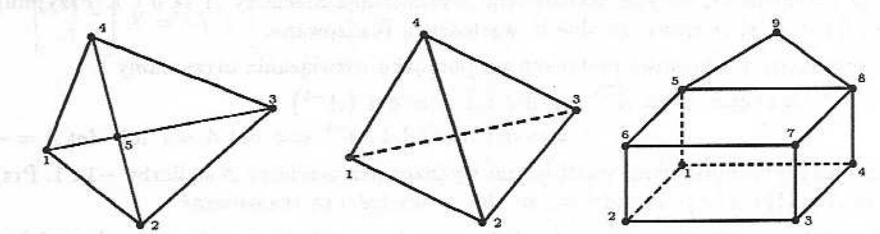
**c)** Ekran monitora komputerowego jest złożony z $1024 \times 768$ punktów. Każdy punkt może świecić jednym z 20 kolorów. Kolorowe obrazy na ekranie można zapisywać w postaci macierzy złożonej z liczb całkowitych. Założyć, że ekran monitora przedstawia pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych, z początkiem układu w lewym górnym rogu ekranu. Zapisać w formie macierzy przybliżony kształt ćwiartki kolorowej tęczy złożonej z pierścieni kołowych (rysunek).

Na rysunku:
0 – oznacza kolor biały,
1 – oznacza kolor niebieski,
2 – oznacza kolor zielony,
3 – oznacza kolor żółty,
4 – oznacza kolor czerwony.




**d)** Na rysunkach przedstawiono konstrukcje prętowe z ponumerowanymi węzłami:

1) płaski czworokąt z przekątnymi; 2) czworościan; 3) konstrukcja przestrzenna




Zapisać w postaci macierzy schemat bezpośrednich połączeń między węzłami.

## ○ Zadanie 3.2

Obliczyć:

**a)** $2\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

**c)** $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$;

**e)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

## ○ Zadanie 3.3

Rozwiązać podane równania macierzowe i układy równań macierzowych:

**a)** $X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}\right)$;

**b)** $2Y \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Y \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{cases} X+Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\ X-Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{cases}$ d) $\begin{cases} X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$

## ○ Zadanie 3.4

Obliczyć kilka początkowych potęg macierzy $A$, następnie wysunąć hipotezę o postaci macierzy $A^n$, gdzie $n \in \boldsymbol{N}$ i uzasadnić ją za pomocą indukcji matematycznej, jeżeli:

**a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$;

**c)** $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, gdzie $\alpha \in \boldsymbol{R}$; **d)** $A = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{bmatrix}$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$;

**e)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **f*)** $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, gdzie $a \in \boldsymbol{R}$;

**g*)** $A = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = 0$ dla $i \geqslant j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$.

## ○ Zadanie 3.5

Układając odpowiednie układy równań znaleźć wszystkie macierze zespolone $X$ spełniające podane równania macierzowe:

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $X = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$;

**c)** $X - iX^T = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 6-2i & -2 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

**e)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$;

**g)** $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; **h)** $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

**i)** $X \cdot X^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $X$ jest tu macierzą stopnia 2; **j)** $X \cdot X^T = X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

## ○ Zadanie 3.6

Korzystając z własności działań z macierzami oraz własności operacji transponowania macierzy uzasadnić podane tożsamości:

**a)** $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, gdzie $A, B, C$ są macierzami o wymiarach odpowiednio $n \times m$, $m \times k$, $k \times l$;

**b)** $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$, gdzie $A$ i $B$ są przemiennymi macierzami kwadratowymi tych samych stopni.

**Uwaga.** Mówimy, że macierze $A$ i $B$ są przemienne, gdy spełniają warunek $AB = BA$.

**c*)** $(A + I)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}A + \binom{n}{n}I$,
gdzie $A$ i $I$ są macierzami kwadratowymi tych samych stopni, przy czym $I$ jest macierzą jednostkową.

○ **Zadanie 3.7**

Obliczyć podane wyznaczniki drugiego i trzeciego stopnia:

**a)** $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

**c)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

○ **Zadanie 3.8**

Napisać rozwinięcia Laplace'a podanych wyznaczników względem wskazanego wiersza lub kolumny:

**a)** $\begin{vmatrix} i & 1+i & 2 \\ 1-2i & 3 & -i \\ -4 & 1-i & 3+i \end{vmatrix}$, trzecia kolumna; **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$, drugi wiersz.

○ **Zadanie 3.9**

Stosując rozwinięcie Laplace'a obliczyć podane wyznaczniki. Wyznaczniki rozwinąć względem wiersza lub kolumny z największą liczbą zer.

**a)** $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

○ **Zadanie* 3.10**

Korzystając z zasady indukcji matematycznej uzasadnić podane tożsamości ($n$ oznacza stopień wyznacznika):

**a)** $W_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 4 & 5 \end{vmatrix} = \frac{4^{n+1}-1}{3}$; **b)** $W_{2n} = \begin{vmatrix} a & \ldots & 0 & 0 & \ldots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a & b & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & b & a & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \ldots & 0 & 0 & \ldots & a \end{vmatrix} = \left(a^2-b^2\right)^n$;

c) $W_n = \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = \dfrac{\sin[(n+1)x]}{\sin x}$,

gdzie $x \neq k\pi$ oraz $k \in \mathbf{Z}$.

○ **Zadanie 3.11**

Nie obliczając wyznaczników znaleźć rozwiązania podanych równań:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5-x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & x & -3 & 4x \\ 1 & -2 & x & -4 \\ -1 & x & -x & x+3 \end{vmatrix} = 0$.

○ **Zadanie 3.12**

Obliczyć podane wyznaczniki wykorzystując występujące w nich regularności:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

○ **Zadanie 3.13**

Obliczyć podane wyznaczniki stopnia $n \geqslant 2$ wykorzystując występujące w nich regularności:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$; c*) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix}$.

○ **Zadanie 3.14**

Stosując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych wyznaczników (powodujące obniżenie ich stopni) obliczyć:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 7 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

**Zadanie* 3.15**
Korzystając z algorytmu Chió obliczyć podane wyznaczniki:

**a)** $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

**Zadanie 3.16**
Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej znaleźć macierze odwrotne do podanych:

**a)** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, gdzie $\alpha \in \boldsymbol{R}$; **c)** $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

**Zadanie 3.17**
Korzystając z metody bezwyznacznikowej obliczyć macierze odwrotne do podanych:

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

**Zadanie 3.18**
Rozwiązać podane równania macierzowe wykorzystując operację odwracania macierzy:

**a)** $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

**c)** $\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4 \cdot X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; **d)** $3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot X$.

**Zadanie 3.19**
Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej $A$ stopnia $n$, jeżeli:
**a)** $A^2 = 8A^{-1}$; **b)** $A^3 - A = 0$; **c)** $A^T = 4A^{-1}$?

# 4

# Układy równań liniowych

## Przykłady

### Układy Cramera

**Przykład 4.1**

Dla jakich wartości parametru $p$ podane układy równań są układami Cramera:

**a)** $\begin{cases} 6p^2x - 3y = 3p \\ 2x - y = 7 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 3y + 3z = px \\ 3x + y + 3z = py \\ 3x + 3y + z = pz \end{cases}$ ?

**Rozwiązanie**

Liniowy układ równań postaci $AX = B$ jest układem Cramera, jeżeli macierz $A$ tego układu jest macierzą kwadratową o wyznaczniku różnym od zera.

**a)** W zapisie macierzowym rozważany układ ma postać

$$\begin{bmatrix} 6p^2 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3p \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik macierzy tego układu jest równy

$$\det A = \begin{vmatrix} 6p^2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6\left(1 - p^2\right).$$

Dany układ jest zatem układem Cramera dla $p \neq -1$ oraz $p \neq 1$.

**b)** Zapisując rozważany układ macierzowo mamy

$$\begin{bmatrix} 1-p & 3 & 3 \\ 3 & 1-p & 3 \\ 3 & 3 & 1-p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dalej

$$\det A = \begin{vmatrix} 1-p & 3 & 3 \\ 3 & 1-p & 3 \\ 3 & 3 & 1-p \end{vmatrix} \underset{w_2 - w_3}{\overset{w_1 - w_3}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -2-p & 0 & 2+p \\ 0 & -2-p & 2+p \\ 3 & 3 & 1-p \end{vmatrix} \overset{k_3 + (k_1 + k_2)}{=\!=\!=\!=}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-p & 0 & 0 \\ 0 & -2-p & 0 \\ 3 & 3 & 7-p \end{vmatrix} = (2+p)^2(7-p).$$

Układ ten jest więc układem Cramera dla $p \neq -2$ oraz $p \neq 7$.

## Przykład 4.2

Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

**a)** $\begin{cases} 9x - 8y = 4 \\ 7x + 2y = 3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ x - 5z = 0 \end{cases}$.

**Rozwiązanie**

Jedyne rozwiązanie układu Cramera postaci $AX = B$ z niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wyraża się wzorem

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A},$$

gdzie $A_k$ oznacza macierz powstałą z macierzy $A$ przez zastąpienie jej $k$-tej kolumny przez kolumnę wyrazów wolnych $B$.

**a)** Mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 74, \ \det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 32, \ \det A_2 = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

zatem $x = \frac{16}{37}$, $y = -\frac{1}{74}$.

**b)** Tutaj

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 28, \ \det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 15,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 8, \ \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

Stąd wynika, że $x = \frac{15}{28}$, $y = \frac{2}{7}$, $z = \frac{3}{28}$.

## Przykład 4.3

Stosując wzór Cramera obliczyć niewiadomą $x$ spełniającą układ równań:

$$12 + x + y = 10 + y + z = 8 + z + u = 6 + u + v = 10x + v = 15.$$

**Rozwiązanie**

Dany układ zapisujemy w postaci

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ z + u = 7 \\ u + v = 9 \\ 10x + v = 15 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Liczbę $x$ obliczamy ze wzoru $x = \dfrac{\det A_1}{\det A}$, gdzie

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 - 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 13 = 11.$$

Stąd $x = \dfrac{11}{11} = 1.$

## Przykład 4.4

Rozwiązać podane układy równań metodą macierzy odwrotnej:

**a)** $\begin{cases} x + 7y = 2 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x - 2y + 3z = -7 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x + 5y + z = 18 \end{cases}$.

**Rozwiązanie**

Rozwiązanie $X$ układu Cramera postaci $AX = B$ będziemy wyznaczać ze wzoru

$$X = A^{-1}B.$$

**a)** Zapisując układ równań w postaci macierzowej otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \frac{-1}{15} \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

czyli $x = \dfrac{13}{3}$, $y = -\dfrac{1}{3}$.

**b)** Podobnie jak w poprzednim przykładzie mnożymy lewostronnie układ równań w postaci macierzowej przez macierz odwrotną do macierzy układu. Otrzymamy wtedy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -19 & 17 & -11 \\ 5 & -5 & 5 \\ 13 & -9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

czyli $x = 2, y = 3, z = -1$.

## Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera–Capellego

### • Przykład 4.5

Znaleźć rzędy podanych macierzy wskazując niezerowe minory maksymalnych stopni:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Rozwiązanie**

Rzędem macierzy nazywamy największy stopień niezerowego minora tej macierzy, czyli wyznacznika obliczonego z wybranych wierszy i kolumn tej macierzy.

**a)** Dana macierz ma wymiar $3 \times 4$, a więc jej rząd może być równy $0, 1, 2$ lub $3$. Wartości $0$ i $1$ można od razu wykluczyć, gdyż łatwo wskazać niezerowy minor stopnia 2, np. minor $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$ leżący w lewym górnym rogu macierzy. Należy teraz poszukać niezerowego minora stopnia 3. Obliczamy wszystkie możliwe minory stopnia 3. Mamy

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 9 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 9 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 9 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd wynika, że nie istnieje niezerowy minor stopnia 3, więc rząd danej macierzy jest równy 2.

**b)** Wszystkie minory danej macierzy zawierające parzyste wiersze lub parzyste kolumny są zerami. Minorem najwyższego stopnia nie zawierającym tych wierszy ani kolumn jest minor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd wynika, że rząd danej macierzy jest mniejszy od 3. Wśród minorów stopnia 2 istnieje minor niezerowy, np. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Rząd danej macierzy jest więc równy 2.

### • Przykład 4.6

Wykonując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych macierzy obliczyć ich rzędy:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}.$$

**Rozwiązanie**

Wykorzystamy twierdzenie mówiące, że bez zmiany rzędu macierzy można w niej zamieniać wiersze (kolumny), mnożyć ustalony wiersz (kolumnę) przez stałą różną od zera oraz do ustalonego wiersza (kolumny) dodać inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez stałą. Ponadto rząd macierzy nie ulegnie zmianie, jeśli skreślimy w niej wiersz (kolumnę) złożoną z samych zer lub też jeden z dwóch wierszy (kolumn) równych lub proporcjonalnych. Również transponowanie macierzy nie wpływa na jej rząd. Badaną macierz będziemy więc przekształcać bez zmiany jej rzędu do postaci, z której ten rząd można łatwo odczytać, np. z postaci trójkątnej lub blokowej, z dużą liczbą zer oraz jak najmniejszego wymiaru.

**a)** W tym przypadku zastosujemy fragment algorytmu Gaussa otrzymując:

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4-2w_1]{\substack{w_2-4w_1 \\ w_3-w_1}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\cancel{w}_4=\frac{2}{7}w_2]{\cancel{w}_3=\frac{4}{7}w_2} \operatorname{rz}\left[\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 7 \end{matrix} \end{matrix}\right] = 2.$$

Zauważmy, że wynik uzyskaliśmy szybciej doprowadzając pierwszy wiersz do postaci $[1\,0\,0]$ przez wykonanie operacji $k_2 - 3k_1$.

**b)** Wykorzystamy prawidłowość w ułożeniu elementów macierzy. Łatwo zauważyć, że wiersze macierzy złożone są z kolejnych liczb naturalnych, przy czym w wierszach nieparzystych tworzą one ciągi rosnące, a w parzystych malejące. Dlatego też sumy sąsiednich wierszy są ciągami stałymi. Dzięki temu można szybko obliczyć, że

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2+w_1]{\substack{w_4+w_3 \\ w_3+w_2}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\cancel{w}_4=3w_2]{\cancel{w}_3=2w_2} \operatorname{rz}\left[\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 \\ 10 & 10 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{matrix} \end{matrix}\right] = 2.$$

## • Przykład 4.7

Sprowadzając podane macierze do postaci schodkowej wyznaczyć ich rzędy:

**a)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.

**Rozwiązanie**

Macierz nazywamy schodkową, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach znajdują się w kolumnach o rosnących numerach. Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej schodków. Dokonując podanych niżej operacji elementarnych na wierszach macierzy otrzymamy:

**a)**

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_5+w_1]{w_3-w_1} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_4-w_2]{w_3-w_2} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} =$$

$$\xlongequal{w_5 - w_4} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 4.$$

**b)**

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xlongequal[\substack{w_4 - 2w_1 \\ w_6 + w_1}]{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 + w_1}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \xlongequal[\substack{w_5 - w_2 \\ w_6 + w_2}]{\substack{w_3 - 2w_2 \\ w_4 + w_2}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{w_6 - 3w_5} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

## • Przykład 4.8

Wyznaczyć rzędy podanych macierzy w zależności od parametru rzeczywistego $p$:

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & 2 & p-1 \\ p+2 & 3 & p \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Minorem najwyższego stopnia dla danej macierzy jest jej wyznacznik równy

$$\begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{vmatrix} = 2p(p-2).$$

Rząd tej macierzy jest więc równy 3 wtedy, gdy $2p(p-2) \neq 0$, tzn. dla $p \neq 0$ i $p \neq 2$. Dla $p = 0$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xlongequal{k_2 = 0} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

Podobnie dla $p = 2$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xlongequal[w_3 - 2w_1]{w_2 - 3w_1}$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \xlongequal{w_3 = w_2} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} = 2.$$

**b)** Łatwo sprawdzić, że wyznacznik danej macierzy jest równy 0 dla każdego $p$. To oznacza, że rząd tej macierzy nie jest nigdy równy 3. Zbadajmy teraz jeden z minorów stopnia 2, np. minor

$$\begin{vmatrix} p & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(p-1).$$

Z postaci tego wyznacznika wynika, że dla $p \neq 1$ rząd danej macierzy jest równy 2. Dla $p = 1$ znajdujemy w macierzy inny niezerowy minor stopnia 2, np.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Ostatecznie dla każdej wartości $p \in \boldsymbol{R}$ rząd danej macierzy jest równy 2.

**c)** Obliczmy jeden z minorów najwyższego stopnia np. minor

$$\begin{vmatrix} 1-p & 2 & 1 \\ 1 & 2-p & 1 \\ 1 & 2 & 1-p \end{vmatrix} = p^2(4-p).$$

Jeżeli ten minor jest niezerowy, tzn. jeżeli $p \neq 0$ i $p \neq 4$, to dana macierz ma rząd 3. Przypadki $p = 0$ i $p = 4$ zbadamy osobno. Dla $p = 0$ mamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xlongequal[k_4 = 0]{\substack{k_2 = 2k_1 \\ k_3 = k_1}} \operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1 \\ \boxed{1} \\ 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Natomiast dla $p = 4$ otrzymamy

$$\operatorname{rz}\begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix} = \operatorname{rz}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \xlongequal{w_3 - w_1}$$

$$= \operatorname{rz}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xlongequal{w_3 + 4w_2} 3.$$

## Przykład 4.9

W podanych układach równań liniowych określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz liczby parametrów:

**a)** $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 3x + y + z - t = 2 \\ 5x - y + 5z + t = 4 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 1 \\ x - y - z + 3t = 2 \\ 3x + 5y - 4z - t = 0 \end{cases}$;

**c)** $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ 5x - y - z = 2 \\ x - 10y + 4z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 2 \\ x - 2y + z + 2t = -1 \\ 2x + 3y + z + 3t = 1 \end{cases}$.

**Rozwiązanie**

Zgodnie z twierdzeniem Kroneckera-Capellego układ równań liniowych z $n$ niewiadomymi postaci $AX = B$ może nie posiadać rozwiązań albo mieć dokładnie jedno rozwiązanie albo też mieć nieskończenie wiele rozwiązań. Decydują o tym rzędy macierzy $A$ układu oraz jego macierzy rozszerzonej $[A|B]$ i wtedy odpowiednio mamy $\operatorname{rz} A \neq \operatorname{rz}[A|B]$ albo $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz}[A|B] = n$ albo też $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz}[A|B] = r < n$. W ostatnim przypadku zbiór rozwiązań zależy od $n - r$ parametrów.

**a)** Rozważmy następujące przekształcenie macierzy rozszerzonej układu

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 5 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 5w_1]{w_2 - 3w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & -4 & -1 \end{array}\right].$$

Z otrzymanej postaci wynika, że $\operatorname{rz} A = 2 = \operatorname{rz}[A|B] = r < n = 4$. Oznacza to, że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależących od $n - r = 2$ parametrów.

**b)** Zamieniamy dla wygody kolejność równań układu i przekształcamy jego macierz rozszerzoną do postaci

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 8 & -1 & -10 & -6 \end{array}\right].$$

Stąd otrzymujemy, że $\operatorname{rz} A = 3 = \operatorname{rz}[A|B] = r$. Jednocześnie $n = 4$, więc układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, a liczba parametrów jest równa $n - r = 1$.

**c)** W tym przykładzie mamy $n = 3$. Stosując wskazane operacje elementarne kolejno otrzymamy

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -10 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4 - w_1 \\ w_5 - w_1}]{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 5w_1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 14 & -6 & 2 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 = -w_2]{w_3 = 2w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Zatem $\operatorname{rz} A = 3 = \operatorname{rz}[A|B] = n$. Układ ma więc dokładnie jedno rozwiązanie.

**d)** Równanie ze współczynnikiem 1 przy zmiennej $x$ znów dla wygody dajemy na początek i przekształcamy macierz rozszerzoną układu

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - 2w_1]{w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_4 - 7w_2]{w_3 - 5w_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 - w_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Stąd

$$\operatorname{rz} A = 3 < 4 = \operatorname{rz}[A|B].$$

Więc rozważany układ równań nie ma rozwiązań.

## Przykład 4.10

Wskazać wszystkie możliwe zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami określającymi rozwiązania układu równań liniowych:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 7s + 2t = 6 \\ -x + 4y + 2z + 7s + 3t = 1 \\ 2x + y + 5z + 4s + t = 3 \end{cases}.$$

**Rozwiązanie**

Skorzystamy z faktu mówiącego, że jeżeli układ równań liniowych z $n$ niewiadomymi ma nieskończenie wiele rozwiązań, a jego macierz $A$ ma rząd równy $r$, to dowolny niezerowy minor macierzy $A$ stopnia $r$ wskazuje nam $r$ zmiennych, które można wyrazić za pomocą $n-r$ pozostałych zmiennych, czyli parametrów. Przeprowadzimy najpierw wstępną analizę macierzy rozszerzonej $[A|B]$ układu pozwalającą na ustalenie rzędów oraz wyszukanie odpowiednich minorów. Mamy

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 2w_1]{w_2 + w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 14 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -10 & -3 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_3 + 5w_2]{w_2 : 7} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{5}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & -4 \end{array}\right].$$

Stąd wynika, że $\operatorname{rz} A = 3 = \operatorname{rz}[A|B] = r < n = 5$. Wyznaczymy teraz wszystkie niezerowe minory stopnia 3 z przekształconej macierzy $A$. Spośród wszystkich $\binom{5}{3} = 10$ minorów stopnia 3 niezerowe są tylko minory zawierające piątą kolumnę. Jest ich 6, mianowicie

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{4}{7} \end{vmatrix}.$$

Przyjmując kolejno każdy z tych minorów jako podstawę rozwiązania całego układu równań (tj. układu Cramera z trzema niewiadomymi i dwoma parametrami) widzimy, że parametrami mogą być tylko zmienne pozostające poza minorem, a więc $z, s$ lub $y, s$ lub $y, z$ lub $x, s$ lub $x, z$ lub też $x, y$.

## Przykład 4.11

Określić liczby rozwiązań podanych układów równań liniowych w zależności od parametru $p$:

**a)** $\begin{cases} (2p+1)x + (p-3)y = p+1 \\ (p+2)x - 2y = 2p \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + py + z = 1 \\ 2x + y + z = p \\ x + y + pz = p^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} px + y + z = 1 \\ x + y - z = p \\ x - y + pz = 1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} px + py + pz + pt = p \\ x + py + pz + pt = p \\ x + y + pz + pt = p \\ x + y + z + pt = p \end{cases}$.

**Rozwiązanie**

Układ, w którym liczba niewiadomych jest równa liczbie równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wyznacznik macierzy $A$ tego układu jest różny od zera. Każdy przypadek wartości parametru $p$, dla którego $\det A = 0$ wymaga osobnej analizy zgodnie z twierdzeniem Kroneckera-Capellego.

**a)** Rozważany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det A = \begin{vmatrix} 2p+1 & p-3 \\ p+2 & -2 \end{vmatrix} = -p^2 - 3p + 4 = (1-p)(p+4) \neq 0,$$

tzn., gdy $p \neq -4$ i $p \neq 1$. Macierz rozszerzona układu dla $p = -4$ ma postać

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} -7 & -7 & -3 \\ -2 & -2 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 + 2w_1]{w_1 : (-7)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{50}{7} \end{array}\right].$$

Stąd wynika, że układ jest sprzeczny, gdyż $\operatorname{rz} A = 1 < 2 = \operatorname{rz} [A|B]$. Dla $p = 1$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

więc $\operatorname{rz} A = 1 = \operatorname{rz} B$. Układ równań ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

**b)** Dla układu rozważanego w tym przykładzie mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = 2p(1-p),$$

więc ma on dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $p \neq 0$ i $p \neq 1$. Przeprowadzimy teraz analizę układu dla $p = 0$ oraz $p = 1$ stosując twierdzenie Kroneckera-Capellego. Dla $p = 0$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Oznacza to, że rząd macierzy $A$ układu jest równy 2 podczas, gdy rząd macierzy rozszerzonej $[A|B]$ jest równy 3. Układ równań jest w tym przypadku sprzeczny. Dla parametru $p = 1$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

W rozważanym przypadku rzędy macierzy głównej oraz macierzy rozszerzonej układu są równe 2. Oznacza to, że układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

**c)** W kolejnym układzie równań mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3 = (p+1)(p-3),$$

więc dla $p \neq -1$ oraz $p \neq 3$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dla $p = -1$ mamy

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 - w_3]{w_1 + w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Układ równań jest w tym przypadku sprzeczny. Podobnie jest dla $p = 3$, gdyż

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 - w_3]{w_1 - 3w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -8 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right],$$

a więc $\operatorname{rz} A = 2 < 3 = \operatorname{rz}\,[A|B]$.

**d)** W ostatnim układzie równań mamy

$$\det A = \begin{vmatrix} p & p & p & p \\ 1 & p & p & p \\ 1 & 1 & p & p \\ 1 & 1 & 1 & p \end{vmatrix} \overset{\substack{w_1 - w_2 \\ w_2 - w_3}}{\underset{w_3 - w_4}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} p-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & p \end{vmatrix} = p(p-1)^3.$$

Dla $p = 0$ oraz $p = 1$ macierze rozszerzone przyjmują odpowiednio postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{oraz} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Zatem dla $p = 0$ otrzymamy, że $\operatorname{rz} A = 3 = \operatorname{rz}\,[A|B] = r < n = 4$, więc układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r = 1$ parametru. Natomiast dla $p = 1$ mamy $\operatorname{rz} A = 1 = \operatorname{rz}\,[A|B] = r < n = 4$ i układ równań ma także nieskończenie wiele rozwiązań, ale zależnych od $n - r = 3$ parametrów.

## • Przykład 4.12

Klienci sklepu spożywczego stojący przed nami w kolejce płacili kolejno: za 2 kostki masła, 2 bochenki chleba, 10 jaj, 3 litry mleka – 9.50 zł; za 1 masło, 2 chleby, 20 jaj, 1 mleko – 8.20 zł; za 3 masła, 1 chleb, 5 jaj, 2 mleka – 8.90 zł.

**a)** Chcemy kupić 2 masła, 5 chlebów, 35 jaj i 5 litrów mleka. Ile zapłacimy?
**b)** Czy po zapłaceniu za zakupione produkty poznamy ich ceny jednostkowe?
**c)** Jakiego zakupu powinniśmy dokonać. aby uzyskać każdy z tych produktów i jednocześnie poznać jego cenę jednostkową?
**d)** Wyznaczyć ceny jednostkowe. jeżeli kupując po jednej sztuce każdego z tych produktów zapłaciliśmy 3.60 zł.

**Rozwiązanie**

Niech $x, y, z, t$ oznaczając odpowiednio ceny jednostkowe kostki masła, bochenka chleba, jajka, litra mleka. Z danych zadania wynika następujący układ równań

$$\begin{cases} 2x + 2y + 10z + 3t = 9.5 \\ x + 2y + 20z + t = 8.2 \\ 3x + y + 5z + 2t = 8.9 \end{cases}.$$

**a)** Należy wyznaczyć wartość $c$ taką, że $c = 2x + 5y + 35z + 5t$. Wystarczy, aby równanie definiujące liczbę $c$ było kombinacją liniową wcześniejszych trzech równań. Mówiąc ściśle, aby istniały stałe $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3 \in \boldsymbol{R}$ takie, że

$$(2, 5, 35, 5) = \alpha_1(2, 2, 10, 3) + \alpha_2(1, 2, 20, 1) + \alpha_3(3, 1, 5, 2).$$

Stałe $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ znajdziemy rozwiązując układ równań

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 10 & 20 & 5 & 35 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - w_1]{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 20w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -5 & 1 \\ -30 & 0 & -55 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + 30w_4]{\substack{w_1 - 2w_4 \\ w_2 + 2w_4}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -85 & 85 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_2 : (-7)]{w_3 = \frac{7}{85} w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + w_2]{w_1 - 5w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \longleftrightarrow w_3]{w_3 \longleftrightarrow w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Stąd $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, więc

$$c = \alpha_1 \cdot 9.5 + \alpha_2 \cdot 8.2 + \alpha_3 \cdot 8.9 = 18.3.$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że zapłacimy 18.30 zł.

**b)** Niemożliwe jest wyznaczenie cen jednostkowych poszczególnych produktów na podstawie podanych informacji. Układ równań opisujący te cztery niewiadome nie ma jednoznacznego rozwiązania. Rząd macierzy układu pierwszych trzech równań jest oczywiście mniejszy od 4, zaś dodanie czwartego liniowo zależnego równania nie podwyższa tego rzędu do 4.

**c)** Ceny jednostkowe poszczególnych produktów moglibyśmy wyznaczyć z układu równań o macierzy rzędu 4, np. z układu Cramera. Rząd macierzy układu trzech równań napisanych na początku jest równy

$$\operatorname{rz} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 20 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \underset{w_3 - 3w_2}{\overset{w_1 - 2w_2}{=\!=\!=}} \operatorname{rz} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -2 & -30 \\ 1 & 2 & 20 \\ 0 & -5 & -55 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \end{bmatrix} = 3,$$

co zresztą można już było wcześniej wywnioskować na podstawie rachunku przeprowadzonego w punkcie **a)**. Zakup, jakiego powinniśmy dokonać, musiałby się więc składać z $k_1$ kostek masła, $k_2$ bochenków chleba, $k_3$ jaj i $k_4$ litrów mleka, gdzie $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \geqslant 1$, $k_3 \geqslant 1$, $k_4 \geqslant 1$, przy czym musi być spełniony warunek

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 20 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Warunek ten spełniony jest np. dla $k_1 = 6$, $k_2 = 5$, $k_3 = 35$, $k_4 = 1$.

**d)** Do początkowego układu trzech równań dołączamy czwarte równanie

$$x + y + z + t = 3,6.$$

Rozwiązujemy otrzymany układ czterech równań (metodą „kolumn jednostkowych")

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 10 & 3 & 9.5 \\ 1 & 2 & 20 & 1 & 8.2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 8.9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3.6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - w_2]{\substack{w_1 - 2w_2 \\ w_3 - 3w_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & -30 & 1 & -6.9 \\ 1 & 2 & 20 & 1 & 8.2 \\ 0 & -5 & -55 & -1 & -15.7 \\ 0 & -1 & -19 & 0 & -4.6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + w_1]{w_2 - w_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & -30 & 1 & -6.9 \\ 1 & 4 & 50 & 0 & 15.1 \\ 0 & -7 & -85 & 0 & -22.6 \\ 0 & 1 & 19 & 0 & 4.6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + 7w_4]{\substack{w_1 + 2w_4 \\ w_2 - 4w_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 8 & 1 & 2.3 \\ 1 & 0 & -26 & 0 & -3.3 \\ 0 & 0 & 48 & 0 & 9.6 \\ 0 & 1 & 19 & 0 & 4.6 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 : 48}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 8 & 1 & 2.3 \\ 1 & 0 & -26 & 0 & -3.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 19 & 0 & 4.6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - 19w_3]{\substack{w_1 - 8w_3 \\ w_2 + 26w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1.9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.8 \end{array}\right].$$

Stąd wynika, że czwarty zakup $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ czyni zadość warunkowi z punktu **c)** i pozwala na wyznaczenie cen jednostkowych (w złotych), które są równe $x = 1.9$, $y = 0.8$, $z = 0.2$ i $t = 0.7$.

## Metoda eliminacji Gaussa dla układów Cramera

### • Przykład 4.13

Rozwiązać podane układy Cramera metodą eliminacji Gaussa:

**a)** $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x - 2y + 3z = -7 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x + 5y + z = 18 \end{cases}$;

**c)** $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 4x + 8y - 7z + t = 1 \\ x + 2y - z + t = 1 \\ -x + y + 4z + 6t = 0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x + 4y + 2z - s = 3 \\ 2x + 9y + 6z - 2s - 3t = 5 \\ x + 2y - z - s + 5t = 5 \\ -2x - 7y + z + 3s - 4t = -5 \\ -x - 5y - z + 3s + 6t = 4 \end{cases}$.

**Rozwiązanie**

Metoda eliminacji Gaussa dla układu Cramera postaci $AX = B$ polega na rozwiązaniu tego układu poprzez doprowadzenie jego macierzy rozszerzonej $[A|B]$ do postaci $[I|X]$, gdzie $I$ oznacza macierz jednostkową. Przy przekształceniach stosuje się operacje elementarne na wierszach macierzy rozszerzonej, co schematycznie można przedstawić następująco

$$\big[A\big|B\big] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elementarne}} \big[I\big|X\big].$$

Ponieważ wszystkie wykonywane operacje przekształcają układ równań na układ mu równoważny, więc wektor $X$ pojawiający się przy końcu postępowania jest szukanym rozwiązaniem układu. Kolejność operacji przy rozwiązywaniu naszych przykładów będzie zgodna z algorytmem Gaussa sprowadzenia macierzy nieosobliwej do macierzy jednostkowej.

**a)** Przekształcamy macierz rozszerzoną danego układu równań otrzymując

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & 2 \\ -3 & 6 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2+3w_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 21 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2:21} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-5w_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Ostatni zapis oznacza, że

$$\begin{cases} 1\cdot x + 0\cdot y = -3 \\ 0\cdot x + 1\cdot y = \phantom{-}1 \end{cases},$$

zatem $x=-3$, $y=1$.

**b)** Podobnie rozwiązujemy układ z trzema niewiadomymi

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-2w_1]{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 7 & -5 & 26 \\ 0 & 9 & -5 & 32 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2:7} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 9 & -5 & 32 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3-9w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} & -\frac{10}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{w_3:\frac{10}{7}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{26}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_1+2w_2-3w_3]{w_2+\frac{5}{7}w_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Stąd wynika, że $x=2$, $y=3$, $z=-1$.

**c)** W tym przykładzie mamy

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-w_1 \\ w_4+w_1}]{w_2-4w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2\longleftrightarrow w_4} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_3:2]{w_2:3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4-5w_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_4:\left(-\frac{3}{2}\right)} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_2-\frac{1}{3}w_3-2w_4 \\ w_1-2w_2+3w_3}]{w_3-\frac{1}{2}w_4} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Stąd $x=4$, $y=-2$, $z=0$, $t=1$.

**d)** Następny układ pięciu równań będziemy rozwiązywać ściśle według algorytmu Gaussa, dlatego nie będziemy zaznaczać wykonywanych operacji elementarnych. Dla przejrzystości będziemy otaczać ramką ten fragment macierzy, który ulegnie zmianie w następnym kroku. Mamy zatem

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 9 & 6 & -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -4 & -5 \\ -1 & -5 & -1 & 3 & 6 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 6 & 7 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Rozwiązaniem tego układu równań są liczby $x = 1, y = 0, z = 1, s = 0, t = 1$. Można przy tym zauważyć, że szukanie rozwiązania ze wzoru Cramera byłoby bardzo pracochłonne. Również obliczenie macierzy odwrotnej wymagałoby większej ilości rachunków.

## • Przykład 4.14

Stosując „metodę kolumn jednostkowych" rozwiązać podane układy Cramera:

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -4x - 12y + z = 2 \\ 3x + 3y + z = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x + y + s + 2t = 2 \\ x - y + 3z + 2s = 1 \\ 2x + 2y + z + s + 3t = 3 \\ x + 2y - z - s + t = 1 \\ y + 2z + 2s = 3 \end{cases}$.

**Rozwiązanie**

„Metoda kolumn jednostkowych" jest praktyczną wersją metody eliminacji Gaussa. Polega ona na odpowiednim przekształceniu macierzy rozszerzonej układu. W przypadku układów Cramera celem postępowania jest doprowadzenie wszystkich kolumn macierzy układu do postaci jednostkowej (tzn. z jedną jedynką i resztą zer) tak, aby jedynki w poszczególnych kolumnach znajdowały się w różnych wierszach. Dla układu Cramera z $n$ niewiadomymi metoda ta wymaga $n$ kroków, gdyż w jednym kroku przekształca się **ostatecznie** całą kolumnę. Kolejność przekształcanych kolumn oraz położenie końcowych „jedynek" jest dowolna, przy czym praktycznie jest do przekształcenia wybierać kolumnę składającą się z jedynki, „małych" liczb całkowitych i „dużej" liczby zer. W porównaniu z klasycznym algorytmem Gaussa metoda ta nie wymaga przestawiania wierszy ani budowania macierzy trójkątnej, wymaga jednak wykonania większej liczby mnożeń.

**Przekształcenie $j$-tej kolumny.** Chcąc w miejsce niezerowego elementu $a_{ij}$ otrzymać „jedynkę", a na pozostałych miejscach $j$-tej kolumny same zera wystarczy $i$-ty wiersz macierzy rozszerzonej podzielić przez $a_{ij}$. Następnie należy od pozostałych kolejnych wierszy odejmować $i$-ty wiersz mnożony odpowiednio przez $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{i-1j}, a_{i+1j}, \ldots, a_{nj}$. Schematycznie przedstawimy to poniżej

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \dots & a_{1j} & \dots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & a_{i-1j} & \dots & \cdot \\ \dots & a_{ij} & \dots & \cdot \\ \dots & a_{i+1j} & \dots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow{w_i\,:\,a_{ij}} \left[\begin{array}{ccc|c} \dots & a_{1j} & \dots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & a_{i-1j} & \dots & \cdot \\ \dots & \mathbf{1} & \dots & \cdot \\ \dots & a_{i+1j} & \dots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots & \cdot \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_{i+1}-a_{i+1j}w_i \\ \vdots \\ w_n-a_{nj}w_i}]{\substack{w_1-a_{1j}w_i \\ \vdots \\ w_{i-1}-a_{i-1j}w_i}} \left[\begin{array}{ccc|c} \dots & \mathbf{0} & \dots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \cdot \\ \dots & \mathbf{1} & \dots & \cdot \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \cdot \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \mathbf{0} & \dots & \cdot \end{array}\right].$$

**a)** Przekształcamy macierz rozszerzoną układu równań zaznaczając wyróżnione niezerowe elementy przekształconych kolumn oraz kolumny wcześniej przekształcone. Mamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & \mathbf{1} & 1 \\ -4 & -12 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-w_1]{w_2-w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & \mathbf{1} & 1 \\ -6 & -11 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{1} & 4 & \mathbf{0} & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2+6w_3]{w_1-2w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & -9 & \mathbf{1} & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{13} & \mathbf{0} & 13 \\ \mathbf{1} & 4 & \mathbf{0} & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_2\,:\,13} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & -9 & \mathbf{1} & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{1} & 4 & \mathbf{0} & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3-4w_2]{w_1+9w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2 \end{array}\right].$$

Stąd wynika, że

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 0\cdot x & + & 0\cdot y & + & 1\cdot z & = & 6 \\ 0\cdot x & + & 1\cdot y & + & 0\cdot z & = & 1 \\ 1\cdot x & + & 0\cdot y & + & 0\cdot z & = & -2 \end{array}\right.,$$

zatem $x = -2$, $y = 1$, $z = 6$.

**b)** Postępując według omówionej wyżej metody kolejno otrzymamy

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-2w_1 \\ w_4-w_1}]{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & -4 & -7 & -11 & -7 \\ \mathbf{0} & 1 & -5 & -7 & -8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & -4 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_3-w_4]{\substack{w_1-w_4 \\ w_2+4w_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 7 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -3 & -27 & -27 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -6 & -3 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & -4 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3\,:\,(-3)]{w_2\,:\,(-3)} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 7 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 9 & 9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 2 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 & -4 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3-2w_2 \\ w_4-w_2}]{w_1-w_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 : (-17)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 + 13w_3]{\substack{w_1 + 2w_3 \\ w_2 - 9w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Stąd odczytujemy, że $x = -1$, $y = -1$, $z = 0$, $t = 1$.

**c)** Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3 - 2w_2 \\ w_4 - w_2}]{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 4 & -9 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_3 - 4w_5 \\ w_4 - 3w_5}]{\substack{w_1 - 4w_5 \\ w_2 + w_5}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -17 & -13 & 2 & -13 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -13 & -11 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_4]{w_1 - 2w_4} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 17 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 : 3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 17 & 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & -10 & -9 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4 + 10w_1 \\ w_5 - 2w_1}]{\substack{w_2 - 5w_1 \\ w_3 - 17w_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{3} & 0 & -\frac{37}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{3} & 1 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 : \left(-\frac{37}{3}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} & 0 & -\frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{3} & 1 & \frac{23}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4 - \frac{23}{3}w_3 \\ w_5 + \frac{4}{3}w_3}]{\substack{w_1 - \frac{5}{3}w_3 \\ w_2 + \frac{13}{3}w_3}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rozwiązaniem tego układu równań są liczby $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $s = 1$, $t = 0$.

## Metoda eliminacji Gaussa dla dowolnych układów równań

### • Przykład 4.15

Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań:

**a)** $\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ y + 3z - 3t = 1 \\ x + y + z - t = 1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 2y - z - t = 1 \\ x + y + z + 3t = 2 \\ 3x + 5y - z + t = 3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x + y + \phantom{3}z = 1 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ \phantom{2}x + y + \phantom{3}z = 0 \\ \phantom{2}x - y + \phantom{3}z = 1 \end{cases}$ ; d*) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t - \phantom{1}u = 6 \\ 3x + 6y + 5z - 2t - 9u = 1 \\ 2x + 4y + 2z \phantom{- 2t} - 8u = -5 \\ 2x + 4y + 7z - 5t + \phantom{1}u = 17 \\ x + 2y + 6z - 5t - 10u = 12 \end{cases}$.

**Rozwiązanie**

Rozwiązywanie dowolnego liniowego układu równań postaci $AX = B$ metodą eliminacji Gaussa polega na przekształcaniu macierzy rozszerzonej $[A|B]$ tego układu. Celem postępowania jest doprowadzenie macierzy $[A|B]$ do macierzy $\left[A'|B'\right]$ opisującej układ równoważny wyjściowemu i jednocześnie zawierający w lewym górnym rogu macierzy $A'$ macierz jednostkową, a pod nią jeszcze jeden wiersz złożony z samych zer. Wówczas, zgodnie z twierdzeniem, możliwe będą trzy sytuacje:

1. układ będzie sprzeczny, jeżeli element kolumny $B'$ wyrazów wolnych odpowiadający wierszowi zerowemu macierzy $A'$ będzie różny od zera,
2. układ będzie miał tylko jedno rozwiązanie (i będzie równoważny układowi Cramera), jeżeli poza macierzą jednostkową w macierzy $A'$ nie pozostanie żadna inna kolumna,
3. układ będzie miał nieskończenie wiele rozwiązań, jeżeli poza macierzą jednostkową w macierzy $A'$ pozostanie choć jedna kolumna. Liczba tych dodatkowych kolumn będzie wówczas liczbą parametrów określających rozwiązanie układu.

Nasze przykłady rozwiązywać będziemy w oparciu o algorytm Gaussa, ale zmodyfikowany, bo wykraczający poza układy Cramera. Będziemy wykonywać następujące operacje na **wierszach** macierzy rozszerzonej:

- zamiana między sobą $i$–tego i $j$–tego wiersza (oznaczenie $w_i \longleftrightarrow w_j$),
- mnożenie $i$–tego wiersza przez stałą $c$ różną od zera (oznaczenie $cw_i$),
- dodanie do $i$-tego wiersza $j$–tego wiersza pomnożonego przez stałą $c$ (oznaczenie $w_i + cw_j$),

które wystarczały dla układów Cramera oraz dodatkowo:

- skreślenie $i$–tego wiersza złożonego z samych zer (oznaczenie $\cancel{w}_i \equiv 0$),
- skreślenie $i$–tego wiersza równego $j$-temu wierszowi (oznaczenie $\cancel{w}_i = w_j$),
- skreślenie $i$–tego wiersza, który jest proporcjonalny do $j$–tego wiersza (oznaczenie $\cancel{w}_i \sim w_j$).

Potrzebna tu jeszcze będzie operacja **przestawiania $j$–tej kolumny na koniec niewiadomych** (oznaczenie $k_j \longmapsto$) z jednoczesnym **przemianowaniem oznaczeń niewiadomych**.

a) Przekształcamy macierz rozszerzoną układu równań otrzymując

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \longleftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\cancel{w}_3 \sim w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right].$$

Dany układ jest więc równoważny układowi

$$\begin{cases} x \qquad - 2z + 2t = 0 \\ \quad y + 3z - 3t = 1 \end{cases}.$$

Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań z dwoma parametrami. Przyjmując niewiadome $z$ i $t$ za parametry otrzymujemy rozwiązanie tego układu

$$\begin{cases} x = 2z - 2t \\ y = 1 - 3z + 3t, \end{cases}$$

gdzie $z, t \in \boldsymbol{R}$.

**b)** Postępując podobnie otrzymujemy kolejne równoważne postaci macierzy rozszerzonej

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 3w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - w_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Ostatni wiersz uzyskanej macierzy wskazuje na sprzeczność danego układu równań. Widać to wyraźnie po rozpisaniu układu w formie rozwiniętej.

$$\begin{cases} x + 2y - \ z - \ t = \ \ 1 \\ \quad - \ y + 2z + 4t = \ \ 1 \\ \qquad\qquad\qquad\ \ 0 = -1 \end{cases}.$$

**c)** Macierz rozszerzona $[A|B]$ danego układu równań po przestawieniu jego wierszy $w_1 \longleftrightarrow w_3$, $w_2 \longleftrightarrow w_4$ przyjmie postać

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Dokonując na wierszach tej macierzy zaznaczonych operacji otrzymujemy kolejno

$$[A|B] \xrightarrow[w_4 - 3w_1]{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - 2w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - w_2]{\substack{w_2 \longleftrightarrow w_3 \\ w_3 \cdot (-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + 2w_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_3 : 2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 - w_3]{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Dany układ równań jest zatem równoważny układowi Cramera posiadającemu jedyne rozwiązanie

$$\begin{cases} x = \ \ 1 \\ y = -\dfrac{1}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

**d*)** W tym przykładzie pojawi się konieczność przestawienia kolumn. Można to zrobić jednorazowo pod koniec postępowania opuszczając wcześniej „niewygodne" kolumny.

My jednak będziemy to robić stopniowo. Każdą „niewygodną" kolumnę (tzn. nie mającą elementu niezerowego poniżej już ustawionej „jedynki" na przekątnej) będziemy od razu przestawiać **wraz z jej niewiadomą** na koniec macierzy układu przed kolumnę wyrazów wolnych. Od tego momentu będziemy już zaznaczać nad kolumnami macierzy odpowiadające im niewiadome. Oczywiście niewiadome przeniesione na koniec staną się parametrami. Operację przeniesienia $j$-tej kolumny na koniec będziemy oznaczać symbolem $k_j \longmapsto$, a przeniesione kolumny będziemy dla przejrzystości oddzielać linią przerywaną. Mamy zatem

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & -2 & -9 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -8 & -5 \\ 2 & 4 & 7 & -5 & 1 & 17 \\ 1 & 2 & 6 & -5 & -10 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4 - 2w_1 \\ w_5 - w_1}]{\substack{w_2 - 3w_1 \\ w_3 - 2w_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 = w_4]{w_2 \longleftrightarrow w_4}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & t & u & \phantom{-17} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -17 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -9 & 6 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[\substack{w_3 + 4w_2 \\ w_4 - 3w_2}]{k_2 \longmapsto} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & z & t & u & y & \phantom{-9} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:c|c} 1 & 3 & -2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & -9 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[\substack{w_4 \sim w_3 \\ w_3 : 6}]{k_3 \longmapsto}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & z & u & y & t & \phantom{6} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[w_1 - 3w_2 + w_3]{w_2 - 3w_3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & z & u & y & t & \phantom{-4} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \end{array}.$$

To oznacza, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ t \end{bmatrix},$$

zatem rozwiązanie naszego układu ma w formie rozwiniętej postać

$$\begin{cases} x = -4 - 2y - t \\ z = \frac{7}{2} + t \\ u = \frac{1}{2} \end{cases},$$

gdzie $y, t \in \mathbb{R}$.

## • Przykład 4.16

Rozwiązać podane układy równań „metodą kolumn jednostkowych":

a) $\begin{cases} 4x + 3y + 5z + 7u = 2 \\ 2x - y + z + 3u = 4 \\ x + 2y + 2z + 2u = -1 \\ 3x + y + 3z + 5u = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 9y + 6z - 2s - 3t = 5 \\ x + 2y - z - s + 5t = 5 \\ -2x - 7y + z + 3s - 4t = -5 \\ -x - 5y - z + 3s + 6t = 4 \end{cases}$;

**c)** $\begin{cases} 5x + y + 2z + s - t + 6u = 2 \\ -11x - 3y - 9z - 2s + 4t - 15u = -5 \\ 14x + y + 2z + 3s + 2t + 13u = 6 \\ 3x - 2y - 7z + s + 6t - 2u = 1 \\ 2x + 3y + 9z - 7t + 8u = 1 \end{cases}.$

**Rozwiązanie**

**Metoda kolumn jednostkowych** jest praktyczną wersją metody eliminacji Gaussa. W przypadku dowolnych układów równań celem postępowania jest doprowadzenie kilku kolumn macierzy układu do postaci jednostkowej (tzn. z jedną jedynką i resztą zer) tak, aby „jedynki" w wyróżnionych kolumnach znajdowały się w różnych wierszach. Wybór kolumn do przekształceń jest dowolny. Najlepiej jest brać kolumny zawierające „małe" liczby całkowite, „dużo" zer, a wyróżniony niezerowy element powinnien znajdować się w wierszu dotąd nie wybieranym. Samo przekształcenie kolumny wykonujemy dokładnie tak, jak dla układu Cramera (patrz **Przykład 4.13**). W stosunku do układów Cramera w przypadku dowolnych układów równań mogą w trakcie postępowania pojawić się wiersze zerowe - wtedy je skreślamy, wiersze równe lub proporcjonalne - wtedy skreślamy jeden z nich. Może się zdarzyć, że w macierzy rozszerzonej układu pojawi się wiersz zerowy z jednym elementem niezerowym w kolumnie wyrazów wolnych. Taki układ równań jest oczywiście sprzeczny. Jeśli tak się nie zdarzy, to postępowanie kończy się wtedy, gdy liczba wyróżnionych kolumn jest równa liczbie wierszy, które pozostały w macierzy. Rozwiązanie układu odczytujemy teraz z końcowej postaci macierzy, wyróżnione „jedynki" wskazują zmienne zależne.

**Uwaga.** Przy wybieraniu wyróżnionych kolumn oraz ich niezerowych elementów mamy pełną dowolność. Jednoznacznie określona jest tylko liczba tych kolumn, ale pojawia się ona w naturalny sposób na końcu postępowania.

**a)** Przekształcamy macierz rozszerzoną układu równań otrzymując

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ \mathbf{1} & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - 3w_3]{\substack{w_1 - 4w_3 \\ w_2 - 2w_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 \cdot (-1)]{\substack{w_1 = w_4 \\ w_2 = w_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 2 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & 5 & 3 & \mathbf{1} & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -8 & -4 & \mathbf{0} & 11 \\ \mathbf{0} & 5 & 3 & \mathbf{1} & -6 \end{array}\right].$$

W formie rozwiniętej układ równań przyjmuje postać

$$\begin{cases} x - 8y - 4z = 11 \\ 5y + 3z + u = -6 \end{cases},$$

zatem jego rozwiązanie można zapisać wzorami $x = 11 + 8y + 4z$, $u = -6 - 5y - 3z$, gdzie $y, z \in \boldsymbol{R}$.

**b)** Postępując według tej samej metody otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 9 & 6 & -2 & -3 & 5 \\ \mathbf{1} & 2 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ -2 & -7 & 1 & 3 & -4 & -5 \\ -1 & -5 & -1 & 3 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 + w_2]{\substack{w_1 - 2w_2 \\ w_3 + 2w_2}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5 & 8 & 0 & -13 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 11 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - 2w_3]{w_2 + w_3}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 5 & 8 & 0 & -13 & -5 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_2 - 11w_4 \\ w_3 - 6w_4}]{\substack{w_4 \cdot (-1) \\ w_1 + 13w_4}} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -34 & 8 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 32 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 : 8}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -\frac{17}{4} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 32 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 15 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 + w_1]{w_2 + 2w_1} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 0 & -\frac{17}{4} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{47}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{43}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

zatem

$$\begin{cases} -\frac{17}{4}y + z = 1 \\ x + \frac{47}{2}y = 1 \\ \frac{43}{4}y + s = 0 \\ -3y + t = 1 \end{cases}$$

i ostatecznie $x = 1 - \frac{47}{2}y$, $z = 1 + \frac{17}{4}y$, $s = -\frac{43}{4}y$, $t = 1 + 3y$, gdzie $y \in \boldsymbol{R}$.

**c)** Rozwiązanie tego przykładu znajdziemy dość szybko, bowiem mamy

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 5 & 1 & 2 & 1 & -1 & 6 & 2 \\ -11 & -3 & -9 & -2 & 4 & -15 & -5 \\ 14 & 1 & 2 & 3 & 2 & 13 & 6 \\ 3 & -2 & -7 & 1 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 0 & -7 & 8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4 + 2w_1 \\ w_5 - 3w_1}]{\substack{w_2 + 3w_1 \\ w_3 - w_1}} \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 5 & 1 & 2 & 1 & -1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 13 & 0 & -3 & 3 & 4 & 10 & 5 \\ -13 & 0 & 3 & -3 & -4 & -10 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{w_4 - 3w_2 \\ w_5 = -w_4}]{\substack{w_1 - w_2 \\ w_3 - 2w_2}}$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 1 & 5 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 = w_3]{\substack{w_1 + 2w_3 \\ w_2 - w_3}} \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 3 & 1 & 17 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 0 & -9 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

To oznacza, że

$$\begin{cases} 3x + y + 17z + 5u = 5 \\ 3x - 9z + s + 2u = -1 \\ x + 6z + t + u = 2 \end{cases},$$

zatem

$$\begin{cases} y = 5 - 3x - 17z - 5u \\ s = -1 - 3x + 9z - 2u \\ t = 2 - x - 6z - u \end{cases},$$

gdzie $x, z, u \in \boldsymbol{R}$.

## Przykład 4.17

Dla jakich wartości parametru $p$ podany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie, określić liczbę rozwiązań tego układu w pozostałych przypadkach:

$$\begin{cases} x + p^2y + z = -p \\ x + y - pz = p^2 \\ y + z = 1 \end{cases}?$$

**Rozwiązanie**

Jeżeli dany układ jest układem Cramera, to ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dzieje się tak, o ile

$$\begin{vmatrix} 1 & p^2 & 1 \\ 1 & 1 & -p \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+p) - \left(p^2-1\right) = (1+p)(2-p) \neq 0,$$

tzn. dla $p \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1, 2\}$. Przypadki $p = -1$ oraz $p = 2$ przeanalizujemy rozwiązując odpowiedni układ równań metodą eliminacji Gaussa. Dla $p = -1$ mamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

zatem $x = 0$, $y = 1 - z$, $z \in \boldsymbol{R}$, więc układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dla $p = 2$ otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 + 3w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

W tym przypadku układ nie posiada rozwiązań, bowiem odczytując drugi wiersz ostatniej macierzy w jawnej postaci $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 9$ uzyskaliśmy warunek sprzeczny.

## • Przykład 4.18

W wytwórni montuje się cztery wyroby $A$, $B$, $C$, $D$ z trzech typów detali $a$, $b$, $c$. Wyroby $A$, $B$, $C$, $D$ ważą odpowiednio 60 g, 60 g, 70g, 90 g. Obliczyć, ile ważą poszczególe detale, jeżeli ich liczba w produkowanych wyrobach podana jest w tabeli:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 2 | 1 | 1 |
| $b$ | 2 | 1 | 1 | 2 |
| $c$ | 2 | 1 | 3 | 4 |

**Rozwiązanie**

Niech $x, y, z$ oznaczają odpowiednio wagi w gramach detali $a, b, c$. Dane, którymi dysponujemy w tym zadaniu prowadzą do układu równań

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & 2c & = & 60 \\ 2a & + & b & + & c & = & 60 \\ a & + & b & + & 3c & = & 70 \\ a & + & 2b & + & 4c & = & 90 \end{array}\right..$$

Wyznaczenie wag poszczególnych detali będzie możliwe wtedy, gdy rozważany układ równań będzie miał jednoznaczne rozwiązanie. Stosując metodę eliminacji Gaussa otrzymamy

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 2 & 1 & 1 & 60 \\ 1 & 1 & 3 & 70 \\ 1 & 2 & 4 & 90 \end{array}\right] \xrightarrow[w_4 - w_1]{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 0 & -3 & -3 & -60 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 30 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 3w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 0 & 0 & -6 & -90 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 30 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_4 : 2]{\substack{w_2 \sim w_4 \\ w_3 \cdot (-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 60 \\ 0 & 1 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[w_1 - 2w_2 - 2w_3]{w_2 + w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right].$$

Zatem detal $a$ waży 20 g, detal $b$ waży 5 g, a detal $c$ 15 g.

# Zadania

**○ Zadanie 4.1**

Dla jakich wartości parametru $p \in \boldsymbol{R}$ podane układy równań są układami Cramera:

**a)** $\begin{cases} (p+1)x - py = 1 \\ 2x + (p-1)y = 3p \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2px + 4y - pz = 4 \\ 2x + y + pz = 1 \\ (4+2p)x + 6y + pz = 3 \end{cases}$;

**c)** $\begin{cases} px + 3y + pz = 0 \\ -px + 2z = 3 \\ x + 2y + pz = p \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x - y - z - t = px \\ -x + y - z - t = py \\ -x - y + z - t = pz \\ -x - y - z + t = pt \end{cases}$?

**○ Zadanie 4.2**

Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań:

**a)** $\begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y - z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$.

**○ Zadanie 4.3**

Stosując wzór Cramera obliczyć niewiadomą $y$ z podanych układów równań:

**a)** $\begin{cases} 3x + 7y + 2z + 4t = 0 \\ 2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 3y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + y + 3z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + z + 3t = 1 \\ 3x + 3y + 3z + t = 1 \end{cases}$;

**c)** $x + 2y - 4 = 3y + 4z - 6 = 5z + 6s = 7s + 8t = x + y + z + s + t - 2 = 0$.

**○ Zadanie 4.4**

Rozwiązać podane układy równań metodą macierzy odwrotnej:

**a)** $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$;

**c)** $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -5 \\ -x + 2y - z = 2 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} y + z + t = 4 \\ x + z + t = -1 \\ x + y + t = 2 \\ x + y + z = -2 \end{cases}$.

**○ Zadanie 4.5**

Znaleźć rzędy podanych macierzy wskazując niezerowe minory maksymalnych stopni:

**a)** $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$;

**d)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

○ **Zadanie 4.6**

Wykonując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych macierzy obliczyć ich rzędy:

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 45 & 15 & 30 & -60 & 75 \\ 5 & 3 & 2 & -8 & 7 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

**d)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$; **e)** $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$; **f*)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

○ **Zadanie 4.7**

Sprowadzając podane macierze do postaci schodkowej wyznaczyć ich rzędy:

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 13 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & 14 \\ -4 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

**c)** $A = [a_{ij}]$ jest macierzą wymiaru $5 \times 7$, gdzie $a_{ij} = i + j$ dla $1 \leqslant i \leqslant 5$, $1 \leqslant j \leqslant 7$;

**d)** $B = [b_{ij}]$ jest macierzą wymiaru $6 \times 6$, gdzie $b_{ij} = i^2 j$ dla $1 \leqslant i, j \leqslant 6$.

○ **Zadanie 4.8**

Znaleźć rzędy podanych macierzy w zależności od parametru rzeczywistego $p$:

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & p \\ 3 & p & 3 \\ 2p & 2 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & p & 2 \\ 1 & -2 & 7+p \\ 1 & 2+2p & -3-p \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}$

**d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p \\ 1 & p & p & p \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} p & -p & 1 & -p \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & p & 3 & p \\ p & 1 & p & 1 \end{bmatrix}$; **f*)** $\begin{bmatrix} p^2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 4 & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 2|p| & 4 & 4 \\ p^2 & 2p & 2|p| & 2^p & 4 \end{bmatrix}$

### ○ Zadanie 4.9

W podanych układach równań liniowych określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz liczby parametrów:

**a)** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 4 \\ 4x + 8y = 11 \\ x + 4y = 10 \end{cases}$;

**c)** $\begin{cases} 5x - 3y - z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = -4 \\ x - y - 2z = -2 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x - y + 2z - t = 1 \\ 2x - 3y - z + t = -1 \\ x + 7y - t = 4 \end{cases}$;

**e)** $\begin{cases} x - 3y + 2z = 7 \\ x - t = 2 \\ -x - 3y + 2z + 2t = 3 \end{cases}$.

### ○ Zadanie 4.10

Wskazać wszystkie możliwe zbiory niewiadomych, które mogą być parametrami określającymi rozwiązania podanych układów równań liniowych:

**a)** $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = -1 \\ -x + 8y + 11z + 12t = 5 \\ 2x - y - z = -4 \end{cases}$;

**c)** $\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \end{cases}$.

### ○ Zadanie 4.11

Określić liczby rozwiązań podanych układów równań liniowych w zależności od parametru rzeczywistego $p$:

**a)** $\begin{cases} (p+1)x + (2-p)y = p \\ (1-3p)x + (p-1)y = -6 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} (p+1)x - y + pz = 1 \\ (3-p)x + 4y - pz = -4 \\ px + 3y = -3 \end{cases}$;

**c)** $\begin{cases} px + y + 2z = 1 \\ x + py + 2z = 1 \\ x + y + 2pz = 1 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x + py + pz + pt = 1 \\ 2x + 2y + pz + pt = 2 \\ 2x + 2y + 2z + pt = 3 \\ 2x + 2y + 2z + 2t = 4 \end{cases}$;

**e)** $\begin{cases} x + (p-2)y - 2pz = 4 \\ px + (3-p)y + 4z = 1 \\ (1+p)x + y + 2(2-p)z = 7 \end{cases}$.

### ○ Zadanie 4.12

W wytwórni montuje się wyroby $A, B, C, D, E$ z czterech typów detali $a, b, c, d$. Liczby detali wchodzących w skład poszczególnych wyrobów podane są w tabeli

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 2 | 0 | 4 | 1 |
| $b$ | 2 | 1 | 4 | 5 | 1 |
| $c$ | 1 | 3 | 3 | 5 | 4 |
| $d$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 |

.

**a)** Czy można obliczyć, ile ważą wyroby $D$ i $E$, jeżeli wyroby $A, B, C$ ważą odpowiednio 12, 20 i 19 dag. Podać znalezione wagi.

**b)** Ile ważą detale $a, b, c$, jeżeli detal $d$ waży 1 dag?

### ○ Zadanie 4.13

Rozwiązać podane układy równań metodą eliminacji Gaussa:

**a)** $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases}$;

**c)** $\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$;

**e)** $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + t = 0 \\ 3x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 6x + 4y + 3z + 2t = 2 \end{cases}$; **f)** d$\begin{cases} x - 2y + 3s + t = 1 \\ 2x - 3y + z + 8s + 2t = 3 \\ x - 2y + z + 3s - t = 1 \\ y + 3s + 5t = 0 \\ x - 2y + 5s + 8t = -1 \end{cases}$.

### ○ Zadanie 4.14

Stosując „metodę kolumn jednostkowych" rozwiązać podane układy Cramera:

**a)** $\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x - 2y + z - t = -4 \\ 2x - y - z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 5 \\ x + y - z + t = 4 \end{cases}$;

**c)** $\begin{cases} 2x + y + z + t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2x + y + z + s = 0 \\ y + z + s + t = 4 \\ x + z + t = 0 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 2x + 3y + 2z - t = 3 \\ 2x + y + z + 2s + 3t = 6 \\ 3x - z + s + t = 3 \\ y + 4s + t = 1 \\ 2x + y + z - 2s + 5t = 8 \end{cases}$.

### ○ Zadanie 4.15

Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań:

**a)** $\begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 10 \\ 5x - 6y + 8z = 19 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x - y + z - 2s + t = 0 \\ 3x + 4y - z + s + 3t = 1 \\ x - 8y + 5z - 9s + t = -1 \end{cases}$.

## ○ Zadanie 4.16

Rozwiązać podane układy równań „metodą kolumn jednostkowych":

a) $\begin{cases} 3x + 2y + z - t = 0 \\ 5x - y + z + 2t = -4 \\ 7x + 8y + z - 7t = 6 \\ x - y + z + 2t = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 3y + z - 2s - t = 6 \\ 4x + 7y + 2z - 5s + t = 17 \\ 6x + 5y + 3z - 2s - 9t = 1 \\ 2x + 6y + z - 5s - 10t = 12 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x + y - 2t = 1 \\ 5x + 2y + 2z - t = 5 \\ x - y - 2t = -5 \\ 5x + y + z - 3t = 0 \\ -7x - 3y + z + 5t = -4 \\ 4x + y - 2z - 5t = -2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x - 3y + z - 2s + t = -5 \\ 2x - 6y - 4s + t = -10 \\ 2z + t = 0 \\ -2x + 6y + 2z + 4s = 10 \\ -2x + 6y + 4z + 4s + t = 10 \\ -x + 3y + z + 2s = 5 \end{cases}$.

## ○ Zadanie 4.17

Dla jakich wartości parametru $p$ podane układy równań mają dokładnie jedno rozwiązanie? Określić liczby rozwiązań tych układów w pozostałych przypadkach:

a) $\begin{cases} x + py - z = 1 \\ x + 10y - 6z = p \\ 2x - y + pz = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 4y - 2z = -p \\ 3x + 5y - pz = 3 \\ px + 3py + z = p \end{cases}$.

## ○ Zadanie 4.18

Wykonanie pewnego pojemnika wymaga wykonania czterech czynności: narysowania formy, wycięcia, złożenia modelu i jego pomalowania. Liczby poszczególnych czynności w kolejnych dniach pracy pewnego pracownika podaje tabela:

| | rysowanie | wycinanie | składanie | malowanie |
|---|---|---|---|---|
| poniedziałek | 30 | 20 | 10 | 5 |
| wtorek | 20 | 15 | 15 | 10 |
| środa | 40 | 25 | 20 | 20 |
| czwartek | 30 | 20 | 20 | 20 |

Obliczyć czas wykonywania poszczególnych czynności, jeżeli w kolejnych dniach łączny czas pracy wynosił odpowiednio 2 h 10 min, 2 h 15 min, 3 h 55 min, 3 h 30 min.

# 5

# Geometria analityczna w przestrzeni

## Przykłady

### Wektory

**• Przykład 5.1**

Obliczyć długości podanych wektorów:

**a)** $\vec{a} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{5})$ ; **b)** $\overrightarrow{PQ}$, gdzie $P = (1, 2, 3)$, $Q = (4, 6, 15)$.

**Rozwiązanie**

**a)** Długość wektora $\vec{v} = (x, y, z)$ wyraża się wzorem $|\vec{v}| \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Zatem

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

**b)** Długość wektora $\overrightarrow{AB}$ łączącego punkty $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ wyraża się wzorem

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| \stackrel{def}{=} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Zatem

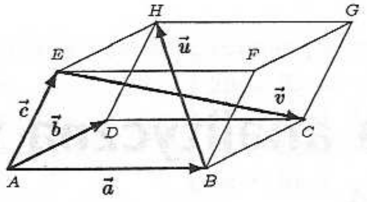
$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{169} = 13.$$

**• Przykład 5.2**

Równoległościan jest rozpięty na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Wyrazić przekątne tego równoległościanu przez wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

**Rozwiązanie**

Niech $\vec{u} = \overrightarrow{BH}$, $\vec{v} = \overrightarrow{EC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AG}$ i $\vec{z} = \overrightarrow{DF}$ oznaczają przekątne równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (rysunek). Aby nie zaciemniać rysunku zaznaczono na nim tylko dwie przekątne $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Z faktu, że łamana $ABHEA$ jest zamknięta wynika równość $\vec{a}+\vec{u}=\vec{c}+\vec{b}$, stąd $\vec{u}=\vec{c}+\vec{b}-\vec{a}$. Podobnie z faktu, że łamana $ABCEA$ jest zamknięta wynika równość $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{v}$, stąd $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. Z analogicznych rozważań wynika, że trzecia przekątna $\vec{w}$ wyraża się wzorem $\vec{w}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, zaś czwarta $\vec{z}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

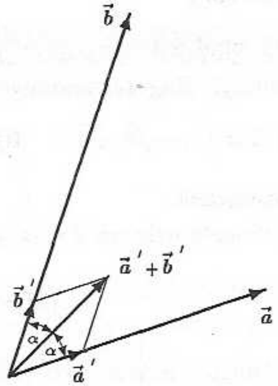



## Przykład 5.3

Znaleźć dowolny wektor $\vec{u}$, który z wektorami $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(6,-4,2)$ tworzy jednakowe kąty i leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez te wektory.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy fakt mówiący, że wektor, który jest sumą dwóch wektorów o jednakowych długościach, tworzy z nimi jednakowe kąty i leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez te wektory. Fakt ten wynika z elementarnych własności rombu. Niech $\vec{a}\,'$ i $\vec{b}\,'$ oznaczają wektory jednostkowe równoległe (z zachowaniem zwrotu) odpowiednio do wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rysunek). Wtedy




$$\vec{a}\,'=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{(1,2,3)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right),$$

$$\vec{b}\,'=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{(6,-4,2)}{\sqrt{6^2+(-4)^2+2^2}}=\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right).$$

Wektor $\vec{u}$ tworzący jednakowe kąty z wersorami $\vec{a}\,'$, $\vec{b}\,'$, a zatem także z wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ma postać

$$\vec{u}=\vec{a}\,'+\vec{b}\,'=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)+\left(\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)=\frac{4}{\sqrt{14}}(1,0,1).$$

# Iloczyn skalarny

## Przykład 5.4

Obliczyć iloczyny skalarne podanych par wektorów:

**a)** $\vec{a}=(-1,5,2)$, $\vec{b}=(3,0,7)$; **b)** $\vec{u}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{k}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ obliczamy ze wzoru

$$\vec{a} \circ \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Zatem

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (-1, 5, 2) \circ (3, 0, 7) = (-1) \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 7 = 11.$$

**b)** W rozwiązaniu wykorzystamy własności iloczynu skalarnego wektorów oraz fakt, że wersory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ są parami prostopadłe, tzn. spełniają równości:

$$\vec{i} \circ \vec{j} = \vec{j} \circ \vec{k} = \vec{k} \circ \vec{i} = 0.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\vec{u} \circ \vec{v} &= \left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right) \circ \left(3\vec{i} - 2\vec{k}\right) \\
&= 3\left(\vec{i} \circ \vec{i}\right) - 2\left(\vec{i} \circ \vec{k}\right) - 3\left(\vec{j} \circ \vec{i}\right) + 2\left(\vec{j} \circ \vec{k}\right) + 3\left(\vec{k} \circ \vec{i}\right) - 2\left(\vec{k} \circ \vec{k}\right) \\
&= 3 - 2 = 1.
\end{aligned}$$

**Uwaga.** Przykład b) można oczywiście obliczyć tak jak a) zapisując $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, -2)$.

## • Przykład 5.5

Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miary kątów między:

**a)** wektorami $\vec{a} = \left(1, \sqrt{2}, 3\right)$, $\vec{b} = \left(0, -\sqrt{2}, 1\right)$;

**b)** wektorem $\vec{u} = (4, -12, 3)$ i płaszczyzną $xOz$ układu współrzędnych;

**c)** przekątnymi ścian prostopadłościanu o krawędziach długości $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, wychodzącymi z jednego wierzchołka.

**Rozwiązanie**

Miara kąta między wektorami niezerowymi $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wyraża się wzorem

$$\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \arccos \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

**a)** Dla wektorów $\vec{a} = \left(1, \sqrt{2}, 3\right)$ i $\vec{b} = \left(0, -\sqrt{2}, 1\right)$ mamy

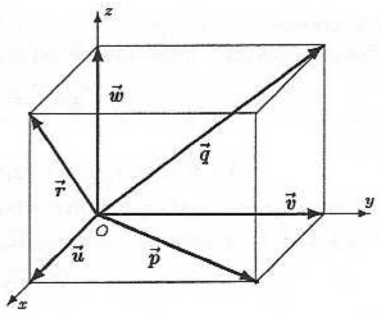
$$\begin{aligned}
\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) &= \arccos \frac{\left(1, \sqrt{2}, 3\right) \circ \left(0, -\sqrt{2}, 1\right)}{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}} \\
&= \arccos \frac{1}{6} \approx 1,40\,[\mathrm{rad}] \approx 80,4^\circ.
\end{aligned}$$

**b)** Zauważmy najpierw, że miara kąta między wektorem i płaszczyzną jest równa mierze kąta między tym wektorem i jego rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę. Rzut prostokątny wektora $\vec{u} = (4, -12, 3)$ na płaszczyznę $xOz$ ma postać $\vec{u}' = (4, 0, 3)$. Zatem

$$\begin{aligned}
\alpha = \sphericalangle\left(\vec{u}, \vec{u}'\right) &= \arccos \frac{(4, -12, 3) \circ (4, 0, 3)}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2}} \\
&= \arccos \frac{5}{13} \approx 1,18\,[\mathrm{rad}] \approx 67,3^\circ.
\end{aligned}$$

**c)** Sytuację omawianą w zadaniu przedstawiono na rysunku obok. Początek układu współrzędnych umieszczono w jednym z wierzchołków prostopadłościanu, a osie pokrywają się z jego krawędziami. Wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ rozpinające ten prostopadłościan mają wtedy postać:

$$\vec{u} = (a,0,0) = (5,0,0),$$
$$\vec{v} = (0,b,0) = (0,6,0),$$
$$\vec{w} = (0,0,c) = (0,0,7).$$




Przekątne ścian prostopadłościanu wychodzące z początku układu współrzędnych są reprezentowane przez wektory:

$$\vec{p} = \vec{u} + \vec{v} = (5,6,0), \quad \vec{q} = \vec{v} + \vec{w} = (0,6,7), \quad \vec{r} = \vec{u} + \vec{w} = (5,0,7).$$

Miary kątów między tymi przekątnymi wyrażają się wzorami:

$$\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \arccos\frac{\vec{p}\circ\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|} = \arccos\frac{(5,6,0)\circ(0,6,7)}{\sqrt{5^2+6^2}\cdot\sqrt{6^2+7^2}} = \arccos\frac{36}{\sqrt{5185}} \approx 60^\circ,$$

$$\sphericalangle(\vec{p},\vec{r}) = \arccos\frac{\vec{p}\circ\vec{r}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{r}|} = \arccos\frac{(5,6,0)\circ(5,0,7)}{\sqrt{5^2+6^2}\cdot\sqrt{5^2+7^2}} = \arccos\frac{25}{\sqrt{4514}} \approx 68^\circ,$$

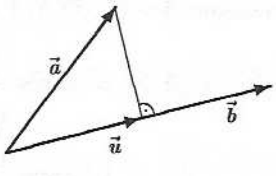
$$\sphericalangle(\vec{q},\vec{r}) = \arccos\frac{\vec{q}\circ\vec{r}}{|\vec{q}|\cdot|\vec{r}|} = \arccos\frac{(0,6,7)\circ(5,0,7)}{\sqrt{6^2+7^2}\cdot\sqrt{5^2+7^2}} = \arccos\frac{49}{\sqrt{6290}} \approx 52^\circ.$$

## • Przykład 5.6

Obliczyć długość rzutu prostokątnego wektora $\vec{a} = (3,4,-1)$ na prostą tworzącą jednakowe kąty z dodatnimi osiami układu współrzędnych.

**Rozwiązanie**

Zauważmy najpierw, że prosta tworząca jednakowe kąty z osiami układu współrzędnych jest równoległa do wektora $\vec{b} = (1,1,1)$. Rzut prostokątny dowolnego wektora na tę prostą jest taki sam jak rzut tego wektora na wektor $\vec{b}$. Rzut prostokątny $\vec{u}$ wektora $\vec{a}$ na wektor $\vec{b}$ (rysunek) wyraża się wzorem




$$\vec{u} = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}.$$

Wzór ten wynika bezpośrednio z definicji iloczynu skalarnego wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Rzut $\vec{u}$ wektora $\vec{a} = (3,4,-1)$ na wektor $\vec{b} = (1,1,1)$ ma zatem postać

$$\vec{u} = \frac{(3,4,-1)\circ(1,1,1)}{\left(\sqrt{1^2+1^2+1^2}\right)^2}\cdot(1,1,1) = (2,2,2).$$

Stąd $|\vec{u}| = 2\sqrt{3}$.

## Iloczyn wektorowy

### • Przykład 5.7

Obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:

**a)** $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (-1, 2, -5)$; **b)** $\vec{p} = 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{q} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

**Rozwiązanie**

**a)** Do obliczenia iloczynu wektorowego wektorów $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ wykorzystamy wzór

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (-1, 3, 2) \times (-1, 2, -5) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}[3 \cdot (-5) - 2 \cdot 2] - \vec{j}[(-1) \cdot (-5) - (-1) \cdot 2] + \vec{k}[(-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 3] \\ &= -19\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k} = (-19, -7, 1). \end{aligned}$$

**b)** W rozwiązaniu wykorzystamy własności iloczynu wektorowego oraz równości

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \vec{p} \times \vec{q} &= \left(2\vec{j} + \vec{k}\right) \times \left(\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}\right) \\ &= 2\left(\vec{j} \times \vec{i}\right) - 2\left(\vec{j} \times \vec{j}\right) + 6\left(\vec{j} \times \vec{k}\right) + \left(\vec{k} \times \vec{i}\right) - \left(\vec{k} \times \vec{j}\right) + 3\left(\vec{k} \times \vec{k}\right) \\ &= -2\vec{k} - \vec{0} + 6\vec{i} + \vec{j} + \vec{i} + \vec{0} = 7\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}. \end{aligned}$$

**Uwaga.** Przykład b) można oczywiście obliczyć sposobem przedstawionym w a) po zapisaniu $\vec{p} = (0, 2, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 3)$.

### • Przykład 5.8

Obliczyć pola podanych powierzchni:

**a)** trójkąt rozpięty na wektorach $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (0, 3, -2)$;

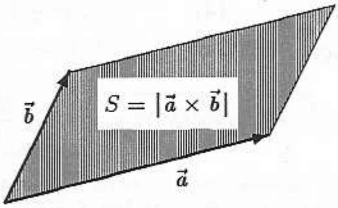
**b)** równoległobok o trzech kolejnych wierzchołkach w punktach $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, -1, 5)$, $C = (-1, 5, 0)$;

**c)** równoległościan rozpięty na wektorach $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

**Rozwiązanie**

W rozwiązaniu wykorzystamy określenie iloczynu wektorowego, z którego m. in. wynika, że pole $S$ równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ jest równe długości wektora $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$



a) Ponieważ pole trójkąta rozpiętego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ jest równe połowie pola równoległoboku rozpiętego na tych wektorach, więc

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|(1,-1,1) \times (0,3,-2)|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}| = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

b) Równoległobok $ABCD$ o wierzchołkach w punktach $A = (1,0,1)$, $B = (3,-1,5)$, $C = (-1,5,0)$ jest rozpięty na wektorach

$$\overrightarrow{AB} = (2,-1,4), \quad \overrightarrow{AC} = (-2,5,-1),$$

zatem jego pole wyraża się wzorem

$$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \end{vmatrix}\right|$$

$$= |-19\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{k}| = \sqrt{(-19)^2 + (-6)^2 + 8^2} = \sqrt{461} \approx 21,47.$$

c) Powierzchnia równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ składa się z dwóch równoległoboków rozpiętych na wektorach $\vec{p}$, $\vec{q}$, z dwóch równoległoboków rozpiętych na wektorach $\vec{p}$, $\vec{r}$ oraz dwóch równoległoboków rozpiętych na wektorach $\vec{q}$, $\vec{r}$. Pole tej powierzchni będzie zatem równe

$$S = 2\left(|\vec{p} \times \vec{q}| + |\vec{p} \times \vec{r}| + |\vec{q} \times \vec{r}|\right).$$

## • Przykład 5.9

Obliczyć odległość punktu $P = (3,2,5)$ od prostej $l$ wyznaczonej przez wektor $\vec{a} = (1,1,1)$ zaczepiony w początku układu współrzędnych.

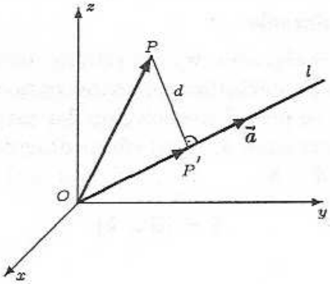
### Rozwiązanie

Odległość $d$ punktu $P$ od prostej $l$ (rysunek) wyznaczymy z trójkąta $OPP'$, gdzie $P'$ jest rzutem prostopadłym punktu $P$ na prostą $l$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $d = \sqrt{(OP)^2 - (OP')^2}$. W naszym przypadku mamy $OP = \sqrt{3^2+2^2+5^2} = \sqrt{38}$. Wyznaczymy teraz długość wektora $\overrightarrow{OP}'$, który jest rzutem wektora $\overrightarrow{OP}$ na wektor $\vec{a}$. Długość tego rzutu wyraża się wzorem (zobacz **Przykład 5.6**)

$$\left|\overrightarrow{OP}'\right| = \frac{\left|\overrightarrow{OP} \circ \vec{a}\right|}{|\vec{a}|} = \frac{|(3,2,5) \circ (1,1,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

Zatem

$$d = \sqrt{(OP)^2 - (OP')^2} = \sqrt{38 - \frac{100}{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}}.$$




Drugi sposób rozwiązania tego zadania podany będzie w **Przykładzie 5.7 c)**.

## Iloczyn mieszany

### • Przykład 5.10

Obliczyć iloczyny mieszane podanych trójek wektorów:

**a)** $\vec{a} = (3, -2, 5)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (-2, 2, 1)$;

**b)** $\vec{p} + \vec{q}$, $2\vec{p} - \vec{q}$, $\vec{r}$, jeżeli $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = 3$.

**Rozwiązanie**

**a)** Do obliczenia iloczynu mieszanego wektorów $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ wykorzystamy wzór

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Dla wektorów $\vec{a} = (3, -2, 5)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (-2, 2, 1)$ mamy

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{w_1 - 3w_2}{\underset{w_3 + 2w_2}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7.$$

**b)** W rozwiązaniu wykorzystamy następujące własności iloczynu mieszanego

$$\begin{aligned} &(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{r}) = (\vec{u}, \vec{w}, \vec{r}) + (\vec{v}, \vec{w}, \vec{r}), \\ &(\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}), \\ &(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}). \end{aligned}$$

Mamy

$$\begin{aligned} (\vec{p} + \vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{r}) &= (\vec{p}, 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{r}) + (\vec{q}, 2\vec{p} - \vec{q}, \vec{r}) \\ &= 2(\vec{p}, \vec{p}, \vec{r}) - (\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) + 2(\vec{q}, \vec{p}, \vec{r}) - (\vec{q}, \vec{q}, \vec{r}) \\ &= 2 \cdot 0 - (\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) - 2(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) - 0 \\ &= -3(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}) = 3 \cdot (-3) = -9. \end{aligned}$$

### • Przykład 5.11

Obliczyć objętości podanych wielościanów:

**a)** równoległościan $ABCDA'B'C'D'$, gdzie $A = (1, 0, 3)$, $B = (1, 2, 0)$, $D = (3, 0, 4)$, $A' = (0, -1, 3)$;

**b)** czworościan rozpięty na wektorach $\vec{p} = (1, 1, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 0)$, $\vec{r} = (-1, 3, -2)$.

**Rozwiązanie**

**a)** Objętość równoległościanu $V$ rozpiętego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wyraża się wzorem

$$|V| = \left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|.$$

Równoległościan rozważany w zadaniu jest rozpięty na wektorach

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, -3), \quad \vec{b} = \overrightarrow{AD} = (2, 0, 1), \quad \vec{c} = \overrightarrow{AA'} = (-1, -1, 0),$$

zatem jego objętość wyraża się wzorem

$$|V| = |\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}| = |4| = 4.$$

**b)** Objętość czworościanu $V$ rozpiętego na wektorach $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ wyraża się wzorem

$$|V| = \frac{1}{6}\,|(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})|.$$

Czworościan $V$ rozważany w zadaniu jest rozpięty na wektorach $\vec{p} = (1,1,1)$, $\vec{q} = (1,-1,0)$, $\vec{r} = (-1,3,-2)$. Zatem

$$|V| = \frac{1}{6}|\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}| = \frac{1}{6}|6| = 1.$$

## Przykład 5.12

Sprawdzić, czy

**a)** wektory $\vec{a} = (1,-1,2)$, $\vec{b} = (0,4,-1)$, $\vec{c} = (2,2,3)$ są współpłaszczyznowe;

**b)** punkty $P = (1,1,1)$, $Q = (0,1,2)$, $R = (-1,3,0)$, $S = (5,0,-4)$ należą do jednej płaszczyzny.

### Rozwiązanie

**a)** W rozwiązaniu wykorzystamy fakt mówiący, że wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$. Dla wektorów $\vec{a} = (1,-1,2)$, $\vec{b} = (0,4,-1)$, $\vec{c} = (2,2,3)$ mamy

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ są zatem współpłaszczyznowe.

**b)** Punkty $P, Q, R, S$ należą do jednej płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$ są współpłaszczyznowe. Dla punktów $P = (1,1,1)$, $Q = (0,1,2)$, $R = (-1,3,0)$, $S = (5,0,-4)$, mamy

$$\overrightarrow{PQ} = (-1,0,1), \ \overrightarrow{PR} = (-2,2,-1), \ \overrightarrow{PS} = (4,-1,-5).$$

Obliczając iloczyn mieszany wektorów $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$ otrzymamy

$$\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 5.$$

Ponieważ ten iloczyn jest różny od zera, więc punkty $P$, $Q$, $R$, $S$ nie należą do jednej płaszczyzny.

## Równania płaszczyzny

### Przykład 5.13

Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzn spełniających podane warunki:

**a)** płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (0, 1, -3)$ i jest prostopadła do wektora $\vec{n} = (-2, 3, -5)$;

**b)** płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (-1, 0, 1)$, $P_3 = (5, 6, 7)$;

**c)** płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (3, 0, 0)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $xOy$;

**d)** płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (0, 1, 0)$ i jest równoległa do wektorów $\vec{a} = (-1, 3, 0)$, $\vec{b} = (3, 1, -5)$;

**e)** płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (-1, 4, 1)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi_1 : x - y + 6z - 12 = 0$;

**f)** płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (2, 3, -6)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$, $\pi_2 : x - y + 2 = 0$;

**g*)** płaszczyzna jest dwusieczną kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny $\pi_1 : x - y + z = 0$; $\pi_2 : 5x + y - z + 24 = 0$.

#### Rozwiązanie

W rozwiązaniu wykorzystamy następujące fakty:

**1.** Równanie płaszczyzny $\pi$ przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = (A, B, C)$ ma postać

$$\pi : (\vec{r} - \vec{r}_0) \circ \vec{n} = 0, \text{ gdzie } \vec{r} = (x, y, z).$$

Po przekształceniach równanie to przyjmuje postać

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

**2.** Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i równoległej do niewspółliniowych wektorów $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ ma postać

$$\pi : \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{u} + t\vec{v}, \text{ gdzie } \vec{r} = (x, y, z) \text{ oraz } s, t \in \mathbf{R}.$$

Po rozpisaniu na współrzędne równanie to przyjmuje postać

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + a_1 s + a_2 t, \\ y = y_0 + b_1 s + b_2 t, \\ z = z_0 + c_1 s + c_2 t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \mathbf{R}.$$

**a)** Równanie ogólne płaszczyzny $\pi$ rozważanej w zadaniu ma postać

$$\pi : (x - 0, y - 1, z + 3) \circ (-2, 3, -5) = 0,$$

stąd

$$-2x + 3y - 5z - 18 = 0.$$

W równaniu parametrycznym płaszczyzny występują dwa niewspółliniowe wektory rozpinające tę płaszczyznę. Wektory te są prostopadłe do wektora normalnego $\vec{n}$. Takimi niewspółliniowymi wektorami są np. $\vec{u} = (3, 2, 0)$ oraz $\vec{v} = (0, 5, 3)$. Rzeczywiście, mamy $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ oraz $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$. Równanie parametryczne płaszczyzny $\pi$ (w postaci wektorowej) ma zatem postać

$$\pi : (x, y, z) = (0, 1, -3) + s(3, 2, 0) + t(0, 5, 3), \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R},$$

stąd otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = 3s, \\ y = 1 + 2s + 5t, \\ z = -3 + 3t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R}.$$

**b)** Płaszczyzna $\pi$ przechodząca przez punkty $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (-1, 0, 1)$, $P_3 = (5, 6, 7)$ jest równoległa do wektorów $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -1, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (4, 5, 6)$. Wektor normalny $\vec{n}$ tej płaszczyzny ma zatem postać

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-2, -1, 0) \times (4, 5, 6) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 12\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Wektor normalny $\vec{n}$ można skrócić np. do wektora $(1, -2, 1)$. Równanie ogólne płaszczyzny $\pi$ ma więc postać

$$\pi : (x - 1, y - 1, z - 1) \circ (1, -2, 1) = 0,$$

stąd

$$\pi : x - 2y + z = 0.$$

Przechodzimy teraz do równania parametrycznego płaszczyzny $\pi$. Płaszczyzna ta przechodzi przez punkt $P_1 = (1, 1, 1)$ i jest rozpięta na wektorach $\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, -1, 0)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (4, 5, 6)$, zatem

$$\pi : (x, y, z) = (1, 1, 1) + s(-2, -1, 0) + t(4, 5, 6), \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R},$$

stąd otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2s + 4t, \\ y = 1 - s + 5t, \\ z = 1 + 6t, \end{cases} \text{ gdzie } s, t \in \mathbb{R}.$$

**c)** Ponieważ płaszczyzna $\pi$ rozważana w zadaniu jest prostopadła do płaszczyzny $xOy$, więc jest równoległa do osi $Oz$. Jest zatem równoległa np. do wektora $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Ponadto płaszczyzna $\pi$ jest równoległa do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -1, 0)$. Wektor normalny tej płaszczyzny wyraża się zatem wzorem

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j}.$$

Równanie ogólne płaszczyzny $\pi$ ma postać

$$\pi : (x - 0, y - 1, z - 0) \circ (1, 3, 0) = 0,$$

stąd
$$\pi : x + 3y - 3 = 0.$$
Ponieważ płaszczyzna $\pi$ przechodzi przez punkt $P_1 = (0,1,0)$ oraz jest równoległa do wektorów $\vec{v} = (0,0,1)$, $\overrightarrow{P_1P_2} = (3,-1,0)$, więc jej równanie parametryczne ma postać
$$\pi : (x,y,z) = (0,1,0) + s(0,0,1) + t(3,-1,0), \text{ gdzie } s,t \in \boldsymbol{R},$$
stąd
$$\pi : \begin{cases} x = 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = s, \end{cases} \text{ gdzie } s,t \in \boldsymbol{R}.$$

**d)** Wektor normalny płaszczyzny $\pi$ rozważanej w zadaniu ma postać
$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (-1,3,0) \times (3,1,-5) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15\vec{i} - 5\vec{j} - 10\vec{k}.$$

Dla uproszczenia dalszych obliczeń wektor normalny można skrócić np. do wektora $\vec{n} = (3,1,2)$. Równanie płaszczyzny $\pi$ ma postać
$$\pi : (x - 0, y - 1, z - 0) \circ (3,1,2) = 0,$$
stąd
$$\pi : 3x + y + 2z - 1 = 0.$$
Ponieważ płaszczyzna $\pi$ przechodzi przez punkt $P = (0,1,0)$ i jest równoległa do wektorów $\vec{a} = (-1,3,0)$, $\vec{b} = (3,1,-5)$, więc jej równanie parametryczne przyjmuje postać
$$\pi : (x,y,z) = (0,1,0) + s(-1,3,0) + t(3,1,-5), \text{ gdzie } s,t \in \boldsymbol{R},$$
stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy
$$\pi : \begin{cases} x = -s + 3t, \\ y = 1 + 3s + t, \\ z = -5t, \end{cases} \text{ gdzie } s,t \in \boldsymbol{R}.$$

**e)** Ponieważ płaszczyzna $\pi$ rozważana w zadaniu jest równoległa do płaszczyzny $\pi_1 : x - y + 6z - 12 = 0$, więc jej wektor normalny $\vec{n}$ jest taki sam jak wektor normalny płaszczyzny $\pi_1$. Zatem $\vec{n} = (1,-1,6)$. Ponieważ płaszczyzna $\pi$ przechodzi przez punkt $P = (-1,4,1)$ i ma wektor normalny $\vec{n} = (1,-1,6)$, więc jej równanie ogólne ma postać
$$\pi : (x + 1, y - 4, z - 1) \circ (1,-1,6) = 0,$$
stąd
$$\pi : x - y + 6z - 1 = 0.$$
Znajdziemy teraz dwa niewspółliniowe wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, które są równoległe do szukanej płaszczyzny $\pi$. Ponieważ płaszczyzny $\pi_1$ i $\pi$ są równoległe, więc wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ muszą być prostopadłe do wektora normalnego płaszczyzny $\pi_1$, tj. do wektora $\vec{n}_1 = (1,-1,6)$. Takimi wektorami są np. $\vec{u} = (1,1,0)$ oraz $\vec{v} = (0,6,1)$. Rzeczywiście mamy $\vec{u} \circ \vec{n}_1 = 0$ oraz $\vec{v} \circ \vec{n}_1 = 0$. Ponieważ płaszczyzna $\pi$ przechodzi przez punkt $P = (-1,4,1)$ oraz jest równoległa do wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$, więc jej równanie parametryczne (wektorowe) ma postać
$$\pi : (x,y,z) = (-1,4,1) + s(1,1,0) + t(0,6,1), \text{ gdzie } s,t \in \boldsymbol{R},$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s, \\ y = 4 + s + 6t, \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \boldsymbol{R}.$$

**f)** Ponieważ szukana płaszczyzna $\pi$ ma być prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x+y+z-5 = 0$, $\pi_2 : x - y + 2 = 0$, więc jej wektor normalny $\vec{n}$ powinien być prostopadły do wektora normalnego $\vec{n}_1 = (1,1,1)$ płaszczyzny $\pi_1$ oraz do wektora normalnego $\vec{n}_2 = (1,-1,0)$ płaszczyzny $\pi_2$. Wektor prostopadły do wektorów $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ ma postać

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1,1,1) \times (1,-1,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Ponieważ płaszczyzna $\pi$ przechodzi przez punkt $P = (2,3,-6)$ i ma wektor normalny $\vec{n} = (1,1,-2)$, więc jej równanie ma postać

$$\pi : (x-2, y-3, z+6) \circ (1,1,-2) = 0,$$

stąd

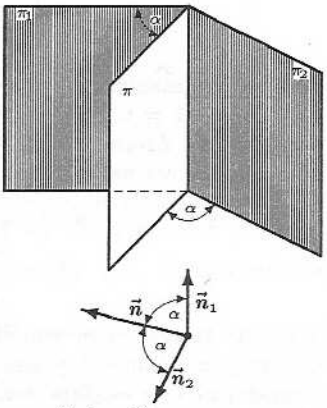
$$\pi : x + y - 2z - 17 = 0.$$

Znajdziemy teraz dwa niewspółliniowe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, które rozpinają szukaną płaszczyznę $\pi$. Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ muszą być prostopadłe do wektora normalnego $\vec{n} = (1,1,-2)$ tej płaszczyzny. Takimi niewspółliniowymi wektorami są np. $\vec{u} = (1,-1,0)$ oraz $\vec{v} = (0,2,1)$. Rzeczywiście $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ oraz $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$. Ponieważ płaszczyzna $\pi$ przechodzi przez punkt $P = (2,3,-6)$ i jest rozpięta przez wektory $\vec{u} = (1,-1,0)$ oraz $\vec{v} = (0,2,1)$, więc jej równanie parametryczne (wektorowe) ma postać

$$\pi : (x,y,z) = (2,3,-6) + s(1,-1,0) + t(0,2,1), \text{ gdzie } s, t \in \boldsymbol{R},$$

stąd otrzymamy

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + s, \\ y = 3 - s + 2t, \\ z = -6 + t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \boldsymbol{R}.$$




**g*)** Niech $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ oznaczają wektory normalne odpowiednio płaszczyzn $\pi_1$ i $\pi_2$. Zatem $\vec{n}_1 = (1,-1,1)$ oraz $\vec{n}_2 = (5,1,-1)$. Ponieważ płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny $\pi_1$ i $\pi_2$ (oznaczona na rysunku przez $\pi$), tworzy jednakowe kąty dwuścienne z płaszczyznami $\pi_1$ i $\pi_2$, więc wektor normalny $\vec{n}$ tej płaszczyzny jest dwusieczną kąta utworzonego przez wektory normalne $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$. Wektor $\vec{v}$, który leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez wersory $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ oraz tworzy z nimi jednakowe kąty ma postać $\vec{v} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$. Zatem wektor normalny $\vec{n}$ płaszczyzny $\pi$ wyraża się wzorem

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} + \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} + \frac{(5,1,-1)}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(5,1,-1) = \frac{1}{3\sqrt{3}}(8,-2,2).$$

Dla uproszczenia dalszych obliczeń skracamy wektor normalny np. do postaci $\vec{n} = (4,-1,1)$. Znajdziemy teraz punkt należący do płaszczyzn $\pi_1$ i $\pi_2$. Przyjmując np. $y = 0$, otrzymamy układ równań $\begin{cases} x+z=0, \\ 5x-z=-24. \end{cases}$ Rozwiązaniem tego układu równań jest para $x=-4$, $z=4$. Zatem $P=(-4,0,4)$ jest punktem wspólnym płaszczyzn $\pi_1$ i $\pi_2$. Ponieważ płaszczyzna dwusieczna przechodzi przez punkt $P$ i ma wektor normalny $\vec{n}$, zatem jej równanie ogólne ma postać

$$\pi : (x+4, y-0, z-4) \circ (4,-1,1) = 0,$$

stąd

$$\pi : 4x - y + z - 12 = 0.$$

**Uwaga.** Istnieje jeszcze druga płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego utworzonego przez płaszczyzny $\pi_1$ i $\pi_2$. Wektor normalny tej płaszczyzny wyraża się wzorem:

$$\vec{n}' = \frac{\vec{n}_1}{|\vec{n}_1|} - \frac{\vec{n}_2}{|\vec{n}_2|} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-2,-2,2).$$

Równanie drugiej płaszczyzny dwusiecznej ma zatem postać

$$\pi' : (x+4, y-0, z-4) \circ (1,1,-1) = 0,$$

stąd

$$\pi' : x + y - z + 8 = 0.$$

Znalezienie równań parametrycznych płaszczyzn $\pi$ i $\pi'$ zostawiamy Czytelnikowi.

## Równania prostej

### • Przykład 5.14

Napisać równania parametryczne i kierunkowe prostych spełniających podane warunki:

**a)** prosta przechodzi przez punkt $P = (1,0,2)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = (0,5,-3)$;

**b)** prosta przechodzi przez punkty $P_1 = (-1,1,0)$, $P_2 = (0,3,-2)$;

**c)** prosta przechodzi przez punkt $P = (1,-5,3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : x - 3z + 7 = 0$;

**d)** prosta przechodzi przez punkt $P = (0,0,-2)$ i jest prostopadła do wektorów $\vec{a} = (0,1,-5)$ i $\vec{b} = (-2,3,0)$;

**e)** prosta jest dwusieczną kąta utworzonego przez przecinające się proste

$$l_1 : \begin{cases} x = -t, \\ y = 2t, \\ z = 3t, \end{cases} \text{gdzie } t \in \mathbb{R}, \qquad l_2 : \begin{cases} x = -2+s, \\ y = 4-3s, \\ z = 6+2s, \end{cases} \text{gdzie } s \in \mathbb{R};$$

**f)** prosta jest częścią wspólną płaszczyzny $\pi_1 : x + 2z - 4 = 0$ i płaszczyzny $\pi_2 : x - y + 6 = 0$.

**Rozwiązanie**

Równanie parametryczne prostej $l$ przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$, równoległej do niezerowego wektora $\vec{v} = (a, b, c)$ ma postać

$$l: \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \text{ gdzie } t \in \boldsymbol{R},$$

gdzie $\vec{r} = (x, y, z)$ jest promieniem wodzącym punktu tej prostej. Po rozpisaniu na współrzędne powyższe równanie przyjmuje postać

$$l: \begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct, \end{cases} \text{ gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Inną formą zapisu tego równania jest tzw. równanie kierunkowe prostej. Równanie to ma postać

$$l: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

**a)** Równanie parametryczne (wektorowe) prostej $l$ przechodzącej przez punkt $P_0 = (1, 0, 2)$ i równoległej do wektora $\vec{v} = (0, 5, -3)$ ma postać

$$l: (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(0, 5, -3), \text{ gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Po rozpisaniu tej równości na współrzędne otrzymamy

$$l: \begin{cases} x = 1, \\ y = 5t, \\ z = 2 - 3t, \end{cases} \text{ gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Równanie kierunkowe prostej $l$ ma postać

$$l: \frac{x - 1}{0} = \frac{y - 0}{5} = \frac{z - 2}{-3}.$$

**b)** Ponieważ szukana prosta $l$ przechodzi przez punkty $P_1 = (-1, 1, 0)$, $P_2 = (0, 3, -2)$, więc jest równoległa do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 2, -2)$. Równanie parametryczne (wektorowe) tej prostej ma zatem postać

$$l: (x, y, z) = (-1, 1, 0) + t(1, 2, -2), \text{ gdzie } t \in \boldsymbol{R},$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$l: \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = -2t, \end{cases} \text{ gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Równanie kierunkowe prostej $l$ ma postać

$$l: \frac{x + 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{-2}.$$

**c)** Ponieważ prosta $l$ rozważana w zadaniu jest prostopadła do płaszczyzny $\pi: x - 3z + 7 = 0$, więc jest równoległa do wektora normalnego tej płaszczyzny, tj. do wektora $\vec{n} = (1, 0, -3)$. Równanie parametryczne (wektorowe) prostej przechodzącej przez punkt $P = (1, -5, 3)$ i równoległej do wektora $\vec{n} = (1, 0, -3)$ ma zatem postać

$$l: (x, y, z) = (1, -5, 3) + t(1, 0, -3), \text{ gdzie } t \in \boldsymbol{R},$$

stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$l: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -5, \\ z = 3 - 3t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Równanie kierunkowe prostej $l$ ma postać

$$l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-3}{-3}.$$

**d)** Ponieważ szukana prosta $l$ jest prostopadła do wektorów $\vec{a} = (0, 1, -5)$, $\vec{b} = (-2, 3, 0)$, więc jest równoległa do wektora $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$. Obliczamy teraz wektor $\vec{v}$. Mamy

$$\vec{v} = (0, 1, -5) \times (-2, 3, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 10\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Prosta $l$ przechodzi przez punkt $P = (0, 0, -2)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = (15, 10, 2)$, więc jej równanie parametryczne (wektorowe) ma postać

$$l: (x, y, z) = (0, 0, -2) + t(15, 10, 2), \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Stąd po rozpisaniu na współrzędne otrzymamy

$$l: \begin{cases} x = 15t, \\ y = 10t, \\ z = -2 + 2t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Równanie kierunkowe prostej $l$ ma postać

$$l: \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z+2}{2}.$$

**e)** Wektory kierunkowe $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ odpowiednio prostych $l_1$, $l_2$ mają postać $\vec{v}_1 = (-1, 2, 3)$, $\vec{v}_2 = (1, -3, 2)$. Ponieważ szukana prosta $l$ ma być dwusieczną kąta utworzonego przez proste $l_1$, $l_2$, więc jej wektor kierunkowy $\vec{v}$ powinien być dwusieczną kąta utworzonego przez wektory $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ lub przez wektory $\vec{v}_1$ i $-\vec{v}_2$. Wiadomo (patrz **Przykład 5.13. g***), że wektor $\vec{v}$ leżący w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektory niezerowe $\vec{u}$, $\vec{w}$ oraz tworzący z tymi wektorami jednakowe kąty ma postać

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}.$$

Zatem wektor kierunkowy $\vec{v}$ dwusiecznej $l$ ma postać

$$\vec{v} = \frac{(-1, 2, 3)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} + \frac{(1, -3, 2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(0, -1, 5),$$

a wektor kierunkowy $\vec{v}\,'$ drugiej dwusiecznej $l'$ ma postać

$$\vec{v}\,' = \frac{(-1, 2, 3)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} - \frac{(1, -3, 2)}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(-2, 5, 1).$$

Znajdziemy teraz punkt $P = (x, y, z)$ przecięcia prostych $l_1$ i $l_2$. Współrzędne tego punktu spełniają układ równań

$$\begin{cases} x = -t = -2 - s, \\ y = 2t = 4 - 3s, \\ z = 3t = 6 - 2s. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy $x = -2$, $y = 4$, $z = 6$, $s = 0$, $t = 2$. Zatem $P = (-2, 4, 6)$. Możemy więc napisać równania szukanych dwusiecznych. Przyjmując dla uproszczenia obliczeń, że wektory kierunkowe tych dwusiecznych mają postać $\vec{v} = (0, -1, 5)$ oraz $\vec{v}\,' = (-2, 5, 1)$ otrzymamy

$$l: \begin{cases} x = -2, \\ y = 4 - t, \\ z = 6 + 5t, \end{cases} \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R} \quad \text{oraz} \quad l': \begin{cases} x = -2 - 2t, \\ y = 4 + 5t, \\ z = 6 + t, \end{cases} \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Kierunkowe równania prostych $l$ i $l'$ mają postać

$$l: \frac{x+2}{0} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-6}{5} \quad \text{oraz} \quad l': \frac{x+2}{-2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-6}{1}.$$

**f)** Niech $\vec{n}_1$ oraz $\vec{n}_2$ oznaczają odpowiednio wektory normalne płaszczyzn $\pi_1 : x+2z-4 = 0$ oraz $\pi_2 : x - y + 6 = 0$. Wtedy $\vec{n}_1 = (1, 0, 2)$ oraz $\vec{n}_2 = (1, -1, 0)$. Wektor kierunkowy $\vec{v}$ szukanej prostej $l$ jest prostopadły do wektorów $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$, a zatem będzie miał postać $\vec{v} = c\,(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)$, gdzie $c \neq 0$. Przyjmując $c = 1$ otrzymamy

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, 0, 2) \times (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Potrzebny jest jeszcze dowolny punkt $P$ należący do prostej $l$. Punkt ten wyznaczymy z układu równań

$$\begin{cases} x \quad\;\; + 2z = \;\;4, \\ x - y \qquad = -6. \end{cases}$$

Przyjmując np. $x = 0$, otrzymamy $y = 6$ oraz $z = 2$. Zatem $P = (0, 6, 2)$. Równanie parametryczne prostej $l$ ma więc postać

$$l: \begin{cases} x = 2t, \\ y = 6 + 2t, \\ z = 2 - t, \end{cases} \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Równanie kierunkowe tej prostej ma postać $l: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-6}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

## Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn

**Przykład 5.15**

Zbadać, czy

**a)** punkty $A = (1, -2, 5)$, $B = (3, -2, 11)$ należą do prostej

$$l: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-5}{-3};$$

**b)** prosta

$$l: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2t, \\ z = 3 + 3t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}$$

jest zawarta w płaszczyźnie $\pi : 3x + 3y + z - 6 = 0$;

**c)** punkty $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, -1, 3)$ należą do płaszczyzny

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + s - t, \\ y = -3 - s + 2t, \\ z = 4 - 2t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \boldsymbol{R};$$

**d)** proste $l_1$ oraz $l_2$ mają punkt wspólny, jeżeli:

$$l_1: \begin{cases} x = t, \\ y = -2t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R} \quad l_2: \begin{cases} x = -1 + s, \\ y = 2 - s, \\ z = -3 + 4s, \end{cases} \quad \text{gdzie } s \in \boldsymbol{R};$$

**e)** prosta

$$l: \frac{x + 5}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 3}{-1}$$

jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y - z + 15 = 0$;

**f)** płaszczyzny $\pi_1 : 2x + 3y - 5z + 30 = 0$, $\pi_2 : \begin{cases} x = -5 + t, \\ y = 2 + 5s + t, \\ z = 1 + 3s + t, \end{cases}$ gdzie $s, t \in \boldsymbol{R}$

są równoległe.

**Rozwiązanie**

**a)** Równanie parametryczne prostej $l$ ma postać

$$(x, y, z) = (1 - t, -2, 5 - 3t),$$

gdzie $t \in \boldsymbol{R}$. Dla $t = 0$ otrzymujemy punkt $A$, zaś dla $t = -2$ punkt $B$. Oba punkty należą więc do prostej $l$.

**b)** Podstawiając przedstawienia parametryczne współrzędnych prostej

$$l: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2t, \\ z = 3 + 3t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}$$

do równania płaszczyzny $\pi : 3x + 3y + z - 6 = 0$ otrzymamy, że równość $3(1 + t) + 3(-2t) + (3 + 3t) - 6 = 0$ jest prawdziwa dla każdego $t \in \boldsymbol{R}$. Oznacza to, że prosta $l$ jest zawarta w płaszczyźnie $\pi$.

**c)** Podstawiając współrzędne punktu $A = (0, 0, 0)$ do równania parametrycznego płaszczyzny

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + s - t, \\ y = -3 - s + 2t, \\ z = 4 - 2t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \boldsymbol{R},$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} s - t = -1, \\ s - 2t = -3, \\ 2t = 4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $s = 1$, $t = 2$. Oznacza to, że punkt $A$ należy do płaszczyzny $\pi$. Postępując podobnie z punktem $B$, otrzymamy sprzeczny układ równań. Oznacza to, że punkt $B$ nie należy do płaszczyzny $\pi$.

**d)** Aby sprawdzić, czy proste $l_1$ i $l_2$ mają punkt wspólny rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} t = -1 + s, \\ -2t = 2 - s, \\ 3t = -3 + 4s. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para $t = -1$, $s = 0$. Proste $l_1$ i $l_2$ mają zatem punkt wspólny. Współrzędne tego punktu odpowiadają wartościom $t = -1$ i $s = 0$ parametrów i są równe $x = -1$, $y = 2$, $z = -3$.

**e)** Prosta $l$ o wektorze kierunkowym $\vec{v}$ jest równoległa do płaszczyzny $\pi$ o wektorze normalnym $\vec{n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$. Wektor kierunkowy prostej rozważanej w zadaniu ma postać $\vec{v} = (-2, 1, -1)$, a wektor normalny płaszczyzny $\pi$ postać $\vec{n} = (1, 1, -1)$. Wektory te spełniają warunek $\vec{v} \circ \vec{n} = 0$, zatem prosta $l$ jest równoległa do płaszczyzny $\pi$.

**f)** Dwie płaszczyzny są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne są współliniowe. Wektor normalny $\vec{n}_1$ płaszczyzny $\pi_1 : 2x + 3y - 5z + 30 = 0$ ma postać $\vec{n}_1 = (2, 3, -5)$. Natomiast wektor normalny $\vec{n}_2$ płaszczyzny

$$\pi_2 : (x, y, z) = (-5, 2, 1) + s(0, 5, 3) + t(1, 1, 1), \text{ gdzie } s, t \in \mathbf{R}$$

ma postać

$$\vec{n}_2 = (0, 5, 3) \times (1, 1, 1) = (2, 3, -5).$$

Ponieważ wektory $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ są współliniowe, więc płaszczyzny $\pi_1$ i $\pi_2$ są równoległe.

## • Przykład 5.16

Znaleźć punkty przecięcia:

**a)** prostych $l_1 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$, $l_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-4}$;

**b)** prostej $l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -3t, \\ z = 4 - t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbf{R}$ i płaszczyzny $\pi : x + y + z - 7 = 0$;

**c)** płaszczyzn

$$\pi_1 : (x, y, z) = (0, 0, 0) + r(1, -2, 4) + s(0, -1, 3), \text{ gdzie } r, s \in \mathbf{R},$$
$$\pi_2 : (x, y, z) = (1, -1, 1) + t(1, 1, 1) + u(-1, 0, 0), \text{ gdzie } t, u \in \mathbf{R},$$
$$\pi_3 : (x, y, z) = (2, 3, 3) + v(1, 0, 0) + w(0, -2, -1) \text{ gdzie } v, w \in \mathbf{R}.$$

**Rozwiązanie**

**a)** Współrzędne $(x, y, z)$ punktu przecięcia prostych $l_1$ i $l_2$ spełniają układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{3}, \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-4}. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \\ z = 7. \end{cases}$$

Zatem punkt wspólny prostych $l_1$ i $l_2$ ma współrzędne $(-1, 1, 7)$.

**b)** Aby obliczyć współrzędne punktu przecięcia prostej $l$ i płaszczyzny $\pi$, wstawiamy przedstawienia parametryczne współrzędnych tej prostej do równania płaszczyzny. Wtedy mamy

$$(1+t) + (-3t) + (4-t) - 7 = 0,$$

stąd $t = -\frac{2}{3}$. Punkt wspólny prostej $l$ i płaszczyzny $\pi$ ma zatem współrzędne $\left(\frac{1}{3}, 2, \frac{14}{3}\right)$.

**c)** Aby znaleźć współrzędne punktu przecięcia płaszczyzn $\pi_1$, $\pi_2$ i $\pi_3$, rozwiązujemy układ 6 równań z niewiadomymi parametrami $r, s, t, u, v, w$. Mamy

$$\begin{cases} r = 1 + t - u = 2 + v, \\ -2r - s = -1 + t \qquad = 3 - 2w, \\ 4r + 3s = 1 + t \qquad = 3 - w. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest szóstka liczb $r = 1, s = -1, t = 0, u = 0, v = -1, w = 2$. Punkt $P$ przecięcia płaszczyzn $\pi_1$, $\pi_2$ i $\pi_3$ odpowiada np. wartościom parametrów $t = 0, u = 0$, zatem $P = (1, -1, 1)$.

## Przykład 5.17

Obliczyć odległość

**a)** punktu $P = (1, 0, -5)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 12y + 4z + 8 = 0$;

**b)** płaszczyzn równoległych $\pi_1 : 2x - y + 3z = 0$, $\pi_2 : -4x + 2y - 6z + 8 = 0$;

**c)** punktu $P = (0, 0, 0)$ od prostej $l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-2}$;

**d)** prostych równoległych $l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$, $l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$;

**e)** prostych skośnych $l_1 : \begin{cases} x = 0, \\ z = 1, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0; \end{cases}$

**f)** prostej $l : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ od płaszczyzny $\pi : x + y - z + 7 = 0$.

**Rozwiązanie**

**a)** W rozwiązaniu wykorzystamy wzór na odległość $d$ punktu $P = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$;

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Odległość $d$ punktu $P = (1, 0, -5)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 12y + 4z + 8 = 0$ jest równa

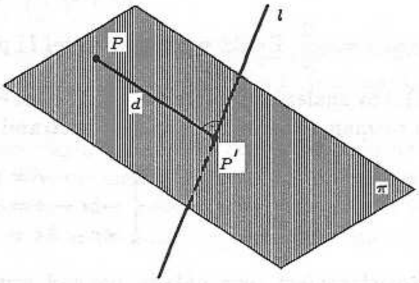
$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 12 \cdot 0 + 4 \cdot (-5) + 8|}{\sqrt{3^2 + (-12)^2 + 4^2}} = \frac{9}{\sqrt{169}} = \frac{9}{13}.$$

**b)** W rozwiązaniu wykorzystamy wzór na odległość $d$ płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$;

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Przekształcamy równanie płaszczyzny $\pi_2$ tak, aby miała te same współczynniki co płaszczyzna $\pi_1$. Mamy $\pi_2 : 2x - y + 3z - 4 = 0$. Odległość $d$ płaszczyzn $\pi_1$ i $\pi_2$ jest zatem równa

$$d = \frac{|0 - (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}}.$$



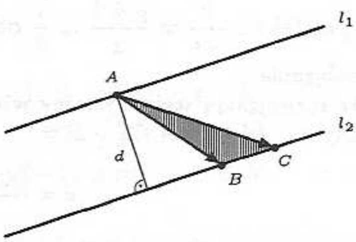

**c)** Odległość $d$ punktu $P$ od prostej $l$ wyznaczymy w następujący sposób: przez punkt $P$ prowadzimy płaszczyznę $\pi$ prostopadłą do prostej $l$, następnie wyznaczamy punkt $P'$ przecięcia prostej $l$ z płaszczyzną $\pi$ (będzie to rzut punktu $P$ na prostą $l$) i wyznaczymy odległość punktów $P$ i $P'$. Ponieważ płaszczyzna $\pi$ ma wektor normalny $\vec{n}$ taki sam jak wektor kierunkowy $\vec{v}$ prostej $l$, więc $\vec{n} = \vec{v} = (2, -1, -2)$. Równanie płaszczyzny $\pi$ przechodzącej przez punkt $P = (0, 0, 0)$ ma zatem postać $\pi : 2(x-0)-1(y-0)-2(z-0) = 0$, stąd otrzymamy $\pi : 2x - y - 2z = 0$.

Znajdziemy teraz punkt $P'$ przecięcia prostej $l$ i płaszczyzny $\pi$. Współrzędne tego punktu spełniają układ równań

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0, \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymamy $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{4}{3}$, $z = \frac{7}{3}$. Obliczamy teraz odległość $d$ punktu $P' = \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$ od punktu $P = (0, 0, 0)$, czyli szukaną odległość punktu $P$ od prostej $l$, mamy

$$d = \sqrt{\left(\frac{5}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{90}}{3} = \sqrt{10}.$$




**d) I sposób.** Odległość $d$ między prostymi równoległymi $l_1$ i $l_2$ wyznaczymy w następujący sposób: na prostej $l_1$ wybieramy dowolny punkt $A$, a na prostej $l_2$ dwa dowolne punkty $B$, $C$; obliczamy pole $S$ trójkąta $ABC$ (wykorzystując iloczyn wektorowy); obliczamy wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka $A$.

Aby wyznaczyć dowolny punkt $A$ na prostej $l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$, przyjmujemy $x = 1$, stąd $y = 2$ oraz $z = -3$. Zatem $A = (1, 2, -3)$. Podobnie znajdujemy punkty $B$ i $C$ na prostej $l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$. Przyjmując $x = 0$, otrzymamy $y = 0$ oraz $z = 0$, a przyjmując $x = 1$, otrzymamy $y = 2$ oraz $z = 3$. Zatem $B = (0,0,0)$, $C = (1,2,3)$. Obliczamy teraz pole $S$ trójkąta $ABC$ korzystając ze wzoru

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

Tak więc mamy

$$S = \frac{1}{2}|(-1,-2,3) \times (0,0,6)| = \frac{1}{2}|(-12,6,0)| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + 6^2 + 0^2} = 3\sqrt{5}.$$

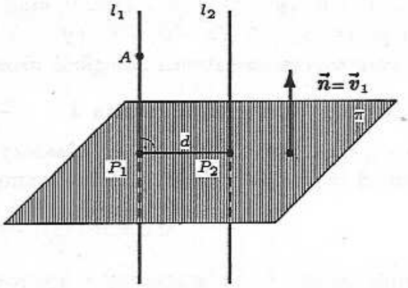
Obliczamy następnie długość boku $BC$ trójkąta $ABC$. Mamy

$$|BC| = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{14}.$$

Możemy teraz obliczyć wysokość trójkąta $ABC$ opuszczoną z wierzchołka $A$, czyli szukaną odległość $d$ prostych $l_1$ i $l_2$. Mamy

$$d = \frac{2S}{|BC|} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{5}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{7}\sqrt{70}.$$

**II sposób**. Odległość $d$ między prostymi równoległymi $l_1$ i $l_2$ obliczymy w następujący sposób: wyznaczymy równanie płaszczyzny $\pi$ prostopadłej do obu prostych (przechodzącej przez dowolny punkt $P_1$ na prostej $l_1$), następnie wyznaczamy punkt $P_2$ przecięcia tej płaszczyzny z prostą $l_2$ i na końcu obliczamy odległość punktów $P_1$, $P_2$ (rysunek). Wektor normalny $\vec{n}$ płaszczyzny $\pi$ jest równoległy do wektora kierunkowego $\vec{v}_1$ prostej $l_1$. Można przyjąć, że $\vec{n} = \vec{v}_1 = (1,2,3)$. Współrzędne punktu $P_1$ należącego do prostej $l_1$ wyznaczamy tak jak w **I sposobie**. zatem $P_1 = (1,2,-3)$. Równanie płaszczyzny $\pi$ przechodzącej przez punkt $P_1$ i prostopadłej do obu prostych ma postać




$$\pi : (x-1, y-2, z+3) \circ (1,2,3) = 0,$$

stąd

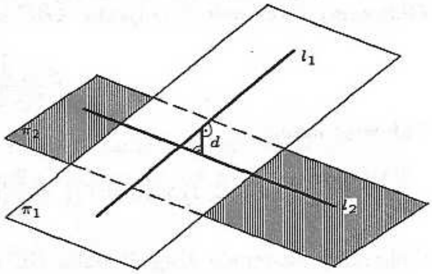
$$\pi : x + 2y + 3z + 4 = 0.$$

Współrzędne punktu $P_2$ są rozwiązaniami układu równań

$$P_2 : \begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{6}, \\ x + 2y + 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymamy $P_2 = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}\right)$. Odległość $d$ prostych równoległych $l_1$ i $l_2$ jest zatem równa

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{\left(1+\frac{2}{7}\right)^2 + \left(2+\frac{4}{7}\right)^2 + \left(-3+\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{70}}{7}.$$




**e)** W rozwiązaniu wykorzystamy fakt mówiący, że odległość dwóch prostych skośnych jest równa odległości dwóch płaszczyzn równoległych zawierających te proste. Najpierw znajdziemy wektory kierunkowe $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ odpowiednio prostych $l_1$ i $l_2$. Wektor kierunkowy prostej $l_1 : \begin{cases} x = 0, \\ z = 1, \end{cases}$ jest równy $\vec{v}_1 = (0,1,0)$, a prostej $l_2$ : $\begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0, \end{cases}$ równy $\vec{v}_2 = (1,1,0)$.

Wspólny wektor normalny $\vec{n}$ płaszczyzn równoległych $\pi_1$ i $\pi_2$ zawierających odpowiednio proste $l_1$ i $l_2$, jest prostopadły do obu wektorów. Można zatem przyjąć, że

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (0,1,0) \times (1,1,0) = (0,0,-1).$$

Napiszemy teraz równania płaszczyzn $\pi_1$ i $\pi_2$. W tym celu wybieramy po jednym dowolnym punkcie na każdej z prostych. Na prostej $l_1$ wybraliśmy punkt $A_1 = (0,0,1)$, a na prostej $l_2$ punkt $A_2 = (0,1,0)$. Równanie płaszczyzny $\pi_1$ ma zatem postać $\pi_1 :$ $0 \cdot (x-0) + 0 \cdot (y-0) - (z-1) = 0$, stąd $\pi_1 : z = 1$. Podobnie równanie płaszczyzny $\pi_2$ ma postać $\pi_2 : 0 \cdot (x-0) + 0 \cdot (y-1) - (z-0) = 0$, stąd $\pi_2 : z = 0$. Odległość $d$ płaszczyzn $\pi_1$ i $\pi_2$, a zatem i odległość prostych $l_1$ i $l_2$, jest równa $d = |1-0| = 1$.

**f)** Zauważmy najpierw, że prosta $l : \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{1}$ o wektorze kierunkowym $\vec{v} = (-1,2,1)$, jest równoległa do płaszczyzny $\pi : x + y - z + 7 = 0$ o wektorze normalnym $\vec{n} = (1,1,-1)$. Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\vec{n} \circ \vec{v} = (1,1,-1) \circ (-1,2,1) = 0.$$

Odległość prostej $l$ od płaszczyzny $\pi$ jest równa odległości dowolnego punktu prostej $l$ od tej płaszczyzny. Wybieramy dowolny punkt $P$ na prostej $l$. Przyjmując $x = 0$, otrzymamy $y = -1$ oraz $z = 0$. Stąd $P = (0,-1,0)$. Korzystając teraz ze wzoru na odległość punktu od płaszczyzny otrzymamy

$$d = \frac{|0 + (-1) - 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

## • Przykład 5.18

Obliczyć miarę kąta między:

**a)** prostą $l : \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ i płaszczyzną $\pi : 2x - 3y - 5 = 0$;

**b)** płaszczyznami $\pi_1 : (x,y,z) = (1,6,7) + s(-1,2,0) + t(1,1,1)$, gdzie $s,t \in \boldsymbol{R}$, $\pi_2 : (x,y,z) = (3,4,5) + s(0,1,-3) + t(1,0,-2)$, gdzie $s,t \in \boldsymbol{R}$;

**c)** prostymi $l_1 : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z + 3 = 0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ -x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$

**Rozwiązanie**

**a)** Miara kąta $\alpha$ między prostą $l$ o wektorze kierunkowym $\vec{v}$ i płaszczyzną $\pi$ o wektorze normalnym $\vec{n}$ jest określona wzorem

$$\alpha = \arccos \frac{|\vec{n} \times \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Ponieważ prosta $l$ ma wektor kierunkowy $\vec{v} = (-3, -2, 1)$, a płaszczyzna $\pi$ wektor normalny $\vec{n} = (2, -3, 0)$, więc

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos \frac{|(2,-3,0) \times (-3,-2,1)|}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2}} \\ &= \arccos \frac{|(-3,-2,-13)|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}} = \arccos 1 = 0\,[\,\mathrm{rad}\,].\end{aligned}$$

oznacza to, że prosta $l$ jest równoległa do płaszczyzy $\pi$.

**b)** W tym przykładzie wykorzystamy fakt mówiący, że miara kąta między dwiema płaszczyznami jest równa mierze kąta między wektorami normalnymi tych płaszczyzn. Wyznaczymy teraz wektory normalne płaszczyzn $\pi_1$ i $\pi_2$. Płaszczyzna $\pi_1$ jest rozpięta na wektorach $\vec{u}_1 = (-1, 2, 0)$, $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, a płaszczyzna $\pi_2$ na wektorach $\vec{u}_2 = (0, 1, -3)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, -2)$. Wektory normalne $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ tych płaszczyzn mają odpowiednio postaci:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= \vec{u}_1 \times \vec{v}_1 = (-1,2,0) \times (1,1,1) = (2,1,-3), \\ \vec{n}_2 &= \vec{u}_2 \times \vec{v}_2 = (0,1,-3) \times (1,0,-2) = (-2,-3,-1).\end{aligned}$$

Miara kąta $\alpha$ między wektorami normalnymi $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ (a zatem i między płaszczyznami $\pi_1$ i $\pi_2$) jest równa

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \\ &= \arccos \frac{|(2,1,-3) \circ (-2,-3,-1)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} \\ &= \arccos \frac{2}{7} \approx 1,28\,[\,\mathrm{rad}\,] \approx 73,4^\circ.\end{aligned}$$

**c)** Kątem między dwiema prostymi nazywamy kąt między wektorami kierunkowymi tych prostych. Wektor kierunkowy $\vec{v}_1$ prostej $l_1 : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z + 3 = 0 \end{cases}$ ma postać

$$\vec{v}_1 = (1,1,0) \times (0,1,-1) = (-1,1,1),$$

a wektor kierunkowy $\vec{v}_2$ prostej $l_2 : \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ -x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$ postać

$$\vec{v}_2 = (1,-2,1) \times (-1,3,2) = (-7,-3,1).$$

Miara kąta $\alpha$ między wektorami $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ (a zatem i miara kąta między prostymi $l_1$ i $l_2$) jest równa

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos \frac{|\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \\ &= \arccos \frac{|(-1,1,1) \circ (-7,-3,1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2 + 1^2}} \\ &= \arccos \frac{5}{\sqrt{177}} \approx 1,19\,[\,\mathrm{rad}\,] \approx 67,9^\circ.\end{aligned}$$

**Przykład 5.19**

Znaleźć rzut prostokątny:

**a)** punktu $P = (1, 0, -3)$ na prostą $l: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$;

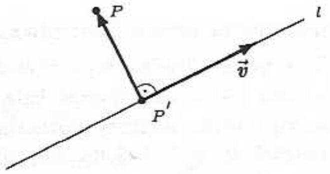
**b)** punktu $P = (0, 0, 1)$ na płaszczyznę $\pi: x + y - 2z + 4 = 0$;

**c)** prostej $l: x = y = z$ na płaszczyznę $\pi: x + 2y + 3z - 6 = 0$.

**Rozwiązanie**

**a) I sposób.** Punkt $P' \in l$ jest rzutem prostokątnym punktu $P$ na prostą $l$, jeżeli spełniony jest warunek

$$\overrightarrow{P'P} \perp \vec{v},$$




gdzie $\vec{v}$ oznacza wektor kierunkowy prostej $l$. Niech $P' = (x, y, z)$. Wtedy

$$\overrightarrow{P'P} = (1 - x, -y, -3 - z)$$

Wektor $\overrightarrow{P'P}$ jest prostopadły do wektora $\vec{v} = (2, -1, 2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{P'P} \circ \vec{v} = 0$. Współrzędne punktu $P'$ spełniają zatem układ równań

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}, \\ (1 - x, -y, -3 - z) \circ (2, -1, 2) = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi

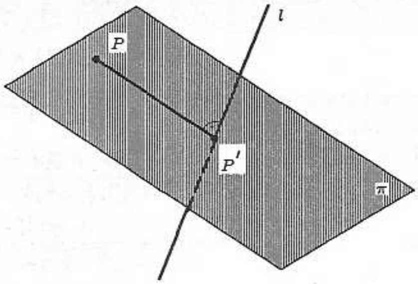
$$\begin{cases} -x - 2y \phantom{{}+z} = -2, \\ \phantom{-x-{}} 2y + z = 1, \\ -2x + y - 2z = 4. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x = -\frac{2}{9}$, $y = \frac{10}{9}$, $z = -\frac{11}{9}$. Zatem

$$P' = \left(-\frac{2}{9}, \frac{10}{9}, -\frac{11}{9}\right).$$

**II sposób.** Szukany rzut $P'$ jest punktem, w którym prosta $l$ przecina płaszczyznę $\pi$ prostopadłą do niej i przechodzącą przez punkt $P$. Równanie płaszczyzny ma postać

$$\pi: 2x - y + 2z + 4 = 0.$$




Prostą $l$ przedstawiamy w postaci parametrycznej

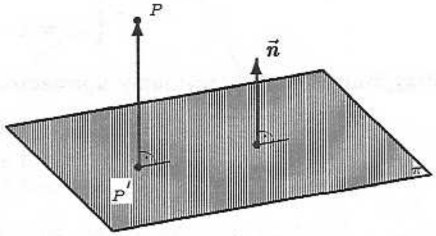
$l: x = 2t, y = 1 - t, z = -1 + 2t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Współrzędne punktu $P' = (2t, 1 - t, -1 + 2t)$ wyznaczamy z zależności $2(2t) - (1 - t) + 2(-1 + 2t) + 4 = 0$.

Stąd $9t+1=0$, czyli $t=-\dfrac{1}{9}$, więc $P^{'}=\left(-\dfrac{2}{9},\dfrac{10}{9},-\dfrac{11}{9}\right)$.

**b) I sposób.** Punkt $P^{'}\in\pi$ jest rzutem prostokątnym punktu $P$ na płaszczyznę $\pi$, jeżeli spełniony jest warunek $\overrightarrow{P^{'}P}\parallel\vec{n}$, gdzie $\vec{n}$ oznacza wektor normalny płaszczyzny $\pi$. Niech $P^{'}=(x,y,z)$. Wtedy $\overrightarrow{P^{'}P}=(-x,-y,1-z)$. Wektor $\overrightarrow{P^{'}P}$ jest równoległy do wektora $\vec{n}=(1,1,-2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overrightarrow{P^{'}P}=k\cdot\vec{n}$ dla pewnego $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Współrzędne punktu $P^{'}$ spełniają zatem układ równań

$$\begin{cases} x+y-2z+4=0,\\ \dfrac{-x}{1}=\dfrac{-y}{1}=\dfrac{1-z}{-2}.\end{cases}$$




Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x+\ y-\ 2z=-4,\\ x-\ y\qquad\ =\ 0,\\ \qquad 2y+\ z=\ 1.\end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{1}{3}$, $z=\dfrac{5}{3}$. Zatem

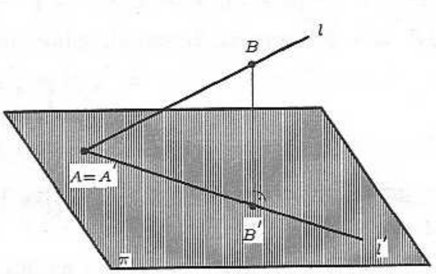
$$P^{'}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right).$$

**II sposób** Niech $l$ oznacza prostą prostopadłą do płaszczyzny $\pi$ i przechodzącą przez punkt $P$. Równanie parametryczne tej prostej ma postać

$$l:\ x=t, y=t, z=1-2t,\quad \text{gdzie } t\in\mathbb{R}.$$

Szukany rzut $P^{'}$ jest punktem wspólnym prostej $l$ i płaszczyzny $\pi$. Jego współrzędne $(t,t,1-2t)$ wstawiamy do równania płaszczyzny $\pi$ otrzymując $t+t-2(1-2t)+4=0$. Stąd $6t+2=0$, więc $t=-\dfrac{1}{3}$. Zatem $P^{'}=\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right)$.

**c)** Rzut prostej $l$ na płaszczyznę $\pi$ wyznaczymy w następujący sposób. Na prostej $l$ wybieramy dwa dowolne punkty $A$ i $B$. Następnie znajdujemy rzuty prostokątne $A^{'}$ i $B^{'}$ tych punktów na płaszczyznę $\pi$. Rzutem prostokątnym prostej $l$ na płaszczyznę $\pi$ będzie wtedy prosta $l^{'}$ przechodząca przez punkty $A^{'}$ i $B^{'}$. Dla uproszczenia obliczeń wygodnie jest przyjąć, że $A$ jest punktem przecięcia prostej $l$ i płaszczyzny $\pi$. Wtedy $A^{'}=A$. Niech $A=(x,y,z)$. Współrzędne punktu $A$ spełniają układ równań




$$\begin{cases} x=y=z,\\ x+2y+3z-6=0.\end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Zatem $A = (1, 1, 1) = A'$. Wybieramy teraz dowolny punkt $B = \left(x', y', z'\right) \neq A$ na prostej $l$. Przyjmując np. $x' = 0$, otrzymamy $y' = 0$ oraz $z' = 0$. Postępując podobnie jak w punkcie **b)** tego przykładu znajdziemy rzut prostokątny $B' = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$ punktu $B$ na płaszczyznę $\pi$. Teraz znajdziemy równanie prostej $l'$ przechodzącej przez punkty $A'$ i $B'$. Mamy

$$l' : \begin{cases} x = 1 + \frac{4}{7}t, \\ y = 1 + \frac{1}{7}t, \\ z = 1 - \frac{2}{7}t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R}.$$

Przyjmując $t = 7s$ otrzymamy uproszczoną postać tego równania

$$l' : \begin{cases} x = 1 + 4s, \\ y = 1 + s, \\ z = 1 - 2s, \end{cases} \quad \text{gdzie } s \in \boldsymbol{R}.$$

## • Przykład 5.20

Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (0, 1, 3)$ względem:

**a)** punktu $S = (1, 0, -1)$;

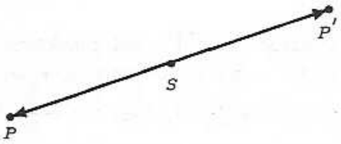
**b)** prostej $l : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{3}$;

**c)** płaszczyzny $\pi : x + y + z = 0$.

**Rozwiązanie**

**a)** Punkt $P'$ jest symetryczny do punktu $P$ względem punktu $S$, jeżeli spełnia warunek

$$\overrightarrow{SP'} = -\overrightarrow{SP}.$$




Niech $P' = (x, y, z)$. Wtedy $\overrightarrow{SP'} = (x - 1, y, z + 1)$ oraz $\overrightarrow{SP} = (-1, 1, 4)$. Z warunku $\overrightarrow{SP'} = -\overrightarrow{SP}$ wynika, że współrzędne punktu $P'$ spełniają układ równań

$$\begin{cases} x - 1 = 1, \\ y = -1, \\ z + 1 = -4. \end{cases}$$

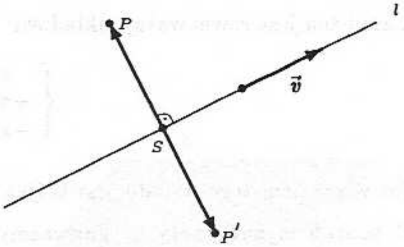
Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x = 2$, $y = -1$, $z = -5$. Zatem $P' = (2, -1, -5)$.

**b)** Punkt $P'$ jest symetryczny do punktu $P$ względem prostej $l$, jeżeli spełnia warunek $\overrightarrow{SP'} = -\overrightarrow{SP}$, gdzie $S$ oznacza rzut prostokątny punktu $P$ na prostą $l$. Znajdziemy teraz rzut prostokątny $S$ punktu $P = (0, 1, 3)$ na prostą

$$l : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{3}.$$

**I sposób wyznaczania** $S$. Niech $S = (x, y, z)$. Ponieważ punkt należy do prostej $l$, więc spełnia jej równania. Ponadto wektor $\overrightarrow{SP}$ jest prostopadły do wektora kierunkowego $\vec{v}$ tej prostej, więc spełnia warunek $\overrightarrow{SP} \circ \vec{v} = 0$.

Mamy $\vec{v} = (-2, 1, 3)$ oraz $\overrightarrow{SP} = (-x, 1 - y, 3 - z)$. Współrzędne punktu $S$ spełniają układ równań




$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-5}{3}, \\ (-x, 1-y, 3-z) \circ (-2, 1, 3) = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x + 2y \phantom{{}-z} = -1, \\ \phantom{x+{}} 3y - z = -5, \\ 2x - y - 3z = -10. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x = 0$, $y = -\dfrac{1}{2}$, $z = \dfrac{7}{2}$, zatem $S = \left(0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$.

**II sposób wyznaczania** $S$. Równanie parametryczne tej prostej ma postać $l: \ x = -1 - 2t, y = t, z = 5 + 3t, \ t \in \mathbb{R}$. Punkt $S$ jest punktem przecięcia prostej $l$ z płaszczyzną $\pi$ prostopadłą do $l$ i przechodzącą przez punkt $P$. Równanie płaszczyzny $\pi$ jest postaci $\pi: -2x + y + 3z - 10 = 0$. Współrzędne $(-1 - 2t, t, 5 + 3t)$ punktu $S$ wyznaczymy z zależności $-2(-1 - 2t) + t + 3(5 + 3t) - 10 = 0$. Stąd $14t + 7 = 0$. Zatem $t = -\dfrac{1}{2}$, więc $S = \left(0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$. Znajdziemy teraz punkt $P'$. Niech $P' = \left(x', y', z'\right)$. Wtedy

$$\overrightarrow{SP}' = \left(x' - 0, y' + \frac{1}{2}, z' - \frac{7}{2}\right) \quad oraz \quad \overrightarrow{SP} = \left(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Współrzędne punktu $P'$ znajdujemy z układu równań

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}, \\ z' - \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x' = 0$, $y' = -2$, $z' = 4$. Zatem $P' = (0, -2, 4)$.

**c)** Punkt $P'$ jest symetryczny do punktu $P$ względem płaszczyzny $\pi$, jeżeli spełnia warunek $\overrightarrow{SP}' = -\overrightarrow{SP}$, gdzie $S$ oznacza rzut prostokątny punktu $P$ na płaszczyznę $\pi$. Znajdziemy teraz rzut prostokątny $S$ punktu $P = (0, 1, 3)$ na płaszczyznę

$$\pi: x + y + z = 0.$$

**I sposób wyznaczania** $S$. Niech $S = (x, y, z)$. Ponieważ punkt $S$ należy do płaszczyzny $\pi$, więc spełnia jej równanie. Ponadto wektor $\overrightarrow{SP}$ jest prostopadły do tej płaszczyzny, więc jest równoległy do wektora normalnego $\vec{n}$ płaszczyzny $\pi$, czyli spełnia warunek $\overrightarrow{SP} = k\vec{n}$

dla pewnego $k \in R\setminus\{0\}$. Mamy $\vec{n} = (1,1,1)$ oraz $\overrightarrow{SP} = (-x, 1-y, 3-z)$. Współrzędne punktu $S$ spełniają układ równań

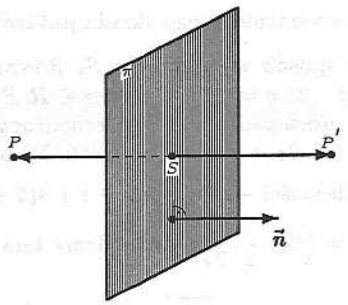
$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ \dfrac{-x}{1} = \dfrac{1-y}{1} = \dfrac{3-z}{1}. \end{cases}$$

Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ -x + y \phantom{+z} = 1, \\ -x \phantom{+y} + z = 3. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x = -\frac{4}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{5}{3}$.

**II sposób wyznaczania** $S$. Zauważmy, że prosta $l: \ x = t, y = 1+t, z = 3+t$, gdzie $t \in R$, przechodzi przez punkt $P$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi$. Punkt $S = (t, 1+t, 3+t)$ jest punktem przecięcia prostej $l$ i płaszczyzny $\pi$. Jego współrzędne wyznaczamy z zależności $t + (1+t) + (3+t) = 0$. Stąd $t = -\frac{4}{3}$, zatem $S = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Znajdziemy teraz punkt $P'$. Niech $P' = \left(x', y', z'\right)$. Wtedy




$$\overrightarrow{SP'} = \left(x' + \frac{4}{3}, y' + \frac{1}{3}, z' - \frac{5}{3}\right)$$

oraz

$$\overrightarrow{SP} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Współrzędne punktu $P'$ znajdziemy z układu równań

$$\begin{cases} x' + \dfrac{4}{3} = -\dfrac{4}{3}, \\ y' + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{4}{3}, \\ z' - \dfrac{5}{3} = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x' = -\frac{8}{3}$, $y' = -\frac{5}{3}$, $z' = \frac{1}{3}$. Zatem $P' = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

## • Przykład 5.21

Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{w} = (1, -1, 1)$:

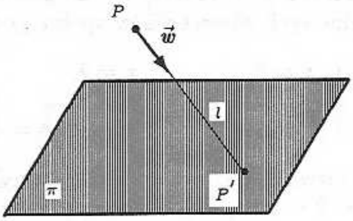
**a)** punktu $P = (0,1,0)$ na płaszczyznę $\pi : x + 3y - 6 = 0$;

**b)** prostej $l : x = -2y = 3z$ na płaszczyznę $\pi : x + y + z - 5 = 0$.

**Rozwiązanie**

**a)** Rzut punktu $P$ na płaszczyznę $\pi$ w kierunku wektora $\vec{w}$ jest punktem przecięcia prostej $l$, o wektorze kierunkowym $\vec{w}$, poprowadzonej przez punkt $P$, z płaszczyzną $\pi$ (rysunek). Znajdziemy najpierw równanie prostej $l$ o wektorze kierunkowym $\vec{w} = (1, -1, 1)$ przechodzącej przez punkt $P = (0, 1, 0)$. Mamy

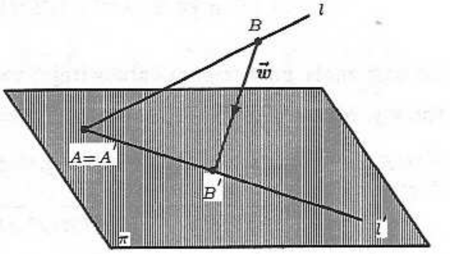
$$l : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}.$$




Wyznaczymy teraz punkt $P' = (x, y, z)$ przecięcia prostej $l$ z płaszczyzną $\pi$. Współrzędne tego punktu spełniają układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}, \\ x + 3y - 6 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, $z = -\frac{3}{2}$. Zatem $P' = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.




**b)** Rzut prostej $l$ na płaszczyznę $\pi$ w kierunku wektora $\vec{w}$ wyznaczymy w następujący sposób. Na prostej $l$ wybieramy dwa dowolne punkty $A$ i $B$. Następnie znajdujemu ich rzuty $A'$ i $B'$ na płaszczyznę $\pi$ w kierunku wektora $\vec{w}$. Rzutem prostej $l$ na płaszczyznę $\pi$ w kierunku wektora $\vec{w}$ będzie wtedy prosta $l'$ przechodząca przez punkty $A'$ i $B'$ (rysunek). Dla uproszczenia obliczeń wygodnie jest przyjąć, że $A$ jest punktem przecięcia prostej $l$ z płaszczyzną $\pi$. Wtedy oczywiście $A' = A$. Niech $A = (x, y, z)$. Współrzędne punktu $A$ spełniają układ równań

$$\begin{cases} x = -2y = 3z, \\ x + y + z - 5 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest trójka liczb $x = 6$, $y = -3$, $z = 2$. Zatem $A = (6, -3, 2) = A'$. Wybieramy teraz dowolny punkt $B = \left(x', y', z'\right) \neq A$ na prostej $l$. Przyjmując np. $x' = 0$ otrzymamy $y' = 0$ oraz $z' = 0$. Postępując podobnie jak w punkcie **a)** tego przykładu znajdziemy rzut $B' = (5, -5, 5)$ punktu $B$ na płaszczyznę $\pi$ w kierunku wektora $\vec{w}$. Teraz znajdziemy równanie prostej $l'$ przechodzącej przez punkty $A'$ i $B'$. Mamy

$$l' : \begin{cases} x = 6 - t, \\ y = -3 - 2t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R.$$

## Przykład 5.22

Obliczyć objętości i pola powierzchni brył ograniczonych podanymi płaszczyznami:

**a)** $x = 0,\ y = 2,\ z = -1,\ x + y + z = 6;$

**b)** $x = 1,\ x = 2,\ x - y = 0,\ x - y = 3,\ y + z = 0,\ y + z = 4.$

**Rozwiązanie**

**a)** Bryła rozważana w zadaniu jest czworościanem, który ma trzy parami prostopadłe płaszczyzny. Wyznaczymy najpierw wierzchołki $A, B, C, D$ tego czworościanu. Współrzędne tych wierzchołków spełniają odpowiednio układy równań

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \\ z = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 2, \\ x + y + z = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = -1, \\ x + y + z = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2, \\ z = -1, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tych układów otrzymamy $A = (0,2,-1)$, $B = (0,2,4)$, $C = (0,7,-1)$ oraz $D = (5,2,-1)$. Ponieważ czworościan $ABCD$ jest rozpięty na wektorach

$$\overrightarrow{AB} = (0,0,5),\ \overrightarrow{AC} = (0,5,0),\ \overrightarrow{AD} = (5,0,0),$$

więc jego objętość $V$ można obliczyć wykorzystując iloczyn mieszany wektorów. Mamy

$$|V| = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right| = \frac{125}{6}.$$

Do obliczenia powierzchni całkowitej $S$ czworościanu $ABCD$ wykorzystamy iloczyn wektorowy. Mamy $\overrightarrow{DB} = (-5,0,5)$ oraz $\overrightarrow{DC} = (-5,5,0)$. Zatem

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle DBC} \\ &= \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| + \left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right| + \left|\overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DC}\right|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}\right| + \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| + \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right| + \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 5 & 0 \end{vmatrix}\right|\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|-25\vec{i}| + |25\vec{j}| + |-25\vec{k}| + |-25\vec{i} - 25\vec{j} - 25\vec{k}|\right) = \frac{1}{2}\left(75 + 25\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

**b)** Bryła rozważana w zadaniu jest równoległościanem $ABCDA'B'C'D'$. Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej tego równoległościanu wystarczy znajomość punktów $A$, $B$, $D$ i $A'$. Współrzędne tych punktów spełniają odpowiednio układy równań

$$\begin{cases} x = 1, \\ x - y = 0, \\ y + z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x - y = 3, \\ y + z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x - y = 0, \\ y + z = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ x - y = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tych układów otrzymamy

$$A = (1,1,-1),\ B = (1,-2,2),\ D = (1,1,3),\ A' = (2,2,-2).$$

Ponieważ rozważany równoległościan jest rozpięty na wektorach

$$\overrightarrow{AB}=(0,-3,3),\ \overrightarrow{AD}=(0,0,4),\ \overrightarrow{AA'}=(1,1,-1),$$

więc jego objętość można obliczyć ze wzoru

$$|V|=\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right)\right|=\left|\begin{vmatrix}0&-3&3\\0&0&4\\1&1&-1\end{vmatrix}\right|=12.$$

Pole powierzchni całkowitej $S$ wyraża się wzorem

$$\begin{aligned}S&=2\left(S_{\diamond ABCD}+S_{\diamond ABB'A'}+S_{\diamond AA'D'D}\right)\\&=2\left(\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|+\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AA'}\right|+\left|\overrightarrow{AA'}\times\overrightarrow{AD}\right|\right)\\&=2\left(\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&-3&3\\0&0&4\end{vmatrix}\right|+\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&-3&3\\1&1&-1\end{vmatrix}\right|+\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\0&0&4\end{vmatrix}\right|\right)\\&=2\left(|-12\vec{i}|+|3\vec{j}+3\vec{k}|+|4\vec{i}-4\vec{j}|\right)=2\left(12+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)=24+14\sqrt{2}.\end{aligned}$$

## • Przykład 5.23

Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez parami przecinające się proste:

$$l_1:\ \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},\qquad l_2:\ \frac{x-3}{0}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-3}{-6},\qquad l_3:\ \frac{x-3}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{-3}.$$

**Rozwiązanie**

Znajdziemy najpierw punkty przecięcia tych prostych. Niech $A$ będzie punktem przecięcia prostych $l_1$ i $l_3$, $B$ punktem przecięcia prostych $l_1$ i $l_2$ oraz $C$ punktem przecięcia prostych $l_2$ i $l_3$. Współrzędne punktów $A$, $B$, $C$ spełniają odpowiednio układy równań:

$$\begin{cases}\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},\\ \frac{x-3}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{-3},\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},\\ \frac{x-3}{0}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-3}{-6},\end{cases}\quad\begin{cases}\frac{x-3}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{3},\\ \frac{x-3}{0}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-3}{-6}.\end{cases}$$

Rozwiązaniami tych układów są odpowiednio trójki liczb:

$$\begin{cases}x=0,\\y=0,\\z=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=3,\\y=3,\\z=3,\end{cases}\quad\begin{cases}x=3,\\y=0,\\z=-3.\end{cases}$$

Zatem $A=(0,0,0)$, $B=(3,3,3)$, $C=(3,0,-3)$. Pole $S$ trójkąta $ABC$ można obliczyć ze wzoru

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(3,3,3)\times(3,0,-3)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&3&3\\3&0&-3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|-9\vec{i}+18\vec{j}-9\vec{k}\right|=\frac{9}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

## Przykład 5.24

Punkty $A = (0,0,0)$, $B = (4,0,0)$, $C = (0,6,0)$, $D = (0,0,8)$ są wierzchołkami czworościanu. Wyznaczyć środek i promień kuli opisanej na tym czworościanie.

**Rozwiązanie**

Niech $S = (x,y,z)$ będzie środkiem, a $R$ promieniem kuli opisanej na czworościanie $ABCD$. Wtedy

$$|SA| = |SB| = |SC| = |SD| = R.$$

Zapisując te równości w formie układu równań otrzymamy

$$\begin{cases} \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}, \\ \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-6)^2+(z-0)^2}, \\ \sqrt{(x-0)^2+(y-6)^2+(z-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-8)^2}. \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} x & & = 2, \\ -2x + 3y & & = 5, \\ & -3y + 4z & = 7. \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest trójka

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = 4. \end{cases}$$

Zatem $S = (2,3,4)$. Obliczymy teraz promień kuli opisanej na czworościanie $ABCD$. Mamy

$$R = |SA| = \sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{29}.$$

## Przykład 5.25

W chwili $t_0 = 0$ z punktu $S = (4,-3,1)$ [km] wystrzelono prostoliniowo rakietę z prędkością $v = 3\,\mathrm{km/s}$, nadając jej kierunek wektora $\vec{u} = (1,1,5)$. Wyznaczyć położenie rakiety w chwili $t_1 = 16$ s.

**Rozwiązanie**

Rakieta porusza się po linii prostej o równaniu parametrycznym (zapisanym w formie wektorowej) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$, gdzie $\vec{r}$ jest promieniem wodzącym punktów na prostej, $\vec{r}_0 = (4,-3,1)$ jest promieniem wodzącym punktu $S$, $\vec{v} = v \cdot \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,5)$ wektorem prędkości rakiety, a $t$ oznacza czas. Rakieta w chwili $t = 16$ s znajduje się w punkcie o promieniu wodzącym

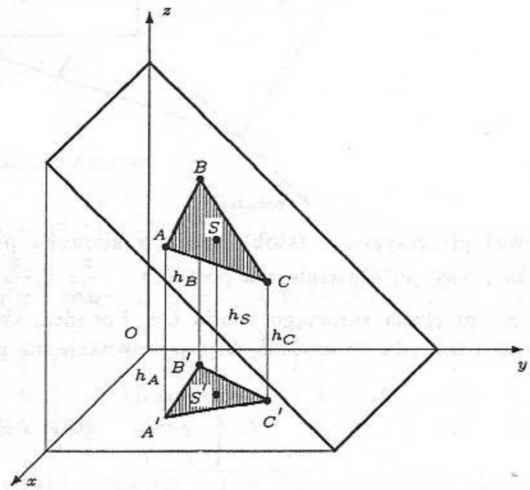
$$\vec{r} = (4,-3,1) + \frac{16}{\sqrt{3}}(1,1,5) = \left(4 + \frac{16}{\sqrt{3}}, -3 + \frac{16}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{80}{\sqrt{3}}\right).$$

## Przykład 5.26

Na pochyłym płaskim terenie wytyczono trójkąt równoboczny $ABC$. Wzniesienia nad poziom morza punktów $A, B, C$ są równe odpowiednio $h_A = 100$ m, $h_B = 200$ m, $h_C = 150$ m. Obliczyć wzniesienie nad poziom morza środka tego trójkąta.

**Rozwiązanie**

Sytuację omawianą w zadaniu przedstawiono na rysunku obok. Na rysunku $A'$, $B'$, $C'$ oznaczają rzuty prostopadłe odpowiednio punktów $A, B, C$ na płaszczyznę $xOy$ (poziom morza). Ponieważ przy rzutowaniu prostopadłym na płaszczyznę trzech współliniowych punktów, zachowuje się stosunek odległości między tymi punktami, więc rzut $S'$ punktu $S$ będzie środkiem masy trójkąta $A'B'C'$. Ponieważ środek masy dowolnego trójkąta jest punktem wspólnym środkowych tego trójkąta, więc $h_S = \frac{1}{3}(h_A + h_B + h_C) = \frac{1}{3}(100 + 200 + 150) = 150$ [m].




Wzniesienie środka $S$ trójkąta $ABC$ nad poziom morza wynosi $h_S = 150$. W rozważaniach nie było istotne, że $\triangle ABC$ jest równoboczny. Powyższe rozwiązanie zapiszemy korzystając z rachunku wektorowego. Niech $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ oznaczają promienie wodzące odpowiednio punktów $A, B, C$. Wtedy wektor wodzący środka masy wyraża się wzorem

$$\vec{r}_S = \frac{1}{3}\left(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C\right).$$

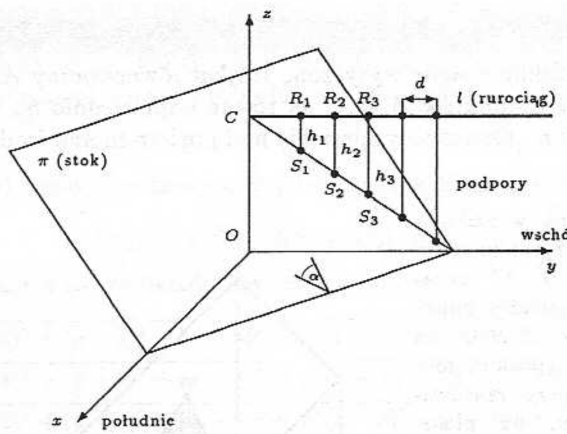
Stąd $z_S = \frac{1}{3}\left(z_A + z_B + z_C\right) = \frac{1}{3}\left(h_A + h_B + h_C\right) = 150\,[\mathrm{m}]$.

## Przykład 5.27

Płaski stok opada w kierunku południowo-wschodnim pod kątem $\alpha = 30°$. Nad stokiem trzeba przeprowadzić w kierunku z zachodu na wschód poziomy prostoliniowy rurociąg. Podpory podtrzymujące rurociąg ustawia się co $d = 10$ m (długości rurociągu). Obliczyć wysokości kilku początkowych podpór rurociągu.

**Rozwiązanie**

Sytuację opisaną w zadaniu przedstawiono na rysunku poniżej. Układ współrzędnych dobrano w ten sposób, aby rurociąg wychodził z ziemi w punkcie przebicia stoku z osią $Oz$ , a oś $Oy$ leżała pod rurociągiem.




Ponieważ płaszczyzna $\pi$ (stok) opada w kierunku południowo-wschodnim pod kątem $\alpha = 30^\circ$, więc jej równanie ma postać $\pi : \dfrac{x}{\sqrt{6}} + \dfrac{y}{\sqrt{6}} + z = c$, gdzie $C = (0,0,c)$ jest punktem przebicia rurociągu z osią $Oz$. Ponadto, skoro prosta $l$ (rurociąg) przebiega poziomo z zachodu na wschód, więc jej równanie ma postać

$$l : \begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = c, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \mathbf{R}.$$

Wysokości podpór będą równe odległościom punktów $R_n$ rurociągu od punktów $S_n$ stoku, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ponieważ podpory są mocowane co $d = 10$ m, więc punkty mocowania mają współrzędne

$$R_n = (0, 10n, c), \quad S_n = \left(0, 10n, c - \frac{10n}{\sqrt{6}}\right),$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$. Stąd $h_n = |R_nS_n| = \dfrac{10n}{\sqrt{6}}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$. Przyjmując $n = 1, 2, 3$ otrzymamy $h_1 \approx 4,08$ m, $h_2 \approx 8,16$ m, $h_3 \approx 12,25$ m.

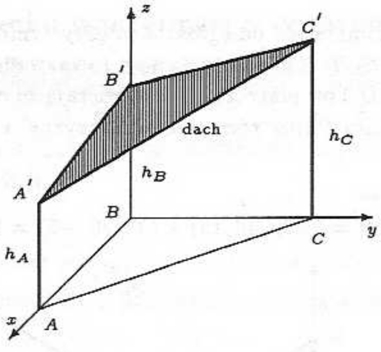
## • Przykład 5.28

Hala widowiskowa ma kształt trójkąta prostokątnego $ABC$ o przyprostokątnych $AB = 90$ m, $BC = 120$ m. Płaski dach nad tą halą oparty jest na trzech pionowych podporach zamocowanych w punktach $A$, $B$, $C$. Wysokości tych podpór są równe odpowiednio $h_A = 15$ m, $h_B = 20$ m, $h_C = 25$ m. Obliczyć pole powierzchni tego dachu.

### Rozwiązanie

Sytuację omawianą w zadaniu przedstawiono na rysunku niżej. Współrzędne wierzchołków $A'$, $B'$, $C'$ dachu są wtedy równe $A' = (90, 0, 15)$, $B' = (0, 0, 20)$, $C' = (0, 120, 25)$. Do obliczenia pola powierzchni dachu wykorzystamy iloczyn wektorowy. Pole trójkąta rozpiętego na wektorach $\vec{a}$, $\vec{b}$ wyraża się wzorem

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$




Zatem pole trójkąta $A'B'C'$ wyraża się wzorem

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'}\right|.$$

Obliczymy teraz wektory $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$. Mamy $\overrightarrow{A'B'} = (-90, 0, 5)$, $\overrightarrow{A'C'} = (-90, 120, 10)$. Zatem

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -90 & 0 & 5 \\ -90 & 120 & 10 \end{vmatrix}\right| = 25\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -18 & 0 & 1 \\ -9 & 12 & 1 \end{vmatrix}\right| = 25\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -18 & 0 & 1 \\ -27 & 12 & 0 \end{vmatrix}\right|$$

$$= 25\left|-12\vec{i} + 9\vec{j} - 216\vec{k}\right| = 25\sqrt{12^2 + 9^2 + 216^2} = 75\sqrt{5209} \approx 5413\ \left[\mathrm{m}^2\right].$$

Pole powierzchni dachu jest równe w przybliżeniu $5413\,\mathrm{m}^2$.

## • Przykład 5.29

Radiowa stacja nasłuchowa składa się z dwóch prostoliniowych anten zawieszonych na dwóch parach pionowych słupów. W każdej parze słupy ustawione są w przeciwległych wierzchołkach prostokąta $ABCD$ o bokach $AB = 40$ m i $AD = 30$ m. Wysokości słupów ustawionych w punktach $A, B, C, D$ są równe odpowiednio $h_A = 15$ m, $h_B = 20$ m, $h_C = 30$ m, $h_D = 25$ m. Obliczyć najmniejszą odległość między antenami.

**Rozwiązanie**

Sytuację opisaną w zadaniu przedstawiono na rysunku niżej. Osie $Ox$ i $Oy$ układu współrzędnych pokrywają się z bokami prostokąta, a oś $Oz$ pokrywa się z jednym ze słupów. W tym układzie współrzędnych wierzchołki słupów, tj. punkty $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, mają współrzędne (podane w metrach) $A' = (30, 0, 15)$, $B' = (30, 40, 20)$, $C' = (0, 40, 30)$, $D' = (0, 0, 25)$. Równanie odcinka anteny przechodzącej przez punkty $A'$, $C'$ ma postać

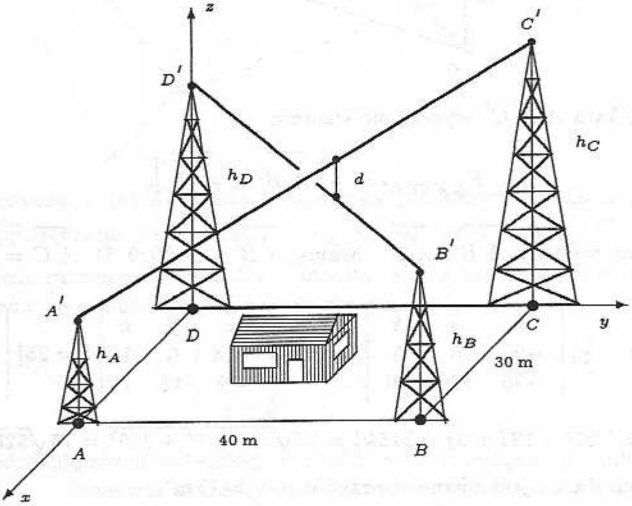
$$A'C' : \begin{cases} x = 30 - 30t, \\ y = 40t, \\ z = 15 + 15t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in [0, 1],$$

a równanie odcinka anteny przechodzącej przez punkty $D'$ i $B'$ postać

$$D'B' : \begin{cases} x = 30s, \\ y = 40s, \\ z = 25 - 5s, \end{cases}$$

gdzie $s \in [0,1]$. Szukana najmniejsza odległość $d$ między tymi antenami jest odległością między odcinkami $A'C'$ i $D'B'$. Odległość ta jest równa odległości dowolnego punktu odcinka $D'B'$ (np. punktu $D'$) od płaszczyzny $\pi$ zawierającej odcinek $A'C'$ i równoległej do odcinka $D'B'$. Znajdziemy teraz równanie płaszczyzny $\pi$. Wektor normalny $\vec{n}$ tej płaszczyzny ma postać

$$\vec{n} = \overrightarrow{A'C'} \times \overrightarrow{D'B'} = (-30, 40, 15) \times (30, 40, -5) = 100(-8, 3, 24).$$




Ponieważ płaszczyzna $\pi$ zawiera punkt $A' = (30, 0, 15)$ i ma wektor normalny $\vec{n}_1 = \frac{1}{100}\vec{n} = (-8, 3, 24)$, więc jej równanie ma postać

$$\pi : -8(x - 30) + 3(y - 0) + 24(z - 15) = 0,$$

stąd

$$\pi : \ -8x + 3y + 24z - 120 = 0.$$

Skorzystamy teraz ze wzoru na odległość $d$ punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$;

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Odległość punktu $D' = (0, 0, 25)$ od płaszczyzny $\pi : \ -8x + 3y + 24z - 120 = 0$ jest zatem równa

$$d = \frac{|-8 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 24 \cdot 25 - 120|}{\sqrt{(-8)^2 + 3^2 + 24^2}} = \frac{480}{\sqrt{649}} \approx 18,84\,[\mathrm{m}].$$

Dla pełności rozważań niezbędne jest jeszcze sprawdzenie, czy najmniejsza odległość między prostymi przechodzącymi przez punkty $A'$, $C'$ oraz $D'$, $C'$ jest realizowana przez punkty odcinków $A'C'$ i $D'C'$. Sprawdzenie, że tak jest w tym przypadku, pozostawiamy Czytelnikowi.

## Zastosowania rachunku wektorowego w mechanice*

### • Przykład 5.30

Obliczyć sumę momentów sił $\vec{F}_1 = (-1, 2, 3)$ oraz $\vec{F}_2 = (0, 1, -5)$ względem punktu $O = (2, 3, -1)$, jeżeli siły te są przyłożone odpowiednio w punktach $P_1 = (0, 0, 0,)$ oraz $P_2 = (1, -3, 4)$.

**Rozwiązanie**

Moment $\vec{M}$ siły $\vec{F}$ przyłożonej w punkcie $P$, rozważany względem punktu $O$, wyraża się wzorem $\vec{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$. Niech $\vec{M}_1$ i $\vec{M}_2$ oznaczają odpowiednio momenty sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Wtedy

$$\begin{aligned}\vec{M}_1 = \overrightarrow{OP_1} \times \vec{F}_1 &= \left(-2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}\right) \times \left(-\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)\\ &= -3\vec{k} - \vec{j} - 4\vec{k} - 2\vec{i} + 6\vec{j} - 9\vec{i} = -11\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}.\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\vec{M}_2 = \overrightarrow{OP_2} \times \vec{F}_2 &= \left(-\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}\right) \times \left(\vec{j} - 5\vec{k}\right)\\ &= -\vec{k} - 5\vec{i} - 5\vec{j} + 30\vec{i} = 25\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}.\end{aligned}$$

Moment wypadkowy tych sił jest zatem równy

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \left(-11\vec{i} + 5\vec{j} - 7\vec{k}\right) + \left(25\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}\right) = 14\vec{i} - 8\vec{k}.$$

### • Przykład 5.31

W punktach $P_1 = (0, 1, -3)$, $P_2 = (7, -3, 2)$, $P_3 = (1, 4, 2)$ umieszczone są odpowiednio masy $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$.

**a)** Wyznaczyć położenie środka masy tego układu;

**b)** Obliczyć moment bezwładności podanego układu mas względem osi $Ox$;

**c)** Obliczyć moment bezwładności podanego układu mas względem prostej

$$l: x = y = 3z;$$

**d)** Obliczyć siłę przyciągania grawitacyjnego masy $M = 4$ znajdującej się w początku układu współrzędnych przez podany układ mas.

**Rozwiązanie**

**a)** Wektor wodzący $\vec{r}$ środka masy układu punktów materialnych o wektorach wodzących $\vec{r}_i$ i masach $m_i$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$, wyraża sie wzorem

$$\vec{r} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

W układzie punktów materialnych rozważanym w zadaniu mamy:
$\vec{r}_1 = (0, 1, -3)$, $\vec{r}_2 = (7, -3, 2)$, $\vec{r}_3 = (1, 4, 2)$ oraz $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$. Zatem

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}\\ &= \frac{1}{6}\left[3(0, 1, -3) + 1(7, -3, 2) + 2(1, 4, 2)\right] = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Środek masy tego układu jest w punkcie

$$C = \left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{2}\right).$$

**b)** Moment bezwładności podanego układu mas względem osi $Ox$ wyraża się wzorem

$$I_x = m_1\left(y_1^2 + z_1^2\right) + m_2\left(y_2^2 + z_2^2\right) + m_3\left(y_3^2 + z_3^2\right),$$

gdzie $P_i = (x_1, y_1, z_1)$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$. Zatem dla podanego układu mas mamy

$$I_x = 3(1+9) + 1(9+4) + 2(16+4) = 83.$$

**c)** Moment bezwładności układu mas względem prostej $l$ wyraża sie wzorem

$$I_l = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + m_3 d_3^2,$$

gdzie $d_i$ jest odległością punktu $P_i$ od prostej $l$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$. Niech $P(t) = (3t, 3t, t)$, gdzie $t \in R$, będzie bieżącym punktem prostej $l$. Wielkości $d_1^2$, $d_2^2$, $d_3^2$ wyznaczymy minimalizując kwadrat długości odcinka łączącego punkty $P(t)$ i $P_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant 3$. Mamy zatem

$$f(t) = |P_1P(t)|^2 = (3t)^2 + (3t-1)^2 + (t+3)^2 = 19t^2 + 10,$$

$$g(t) = |P_2P(t)|^2 = (3t-7)^2 + (3t+3)^2 + (t-3)^2 = 19t^2 - 28t + 62,$$

$$h(t) = |P_3P(t)|^2 = (3t-1)^2 + (3t-4)^2 + (t-2)^2 = 19t^2 - 34t + 21.$$

Zauważmy, że funkcje $f, g, h$ są trójmianami kwadratowymi postaci $at^2 + bt + c$, gdzie $a > 0$. Zatem wartości najmniejsze przyjmują w punkcie $t_{\min} = -\dfrac{b}{2a}$. Stąd

$$d_1^2 = f_{\min} = f(0) = 10, \quad d_2^2 = g_{\min} = g\left(\frac{14}{19}\right) = \frac{982}{19}, \quad d_3^2 = h_{\min} = h\left(\frac{17}{19}\right) = \frac{110}{19}.$$

Tak, więc

$$I_l = 3d_1^2 + d_2^2 + 2d_3^2 = \frac{1662}{19}.$$

**d)** Siła przyciągania grawitacyjnego masy $M = 4$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ przez układ punktów materialnych wyraża sie wzorem

$$\vec{F} = GM\left(\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|^3}m_1 + \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_0|^3}m_2 + \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_0|^3}m_3\right),$$

gdzie $G$ jest stałą grawitacji. Mamy więc

$$\begin{aligned}\vec{F} &= 4G\left[\frac{(0,1,-3)}{10}\cdot 3 + \frac{(7,-3,2)}{162}\cdot 1 + \frac{(1,4,2)}{21}\cdot 2\right] \\ &= G\left(\frac{542}{651}, \frac{8236}{3255}, -\frac{8818}{3255}\right).\end{aligned}$$

## Zadania

### ○ Zadanie 5.1
Obliczyć długości podanych wektorów:

a) $\vec{a} = (3, -4, 12)$; b) $\vec{b} = \left(\sqrt{3}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{2}\right)$;

c) $\vec{c} = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, h)$, gdzie $\varrho \geqslant 0$ oraz $\varphi, h \in \boldsymbol{R}$;

d) $\vec{d} = (\varrho\cos\varphi\cos\psi, \varrho\sin\varphi\cos\psi, \varrho\sin\psi)$, gdzie $\varrho \geqslant 0$ oraz $\varphi, \psi \in \boldsymbol{R}$.

### ○ Zadanie 5.2
Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ tworzą dwa sąsiednie boki trójkąta. Wyrazić środkowe tego trójkąta przez wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

### ○ Zadanie 5.3
Znaleźć wersor $\vec{u}$, który:

a) leży w płaszczyźnie $xOy$ i tworzy kąt $\alpha$ z dodatnią częścią osi $Ox$;

b) tworzy z dodatnimi częściami osi $Ox$, $Oy$, $Oz$ odpowiednio kąty $\alpha$, $\beta$, $\gamma$;

c) tworzy jednakowe kąty z wektorami $\vec{a} = (0, 3, -4)$, $\vec{b} = (8, 6, 0)$ i jest położony w płaszczyźnie wyznaczonej przez te wektory.

### ○ Zadanie 5.4
Obliczyć iloczyny skalarne podanych par wektorów:

a) $\vec{a} = (1, -2, 5)$, $\vec{b} = (3, -1, 0)$;

b) $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 7\vec{k}$;

c*) $\vec{x} = \vec{p} + 2\vec{q} - \vec{r}$, $\vec{y} = 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$, gdzie $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ są wersorami parami prostopadłymi.

### ○ Zadanie 5.5
Korzystając z iloczynu skalarnego obliczyć miary kątów między:

a) wektorami $\vec{a} = (-3, 0, 4)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$;

b) wusiecznymi kątów utworzonych przez osie $Ox$, $Oy$ oraz osie $Oy$, $Oz$ układu $Oxyz$;

c) przekątnymi równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, $\vec{w} = (3, 1, 5)$.

### ○ Zadanie 5.6
Obliczyć długość rzutu prostokątnego wektora $\vec{a} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}\right)$ na wektor $\vec{b} = \left(-\sqrt{8}, 0, \sqrt{5}\right)$.

### ○ Zadanie 5.7
Obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:

a) $\vec{a} = (-3, 2, 0)$, $\vec{b} = (1, 5, -2)$; b) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$;

c*) $\vec{x} = 2\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{y} = \vec{p} + 3\vec{q} + 4\vec{r}$, gdzie $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ są parami prostopadłymi wersorami o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych.

○ **Zadanie 5.8**

Obliczyć pola podanych powierzchni:

**a)** równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (0, -2, 5)$;

**b)** trójkąt o wierzchołkach $A = (1, -1, 3)$, $B = (0, 2, -3)$, $C = (2, 2, 1)$;

**c)** czworościan rozpięty na wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

○ **Zadanie 5.9**

Trójkąt $ABC$ rozpięty jest na wektorach $\overrightarrow{AB} = (1, 5, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 4)$. Obliczyć wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka $C$.

○ **Zadanie 5.10**

Obliczyć iloczyny mieszane podanych trójek wektorów:

**a)** $\vec{a} = (-3, 2, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -5)$, $\vec{c} = (2, 3, -4)$;

**b)** $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.

○ **Zadanie 5.11**

Obliczyć objętości podanych wielościanów:

**a)** równoległościan rozpięty na wektorach $\vec{a} = (0, 0, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$, $\vec{c} = (2, 5, -1)$;

**b)** czworościan o wierzchołkach $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (2, 3, -1)$, $D = (-1, 3, 5)$;

**c*)** równoległościan o przekątnych $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

○ **Zadanie 5.12**

Sprawdzić, czy

**a)** wektory $\vec{a} = (-1, 3, -5)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, $\vec{c} = (4, -2, 0)$ są współpłaszczyznowe;

**b)** punkty $P = (0, 0, 0)$, $Q = (-1, 2, 3)$, $R = (2, 3, -4)$, $S = (2, -1, 5)$ są współpłaszczyznowe.

○ **Zadanie 5.13**

Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzn spełniających podane warunki:

**a)** płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -2, 0)$ i jest prostopadła do wektora $\vec{n} = (0, -3, 2)$;

**b)** płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 2, 3)$, $P_3 = (-1, -3, 5)$;

**c)** płaszczyzna przechodzi przez punkty $P_1 = (1, -3, 4)$, $P_2 = (2, 0, -1)$ oraz jest prostopadła do płaszczyzny $xOz$;

**d)** płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (1, -1, 3)$ oraz jest równoległa do wektorów $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$;

**e)** płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (0, 3, 0)$ i jest równoległa do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2 = 0$;

**f)** płaszczyzna przechodzi przez punkt $P = (2, 1, -3)$ i jest prostopadła do płaszczyzn $\pi_1 : x + y = 0$, $\pi_2 : y - z = 0$.

### ○ Zadanie 5.14

Napisać równania parametryczne i kierunkowe prostych spełniających podane warunki:

**a)** prosta przechodzi przez punkt $P = (-3, 5, 2)$ i jest równoległa do wektora $\vec{v} = (2, -1, 3)$;

**b)** prosta przechodzi przez punkty $P_1 = (1, 0, 6)$, $P_2 = (-2, 2, 4)$;

**c)** prosta przechodzi przez punkt $P = (0, -2, 3)$ i jest prostopadła do płaszczyzny $\pi : 3x - y + 2z - 6 = 0$;

**d)** prosta przechodzi punkt $P = (7, 2, 0)$ i jest prostopadła o wektorów $\vec{v}_1 = (2, 0, -3)$, $\vec{v}_2 = (-1, 2, 0)$;

**e)** prosta jest dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste

$$l_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{5}, \qquad l_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z}{3};$$

**f*)** prosta jest dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \qquad l_2 : \frac{x+6}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+29}{-12}.$$

### ○ Zadanie 5.15

Zbadać, czy

**a)** punkty $A = (1, 2, 3)$, $B = (-1, -2, 0)$ należą do prostej

$$l : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 - t, \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in \boldsymbol{R};$$

**b)** prosta $m : \begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$ jest zawarta w płaszczyźnie

$$\pi : 5y - 3z + 13 = 0;$$

**c)** punkty $A = (0, 1, 5)$, $B = (1, 2, 3)$ należą do płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = -1 + s + t, \\ y = 2 + 3s - t, \\ z = 3 - s + 2t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s, t \in \boldsymbol{R};$$

**d)** proste $l_1 : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+4}{-8}$, $l_2 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ mają punkt wspólny;

**e)** prosta $l : \begin{cases} x = t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \boldsymbol{R}$, jest równoległa do płaszczyzny

$$\pi : x + y - z + 3 = 0.$$

### ○ Zadanie 5.16

Znaleźć punkty przecięcia:

**a)** prostych $l_1 : \begin{cases} x+2y-z+4=0, \\ y+z-3=0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} 2x-y-2z+8=0, \\ x+2y+2z-5=0; \end{cases}$

**b)** prostej $l : \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{-1}$ i płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = s+t, \\ y = 1+s+2t, \\ z = 3+2s+4t, \end{cases} \quad \text{gdzie } s,t \in \mathbb{R};$$

**c)** płaszczyzn $\pi_1 : 3x+y+z+1=0$, $\pi_2 : x+2z+6=0$, $\pi_3 : 3y+2z=0$.

## ○ Zadanie 5.17

Obliczyć odległość:

**a)** punktu $P=(1,-2,3)$ od płaszczyzny $\pi : x+y-3z+5=0$;

**b)** płaszczyzn równoległych $\pi_1 : 2x+y-2z=0$, $\pi_2 : 2x+y-2z-3=0$;

**c)** płaszczyzn $\pi_1 : x-2y+2z+5=0$, $\pi_2 : 3x-6y+6z-3=0$;

**d)** punktu $P=(0,1,-1)$ od prostej $l : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{3}$;

**e)** prostych równoległych $l_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$, $l_2 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z-3}{2}$;

**f)** prostych skośnych $l_1 : \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$ $l_2 : \begin{cases} x=1, \\ z=1; \end{cases}$

**g)** prostych $l_1 : \dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z}{1}$, $l_2 : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{9} = \dfrac{z-2}{2}$;

**h)** prostej $l : \begin{cases} x=2+t, \\ y=-3+2t, \\ z=2-t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, od płaszczyzny $\pi : 2x+y+4z=0$.

## ○ Zadanie 5.18

Obliczyć miarę kąta między:

**a)** prostą $l : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+2}{-3}$ i płaszczyzną $\pi : x-z=0$;

**b)** płaszczyznami $\pi_1 : x-2y+3z-5=0$, $\pi_2 : 2x+y-z+3=0$;

**c)** prostymi $l_1 : \begin{cases} x=1-t, \\ y=-2+t, \\ z=3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$, $l_2 : \begin{cases} x=3-2t, \\ y=4-t, \\ z=1+3t, \end{cases}$ gdzie $t \in \mathbb{R}$.

## ○ Zadanie 5.19

Znaleźć rzut prostokątny:

**a)** punktu $P=(-3,2,0)$ na płaszczyznę $\pi : x+y+z=0$;

**b)** punktu $P=(-1,2,0)$ na prostą $l : x=y=z$;

**c)** prostej $l : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{0}$ na płaszczyznę $\pi : x+3y-2z-6=0$.

### ○ Zadanie 5.20

Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P = (2,3,-1)$ względem:

**a)** punktu $S = (1,-1,2)$;

**b)** prostej $l: \begin{cases} x+y=0, \\ y+z=0; \end{cases}$

**c)** płaszczyzny $\pi : 2x - y + z - 6 = 0$.

### ○ Zadanie 5.21

Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{v} = (2,3,-1)$:

**a)** punktu $O = (0,0,0)$ na płaszczyznę $\pi : x - 2z + 8 = 0$;

**b)** prostej $l : x - 1 = y + 1 = z - 2$ na płaszczyznę $\pi : x - y + z - 1 = 0$.

### ○ Zadanie 5.22

Obliczyć objętości i pola powierzchni brył ograniczonych podanymi płaszczyznami:

**a)** $x = 1,\ y = -1,\ z = 3,\ x + y + z = 5$;

**b)** $x - y = 1,\ x - y = 5,\ x + 2z = 0,\ x + 2z = 3,\ z = -1,\ z = 4$.

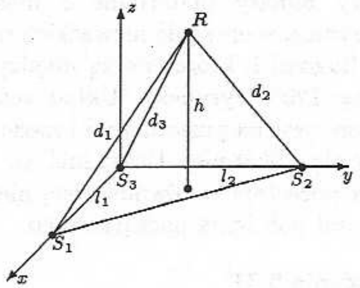
### ○ Zadanie 5.23

Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez parami przecinające się proste:

$$l_1 : \begin{cases} x = -2 + 2t, \\ y = 0, \\ z = 4t, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = 3 + 3s, \\ z = -4s, \end{cases} \quad l_3 : \begin{cases} x = -2p, \\ y = 3 - 3p, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{gdzie } t, s, p \in \mathbf{R}.$$

### ○ Zadanie 5.24

Trzy stacje radiolokacyjne $S_1, S_2, S_3$ umieszczone są w wierzchołkach trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych $l_1 = 300$ km, $l_2 = 400$ km (rysunek). Pomiary odległości rakiety $R$ od tych stacji dały następujące wyniki $d_1 = 300$ km, $d_2 = 400$ km, $d_3 = 400$ km. Obliczyć, na jakiej wysokości $h$ leciała rakieta.




### ○ Zadanie 5.25

Cząsteczka porusza się po linii prostej ze stałą prędkością. W chwili $t_1 = 2$ cząsteczka znajdowała się w punkcie $P_1 = (0,-2,5)$, a w chwili $t_2 = 3$ w punkcie $P_2 = (2,3,3)$. Znaleźć położenie $P_0$ tej cząsteczki w chwili $t_0 = 0$.

### ○ Zadanie 5.26

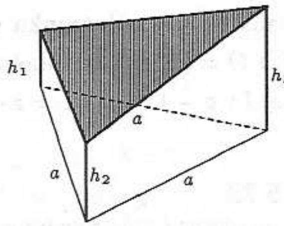
Na pochyłym płaskim terenie wytyczono kwadrat $A_1A_2A_3A_4$. Wzniesienia nad poziom morza punktów $A_1, A_2, A_3$ wynoszą odpowiednio $h_1 = 100$ m, $h_2 = 110$ m, $h_3 = 160$ m. Obliczyć wzniesienie $h_4$ punktu $A_4$ nad poziom morza.

**○ Zadanie 5.27**

W celu określenia kąta nachylenia płaskiego nasypu do poziomu, wykonano pomiary kąta nachylenia tego nasypu w kierunku wschodnim i południowym. Pomiary te dały następujące wyniki: w kierunku wschodnim nasyp wznosi się pod kątem $\alpha = 30°$, a w kierunku południowym opada pod kątem $\beta = 45°$. Obliczyć kąt nachylenia tego nasypu do poziomu.

**○ Zadanie 5.28**

Siatka maskująca tajny obiekt wojskowy zaczepiona jest na trzech masztach (rysunek). Maszty te mają wysokości $h_1 = 5\,\text{m}$, $h_2 = 7\,\text{m}$, $h_3 = 10\,\text{m}$ i ustawione są w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku $a = 20\,\text{m}$. Obliczyć pole siatki maskującej.

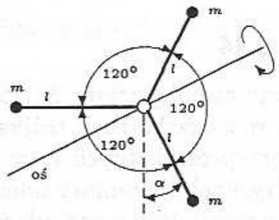



**○ Zadanie 5.29**

Nad Wrocławiem przebiegają dwa prostoliniowe korytarze powietrzne dla samolotów. Pierwszy z nich przebiega poziomo na wysokości $h_1 = 1000\,\text{m}$ ze wschodu na zachód. Natomiast drugi przebiega z południowego-wschodu na północny-zachód i wznosi się pod kątem $\alpha = 10°$ Samoloty poruszające się tym korytarzem przelatują nad Wrocławiem na wysokości $h_2 = 3000\,\text{m}$. Obliczyć najmniejszą możliwą odległość między samolotami lecącymi tymi korytarzami.

**○ Zadanie 5.30**

Trzy punkty materialne o masie $m$ przymocowane są do nieważkich ramion o długości $l$, które tworzą między sobą kąty 120° (rysunek). Układ ten osadzony jest na poziomej osi i może obracać się wokół niej. Uzasadnić, że układ ten pozostaje w równowadze, niezależnie od położenia początkowego.



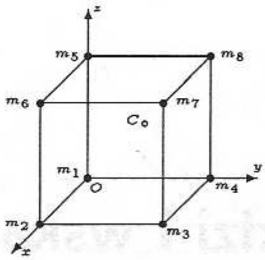

**○ Zadanie 5.31**

W wierzchołkach sześcianu o krawędzi $a = 10$ umieszczone są punkty materialne o masach odpowiednio: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 4$, $m_5 = 5$, $m_6 = 6$, $m_7 = 7$, $m_8 = 8$ (rysunek).

**a)** Określić położenie środka masy tego układu;

**b)** Obliczyc moment bezwładności podanego układu mas względem osi $Oz$;

**c)** Obliczyć moment bezwładności podanego układu mas względem osi łączącej masy $m_3$ i $m_7$;




**d)** Obliczyć siłę przyciągania grawitacyjnego masy $m_8$ przez układ pozostałych siedmiu mas.

# Odpowiedzi i wskazówki

## Rozdział 1

**1.1** **a)** $5-8i$; **b)** $1-\sqrt{3}+\left(6+\sqrt{2}\right)i$; **c)** $10$; **d)** $\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i$; **e)** $7-26i$, $-\frac{17+144i}{25}$, $\frac{7-11i}{17}$, $\frac{24+11i}{34}$.

**1.2** **a)** $x=1, y=-2$; **b)** nie istnieją takie liczby; **c)** $x=5, y=17$; **d)** $x\in R\setminus\{0\}$, $y=-\frac{2}{9}x$.

**1.3** **a)** $0, 4, -2+2i\sqrt{3}, -2-2i\sqrt{3}$; **b)** brak rozwiązań; **c)** $2-3i, 2+3i$; **d)** $\operatorname{Re} z=-2$ lub $\operatorname{Im} z=0$; **e)** $2-5i$; **f)** $\frac{3+12i}{17}$; **g)** $\frac{7-i}{6}$; **h)** $z\in R$; **i*)** $2i$.

**1.4** **a)** półpłaszczyzna $\operatorname{Im} z\leqslant 2$; **b)** druga i czwarta ćwiartka układu współrzędnych bez obu osi; **c)** zbiór pusty; **d)** okrąg o środku $0$ i promieniu $2$; **e)** okrąg o środku $-5+i$ i promieniu $5$; **f)** okrąg o środku $1-i$ i promieniu $1$ bez punktu $-i$.

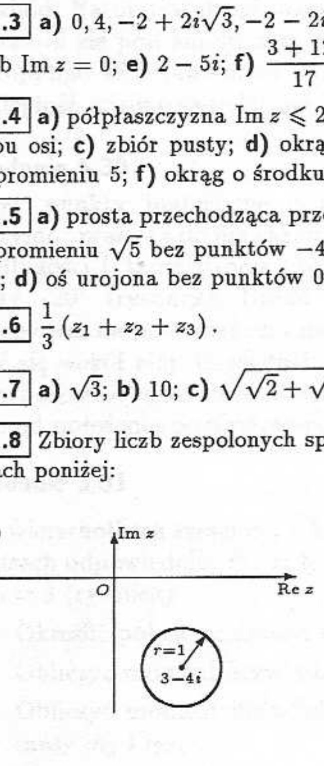
**1.5** **a)** prosta przechodząca przez punkty $-4$, $2i$ bez punktu $2i$; **b)** okrąg o środku $-2+i$ i promieniu $\sqrt{5}$ bez punktów $-4$ oraz $2i$; **c)** okrąg o środku $2i$ i promieniu $2$ bez punktu $4i$; **d)** oś urojona bez punktów $0$ oraz $4i$.

**1.6** $\frac{1}{3}\left(z_1+z_2+z_3\right)$.

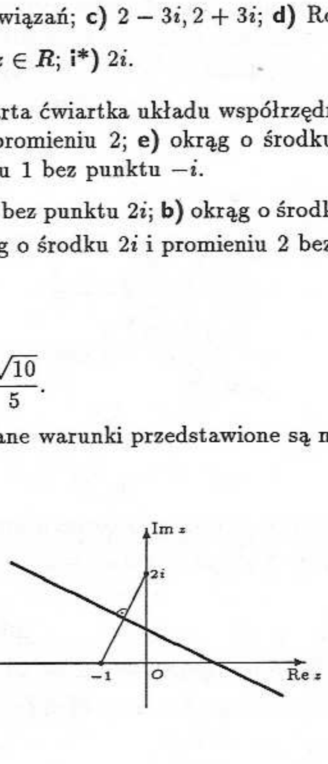
**1.7** **a)** $\sqrt{3}$; **b)** $10$; **c)** $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; **d)** $\frac{1}{\cos\alpha}$; **e)** $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

**1.8** Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej:

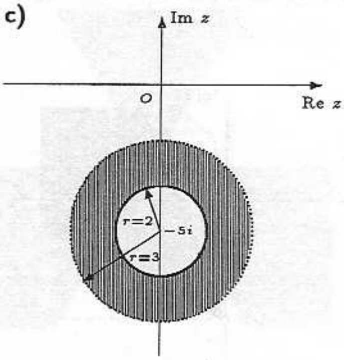
a)



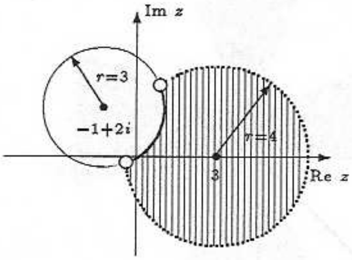

b)



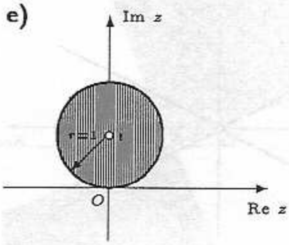
c)



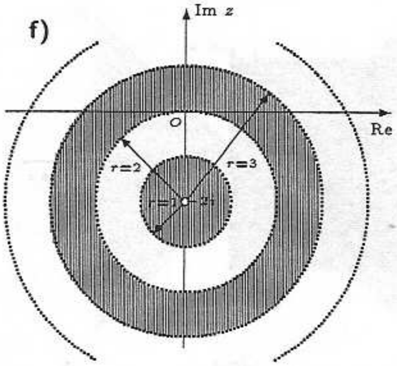

d)



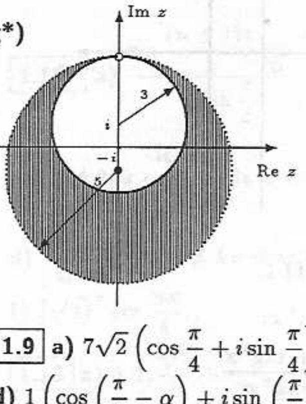

e)



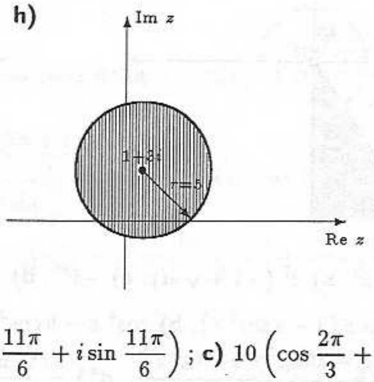

f)




g*)



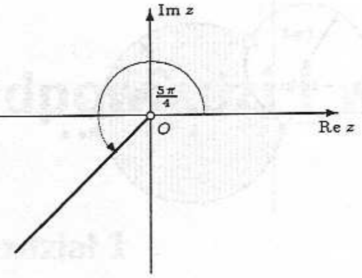

h)



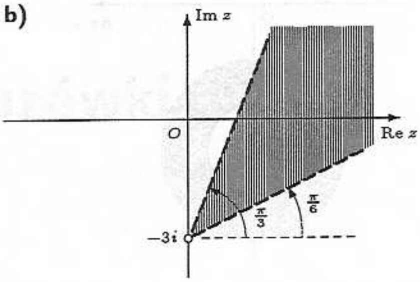

**1.9** **a)** $7\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; **b)** $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; **c)** $10\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;
**d)** $1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$; **e)** $1\left(\cos\left(\pi-\alpha\right)+i\sin\left(\pi-\alpha\right)\right)$;
**f)** $\frac{1}{\cos\alpha}\left(\cos\alpha+i\sin\alpha\right)$.

**1.10** Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawione są na rysunkach poniżej.

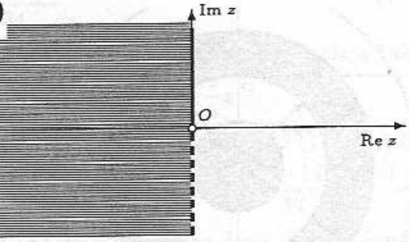
a)



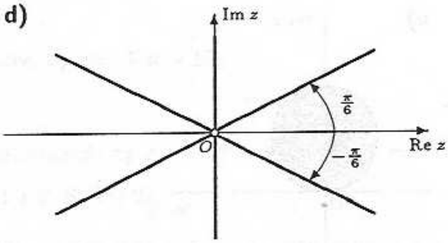

b)



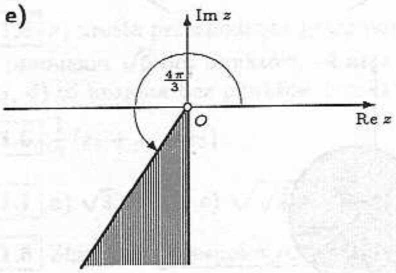

c)



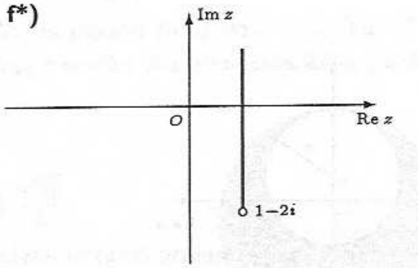

d)




e)



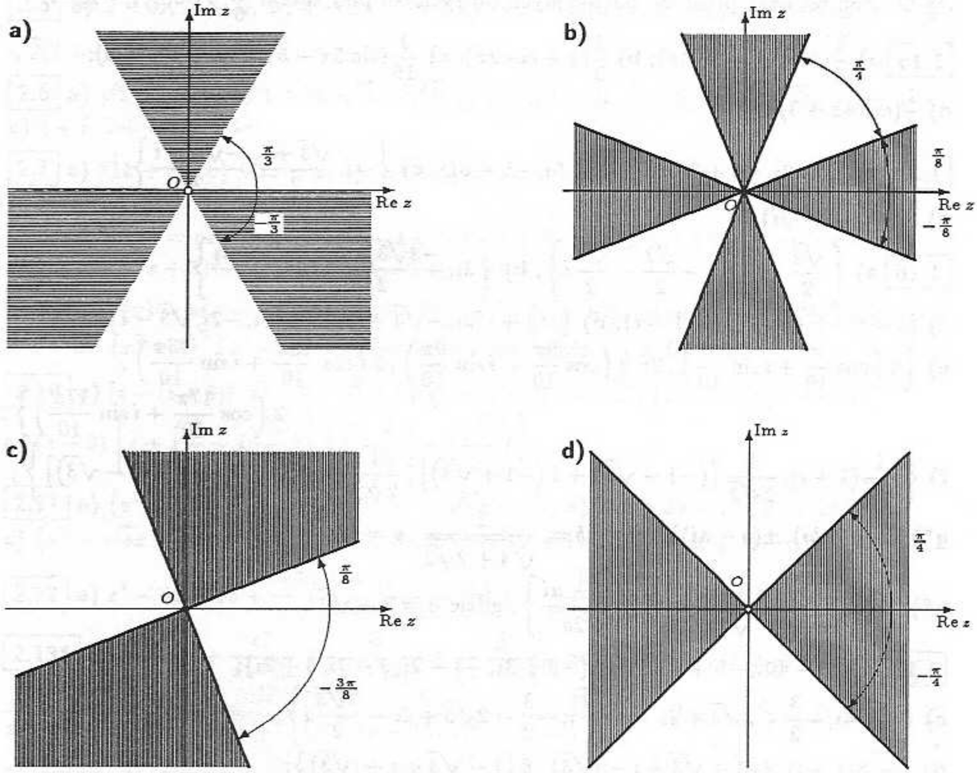

f*)




**1.11** **a)** $-2^6$; **b)** $2^7\left(-1+\sqrt{3}i\right)$; **c)** $-4^{30}$; **d)** $-i$; **e)** $-32i$; **f)** 1.

**1.12** **a)** $\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)$; **b)** $\cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$;
**c*)** $\dfrac{2\left(3\,\mathrm{tg}\,x - 10\,\mathrm{tg}^3 x + 3\,\mathrm{tg}^5 x\right)}{1-15\,\mathrm{tg}^2 x + 15\,\mathrm{tg}^4 x - \mathrm{tg}^6 x}$; **d*)** $\dfrac{5\,\mathrm{ctg}\,x - 10\,\mathrm{ctg}^3 x + \mathrm{ctg}^5 x}{1-10\,\mathrm{ctg}^2 x + 5\,\mathrm{ctg}^4 x}$.

**1.13** Zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki przedstawiono na rysunkach.




**1.14*** **a)** $\dfrac{\sin\dfrac{(n+1)x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$ dla $x \neq 2k\pi$ oraz 0 dla $x = 2k\pi$; **b)** $\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\cos\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$ dla $x \neq 2k\pi$ oraz $n$ dla $x = 2k\pi$; **c)** $\dfrac{\sin\dfrac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}}$ dla $x \neq 2k\pi$ oraz $n + \dfrac{1}{2}$ dla $x = 2k\pi$; **d)** $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$ dla $x \neq k\pi$ oraz 0 dla $x = k\pi$; **e)** $\sqrt{2^{n+1}}\left(\sin\dfrac{(n+1)\pi}{4} + i\cos\dfrac{(n+1)\pi}{4}\right) - i$; **f)** $\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\dfrac{n\pi}{4}$.

**1.15** **a)** $0, 1, \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i, i, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i, -1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i, -i, \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$; **b)** suma trzech prostych: osi rzeczywistej oraz prostych nachylonych do tej osi pod kątem $\dfrac{\pi}{3}$ i przechodzących przez punkt $O$; **c)** okrąg o środku w punkcie $O$ i promieniu $\sqrt[3]{2}$; **d)** suma trzech półprostych o początku w punkcie $O$ : nieujemnej części osi urojonej oraz półprostych nachylonych do niej pod kątem $\dfrac{2\pi}{3}$; **e)** suma sześciu prostych przecinających się w punkcie $O$ : obu osi oraz prostych nachylonych do tych osi pod kątem $\frac{\pi}{6}$; **f)** $0, 1, i, -1, -i$.

**1.16** **a)** $\frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$; **b)** $\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$; **c)** $\frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$; **d)** $\frac{1}{4}(\cos 4x + 3)$.

**1.17** **a)** $\{3 - 2i, -3 + 2i\}$; **b)** $\{5 + 6i, -5 - 6i\}$; **c)** $\left\{-i, \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right\}$; **d)** $\{2, 2i, -2, -2i\}$.

**1.18** **a)** $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right\}$; **b)** $\left\{3i, \frac{-3\sqrt{3}-3i}{2}, \frac{3\sqrt{3}-3i}{2}\right\}$;
**c)** $\{1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i\}$; **d)** $\left\{\sqrt{3} + i, 2i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i, -2i, \sqrt{3} - i\right\}$;
**e)** $\left\{2\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right), 2i, 2\left(\cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10}\right), 2\left(\cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10}\right), 2\left(\cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10}\right)\right\}$;
**f)** $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i), \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left[\left(-1-\sqrt{3}\right) + i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right], \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\left[\left(-1+\sqrt{3}\right) + i\left(-1-\sqrt{3}\right)\right]\right\}$;
**g*)** $\{\pm(a + bi), \pm(b - ai)\}$, gdzie $b = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$, $a = \left(1+\sqrt{2}\right)b$;
**h*)** $\left\{\frac{a+i}{\sqrt{2a}}, \frac{1-a+(a-1)i}{\sqrt{2a}}, \frac{-1-ai}{\sqrt{2a}}\right\}$, gdzie $a = 2 + \sqrt{3}$.

**1.19** **a)** $\{9 - 40i, -9 + 40i\}$; **b)** $\{-2 + 3i, -3 - 2i, 2 - 3i, 3 + 2i\}$;
**c)** $\left\{3 - 4i, -\frac{3}{2} + 2\sqrt{3} + 2i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} - 2\sqrt{3} + 2i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$;
**d)** $\left\{-16(1+i), 8\left(1 + \sqrt{3} + i - i\sqrt{3}\right), 8\left(1 - \sqrt{3} + i + i\sqrt{3}\right)\right\}$;

**1.20** **a)** $\{1 + 4i, -4 + i, -1 - 4i\}$; **b)** $\{2 + 3i, -2 + i, -3i\}$; **c)** $\{5 + 2i, 2 + 3i, 1\}$;
**d)** $\left\{8 + \sqrt{2} + \left(\sqrt{2} - 3\right)i, 10 + \left(1 + 2\sqrt{2}\right)i, 6 - \sqrt{2} + \left(3 + \sqrt{2}\right)i\right\}$.

**1.21** **a)** $1 - i, 1 + i, -1 - i, -1 + i$; **b)** $\frac{1+i}{2}, \frac{2-\sqrt{3}+i}{3+i\sqrt{3}}, \frac{2+\sqrt{3}+i}{3-i\sqrt{3}}, \frac{2-\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}, \frac{2+\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}$; **c)** $\frac{1}{1-i}, \frac{-2}{1+i\left(2-\sqrt{3}\right)}, \frac{-2}{1+i\left(2+\sqrt{3}\right)}$.

## Rozdział 2

**2.1** **a)** $P(x) \cdot Q(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 11x^3 - 2x^2 + 5x - 4$; **b)** $W(z) \cdot V(z) = (1 + i)z^4 + (3 + 5i)z^3 - (9 + i)z^2 + (3 + 5i)z - 6$.

**2.2** **a)** Iloraz $2x^2 + 3x + 11$, reszta z dzielenia $25x - 5$; **b)** Iloraz $x^{12} - 2x^8 + 4x^4 - 8$, reszta z dzielenia 0; **c)** Iloraz $z^2 + 3iz - 7$, reszta z dzielenia $-13iz^2 - 18z + 1 + 7i$.

**2.3** **a)** $-1, 2, -2$; **b)** 2; **c)** $1, -2, 3$: **d)** wielomian nie ma pierwiastków całkowitych. Wskazówka. Wykorzystać uwagę z przykładu **4.3 c)**.

**2.4** **a)** $2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; **c)** $\frac{1}{2}$; **d)** wielomian nie ma pierwiastków wymiernych.

**2.5** a) $2-3i,\ 2+3i$; b) $1-3i,\ 2+i$; c) $i\sqrt{3},\ -i\sqrt{3},\ i\sqrt{5},\ -i\sqrt{5}$; d) $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1-i}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}(1+i),\ -\sqrt{2}(1+i)$.

**2.6** a) $\sqrt{2}-i,\ \sqrt{2}$; b) $1+3i,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3}$; c) $2-i,\ 1+2i,\ 1-2i$; d) $-i,\ \sqrt{2}i,\ 1+i,\ 1-i$; e) $1+i,\ 2+\sqrt{3}i,\ i,\ -i$.

**2.7** a) $81x+80$; b) $\sqrt{2}x-2$; c) $3x^2+3$; d) $2x-1$; e) $-18x+58$; f) $x+14$.

**2.8** a) $W(z)=cz\cdot(z+1)^2\cdot(z-1+5i)\cdot(z+3-i)^2$, gdzie $c\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$; b) $W(z)=c\cdot(z-3)^3\cdot(z+5)^3\cdot(z+4i)^2$, gdzie $c\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$.

**2.9** a) $W(x)=a(x-1)(x+5)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x^2-2x+10\right)$, gdzie $a\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$; b) $W(x)=a(x-3)^2\left(x^2+1\right)^2\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+8x+25\right)^3$, gdzie $a\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

**2.10** a) $[z-(i+3)]\cdot[z-(i-3)]$; b) $\left(z-\sqrt{2}i\right)\left(z+\sqrt{2}i\right)\left(z-\sqrt{3}i\right)\left(z+\sqrt{3}i\right)$; c) $(z-3)\left[z+\left(\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[z+\left(\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$.

**2.11** a) $\left(x^2+2\right)\left(x^2+\sqrt{6}x+2\right)\left(x^2-\sqrt{6}x+2\right)$; b) $\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2-2x+2\right)$; c) $\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)$; d) $(x-1)^2(x+1)(2x-3)(2x+3)$.

**2.12** a) $z^2-4z+16+\dfrac{-68z^2+5z-16}{z^3+4z^2+1}$; b) $1-\dfrac{1}{x^5+4}$; c) $x+\dfrac{5}{x^3+2x^2+3x+4}$.

**2.13*** a) $\dfrac{A}{z}+\dfrac{B}{z^2}+\dfrac{C}{z-2i}+\dfrac{D}{(z-2i)^2}+\dfrac{E}{(z-2i)^3}$, gdzie $A,B,C,D,E\in\boldsymbol{C}$; b) $\dfrac{A}{z+1}+\dfrac{B}{z+i}+\dfrac{C}{(z+i)^2}+\dfrac{D}{(z-1-i)}+\dfrac{E}{(z-1-i)^2}+\dfrac{F}{(z-1-i)^3}$, gdzie $A,B,C,D,E,F\in\boldsymbol{C}$; c) $\dfrac{A}{z-\sqrt{2}}+\dfrac{B}{\left(z-\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{C}{z+\sqrt{2}}+\dfrac{D}{\left(z+\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{E}{z-i\sqrt{2}}+\dfrac{F}{\left(z-i\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{G}{z+i\sqrt{2}}+\dfrac{H}{\left(z+i\sqrt{2}\right)^2}$, gdzie $A,B,C,D,E,F,G,H\in\boldsymbol{C}$.

**2.14** a) $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{x-1}+\dfrac{E}{x+5}+\dfrac{F}{(x+5)^2}$, gdzie $A,B,C,D,E,F\in\boldsymbol{R}$; b) $\dfrac{Ax+B}{x^2+4}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+3}+\dfrac{Ex+F}{(x^2+x+3)^2}+\dfrac{Gx+H}{(x^2+x+3)^3}$, gdzie $A,B,C,D,E,F,G,H\in\boldsymbol{R}$; c) $\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{(x+3)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-4x+5}+\dfrac{Ex+F}{(x^2-4x+5)^2}$, gdzie $A,B,C,D,E,F\in\boldsymbol{R}$;

**2.15*** a) $\dfrac{\frac{1}{12}}{z-1}+\dfrac{-\frac{4}{3}}{z+2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{z+3}$; b) $\dfrac{\frac{1}{4}}{(z-1)^2}+\dfrac{-\frac{1}{4}}{(z+1)^2}$; c) $\dfrac{1-i}{z-1-i}+\dfrac{-1-i}{z-1+i}+\dfrac{1+i}{z+1-i}+\dfrac{-1+i}{z+1+i}$; d) $\dfrac{\frac{1}{2}}{(z+1+i)^2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{(z+1-i)^2}$.

**2.16** a) $\dfrac{-2}{x-1}+\dfrac{6}{x-2}+\dfrac{-6}{x-3}+\dfrac{2}{x-4}$; b) $\dfrac{\frac{1}{4}}{x-1}+\dfrac{-\frac{1}{4}}{x+1}+\dfrac{\frac{1}{2}}{x^2+1}$; c) $\dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{x-1}{x^2+1}+\dfrac{2x+2}{(x^2+1)^2}$; d) $\dfrac{1}{x^2+2x+2}-\dfrac{2}{(x^2+2x+2)^2}$; e) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+1}$; f) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

# Rozdział 3

**3.1** **a)** Położenie figur w grze w szachy zapiszemy w postaci macierzy o 8 wierszach i 8 kolumnach. Rzędy poziome i pionowe na szachownicy ponumerowane będą tak samo jak wiersze i kolumny macierzy. Jeżeli w $i$-tym wierszu i $j$-tej kolumnie szchownicy, gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant 8$,

1) nie stoi figura ani pionek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 0$;
2) stoi biały (czarny) pionek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 1(-1)$;
3) stoi biały (czarny) skoczek, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 2(-2)$;
4) stoi biały (czarny) goniec, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 3(-3)$;
5) stoi biała (czarna) wieża, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 4(-4)$;
6) stoi biały (czarny) hetman, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 5(-5)$;
2) stoi biały (czarny) król, to przyjmujemy, że $a_{ij} = 6(-6)$;

Poniżej podajemy zapis w formie macierzy, położenia figur na szachownicy przed rozpoczęciem gry.

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -3 & -5 & -6 & -3 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

**b)** Niech $1, 2, \ldots, 16$ oznaczają numery stolic województw ustawionych w porządku alfabetycznym. Niech $D$ oznacza macierz kwadratową stopnia 16 przedstawiającą odległości drogowe i kolejowe między tymi stolicami. Elementy macierzy $D$ określone są wzorem

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i = j, \\ \text{odległość drogowa między miastami } i \text{ oraz } j & \text{dla} \quad i < j, \\ \text{odległość kolejowa między miastami } i \text{ oraz } j & \text{dla} \quad i > j. \end{cases}$$

Fragment takiej macierzy przedstawiono poniżej.

| | 1 | 2 | 3 | · | · | · | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 402 | 381 | · | · | · | 629 |
| 2 | 465 | 0 | 174 | · | · | · | 261 |
| 3 | 441 | 160 | 0 | · | · | · | 410 |
| · | · | · | · | | | | · |
| · | · | · | | · | | | · |
| · | · | · | | | · | | · |
| 16 | 628 | 291 | 451 | · | · | · | 0 |

Legenda:

1 – Białystok,
2 – Bydgoszcz,
3 – Gdańsk,
⋮ ⋮
16 – Zielona Góra.

**c)** Niech $B = [b_{ij}]$ oznacza macierz o 768 wierszach i 1024 kolumnach opisującą kolorowy obraz na ekranie monitora. Jeżeli punkt ekranu stojący w $i$-tym wierszu i w $j$-tej kolumnie

świeci kolorem białym, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 0$;
świeci kolorem niebieskim, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 1$;
świeci kolorem zielonym, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 2$;
świeci kolorem żółtym, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 3$;
świeci kolorem czerwonym, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 4$;
⋮ ⋮ ⋮
nie świeci, to przyjmujemy, że $b_{ij} = 20$.

Elementy $t_{ij}$ macierzy $T$ przedstawiającej ćwiartkę tęczy opisane są wzorami:

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dla } i \text{ oraz } j \text{ spełniających warunek } 200 \leqslant \sqrt{i^2+j^2} < 250; \\ 2 \text{ dla } i \text{ oraz } j \text{ spełniających warunek } 250 \leqslant \sqrt{i^2+j^2} < 300; \\ 3 \text{ dla } i \text{ oraz } j \text{ spełniających warunek } 300 \leqslant \sqrt{i^2+j^2} < 350; \\ 4 \text{ dla } i \text{ oraz } j \text{ spełniających warunek } 350 \leqslant \sqrt{i^2+j^2} \leqslant 400; \\ 0 \text{ dla pozostałych } i \text{ oraz } j, \end{cases}$$

gdzie $1 \leqslant i \leqslant 768$ oraz $1 \leqslant j \leqslant 1024$.

**d)** 1) $\begin{bmatrix} 0&1&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&0 \end{bmatrix}$, 2) $\begin{bmatrix} 0&1&1&1 \\ 1&0&1&1 \\ 1&1&0&1 \\ 1&1&1&0 \end{bmatrix}$, 3) $\begin{bmatrix} 0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&1&0 \end{bmatrix}$.

Element $a_{ij}$ w podanych powyżej macierzach jest równy 1, gdy węzły o numerach $i$ oraz $j$ są połączone prętem oraz 0, gdy nie są połączone.

**3.2** **a)** $\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 9 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$;

**e)** $\begin{bmatrix} 1&3&5 \\ 2&4&6 \\ 1&3&5 \\ 2&4&6 \\ 1&3&5 \end{bmatrix}$; f) $\begin{bmatrix} 35 \end{bmatrix}$.

**3.3** **a)** $X = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$;

**c)** $X = \begin{bmatrix} 1&0&1 \\ 0&2&0 \\ 1&0&1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1&0&-1 \\ 0&0&0 \\ -1&0&1 \end{bmatrix}$; **d)** $X = \begin{bmatrix} 0&0 \\ 1&1 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 1&0 \\ 0&0 \end{bmatrix}$.

**3.4** **a)** $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; **b)** $A^n = \begin{cases} A & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ I & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$;

**c)** $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$; **d)** $A^n = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} nx & \operatorname{sh} nx \\ \operatorname{sh} nx & \operatorname{ch} nx \end{bmatrix}$;

**e)** $A^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+(-1)^n & 0 & 1-(-1)^n \\ 0 & 2 & 0 \\ 1-(-1)^n & 0 & 1+(-1)^n \end{bmatrix} = \begin{cases} A & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ I & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$;

**f*)** $A^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$ dla $n \geqslant 2$; **g*)** Dla $n \geqslant k$ macierz $A^n$ jest zerowa.

**3.5** **a)** $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; **b)** $X = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & a \end{bmatrix}$, gdzie $a \in C$; **c)** $X = \begin{bmatrix} 2i-2 & 3i+1 \\ 3-i & -1-i \end{bmatrix}$;

**d)** $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; **e)** $X = \begin{bmatrix} a & b \\ 1+a & b-1 \\ 3-a & 2-b \end{bmatrix}$, gdzie $a, b \in C$; **f)** $X = \begin{bmatrix} a & b \\ a+3b & -a-3b \end{bmatrix}$,

gdzie $a, b \in C$; **g)** $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & i \end{bmatrix}$ lub $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1+i}{2} \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ lub $X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1-i}{2} \\ 0 & i \end{bmatrix}$ lub

$X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-1+i}{2} \\ 0 & -i \end{bmatrix}$; **h)** $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$ lub $X = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}$, gdzie $a \in C$ i $b \in C \setminus \{0\}$;

**i)** $X = \begin{bmatrix} a & ia \\ \frac{1}{a} & -\frac{i}{a} \end{bmatrix}$ lub $X = \begin{bmatrix} a & -ia \\ \frac{1}{a} & \frac{i}{a} \end{bmatrix}$, gdzie $a \in C \setminus \{0\}$; **j)** $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ lub

$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

**3.6** **a)** Wskazówka. Wykorzystać tożsamości: $(AB)C = A(BC)$, $(AB)^T = B^T A^T$; **b)** Wskazówka. Wykorzystać tożsamości: $(A+B)C = AC+BC$, $D(A+B) = DA+DB$, $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

**3.7** **a)** $-1$; **b)** $\sin(\alpha-\beta)$; **c)** 1; **d)** $-2$.

**3.8** **a)** $2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1-2i & 3 \\ -4 & 1-i \end{vmatrix} + (-i)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} i & 1+i \\ -4 & 1-i \end{vmatrix} + (3+i)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} i & 1+i \\ 1-2i & 3 \end{vmatrix}$;

**b)** $0\cdot(-1)^{2+1}|?| + 5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} +$

$(-7)\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

**3.9** **a)** $-289$; **b)** 275; **c)** 123.

**3.10*** Wskazówka. Wzorować się na rozwiązaniu podanym w **Przykładzie* 3.10**.

**3.11** **a)** $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$; **b)** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

**3.12** **a)** 0; **b)** 1; **c)** $-512$.

**3.13** **a)** Wskazówka. Od pierwszego wiersza odjąć drugi, od drugiego trzeci, ..., od przedostatniego ostatni. Wynik $4\cdot 3^{n-1}$; **b)** Wskazówka. Od pierwszego wiersza odjąć drugi, od drugiego trzeci, ..., od przedostatniego ostatni. Wynik $(-1)^{n-1}n$; **c)** Wskazówka. Od kolejnych kolumn począwszy od ostatniej, a na drugiej kończąc odejmować kolumny poprzedzające pomnożone przez $n$. Rozwinąć otrzymany wyznacznik względem ostatniego wiersza obniżając o 1 jego stopień. Z kolejnych wierszy obniżonego wyznacznika wyłączyć wspólne czynniki. Kontynuować postępowanie aż do otrzymania wyznacznika stopnia 2. Wynik $2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (n-1)!$.

**3.14** **a)** 50; **b)** −15; **c)** −13; **d)** 44; **e)** 12; **f)** −178.

**3.15*** **a)** −45; **b)** −11; **c)** −1060.

**3.16** **a)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{5}{36} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

**3.17** **a)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$.

**3.18** **a)** $X = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}$; **b)** $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; **c)** $X = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$;
**d)** $X = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} -17 & -9 \\ 11 & 19 \end{bmatrix}$.

**3.19** **a)** $\det A = 2^n$, np. dla $A = 2I_n$; **b)** $\det A = 0$ lub $\det A = 1$ lub $\det A = -1$, np. dla $A = O_n$, $A = I_n$ lub $A = -I_n$ dla $n$ nieparzystych; **c)** $\det A = 2^n$ lub $\det A = -2^n$, np. dla $A = 2I_n$ lub $A = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$ oraz $a_{11} = -2$, $a_{ii} = 2$ dla $i = 2, 3, \ldots, n$, przy czym $n \in \mathbf{N}$ jest liczbą parzystą.

# Rozdział 4

**4.1** **a)** dla $p \neq -1-\sqrt{2}$ oraz $p \neq -1+\sqrt{2}$; **b)** nie istnieje takie $p$; **c)** dla każdego $p \in R$; **d)** dla $p \neq -2$ oraz $p \neq 2$.

**4.2** **a)** $x = \frac{14}{11}$, $y = \frac{2}{11}$; **b)** $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$; **c)** $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

**4.3** **a)** $y = \frac{5}{11}$; **b)** $y = \frac{1}{10}$; **c)** $y = 2$.

**4.4** **a)** $x = 1, y = -1$; **b)** $x = -2, y = 0, z = 7$; **c)** $x = 3, y = 2, z = -1$;
**d)** $x = -3, y = 2, z = -1, t = 3$.

**4.5** **a)** 1; **b)** 3; **c)** 2; **d)** 3; **e)** 4; **f)** 4.

**4.6** a) 3; b) 2; c) 4; d) 2; e) 4; f*) 6.

**4.7** **a)** 3; **b)** 2; **c)** 2; **d)** 1.

**4.8** **a)** dla $p = -3$ lub $p = 1$ lub $p = 2$ rząd jest równy 2, w pozostałych przypadkach rząd jest równy 3; **b)** rząd jest równy 2 dla każdego $p \in R$; **c)** dla $p = 2$ rząd jest równy 2, dla $p \neq 2$ rząd jest równy 3; **d)** dla $p = 1$ rząd jest równy 1, dla $p \neq 1$ rząd jest równy 3; **e)** dla $p = 1$ rząd jest równy 2, w pozostałych przypadkach rząd jest równy 3; **f*)** dla $p = 2$ rząd jest równy 1, dla $p = -2$ rząd jest równy 3, w pozostałych przypadkach rząd jest równy 4.

**4.9** **a)**, **d)** nieskończenie wiele rozwiązań, 1 parametr; **b)**, **c)** brak rozwiązań; **e)** nieskończenie wiele rozwiązań, 2 parametry.

**4.10** **a)** $\{y\}$, $\{z\}$; **b)** wszystkie możliwe pary niewiadomych, tzn. $\{x,y\}$, $\{x,z\}$, $\{x,t\}$, $\{y,z\}$, $\{y,t\}$, $\{z,t\}$; **c)** $\{x,y,z\}$, $\{x,y,s\}$, $\{x,y,t\}$, $\{x,z,s\}$, $\{x,s,t\}$, $\{y,z,s\}$, $\{y,s,t\}$.

**4.11** Układ nie ma rozwiązań, ma dokładnie jedno rozwiązanie, ma nieskończenie wiele rozwiązań odpowiednio **a)** dla $p=\frac{1}{2}$, dla $p\neq\frac{1}{2}$ i $p\neq 3$, dla $p=3$; **b)** nigdy, dla $p\neq 4$ i $p\neq 0$, dla $p=4$ lub $p=0$; **c)** dla $p=-2$, dla $p\neq -2$ i $p\neq 1$, dla $p=1$; **d)** dla $p=2$, dla $p\neq 2$, nigdy; **e)** dla $p\in \boldsymbol{R}$, nigdy, nigdy.

**4.12** **a)** wyrób $D$ waży 44 dag, zaś wagi wyrobu $E$ na podstawie tych danych nie można uzyskać; **b)** detale $a,b,c$ ważą odpowiednio 4, 2 i 3 dag.

**4.13** **a)** $x=-\frac{1}{7}$, $y=\frac{3}{7}$; **b)** $x=2$, $y=-1$, $z=1$; **c)** $x=0$, $y=2$, $z=-3$; **d)** $x=\frac{8}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$, $z=-\frac{3}{7}$; **e)** $x=1, y=-2, z=0, t=2$; **f)** $x=10, y=3, z=0, s=-1, t=0$.

**4.14** **a)** $x=0$, $y=2$, $z=-\frac{1}{2}$; **b)** $x=1, y=2, z=3, t=4$; **c)** $x=-1, y=1, z=-1, s=2, t=2$; **d)** $x=1, y=0, z=1, s=0, t=1$.

**4.15** **a)** $x=1, y=-1, z=1$; **b)** układ jest sprzeczny; **c)** $x=-1-t, y=1, z=0$, gdzie $t\in\boldsymbol{R}$; **d)** $x=\frac{1}{7}-\frac{3}{7}z+s-t$, $y=\frac{1}{7}+\frac{4}{7}z-s$, gdzie $z,s,t\in\boldsymbol{R}$.

**4.16** **a)** układ jest sprzeczny; **b)** $y=\frac{7}{2}+s$, $z=-4-2x-s$, $t=\frac{1}{2}$, gdzie $x,s\in\boldsymbol{R}$; **c)** $x=-1+t$, $y=4-t$, $z=1-t$, gdzie $t\in\boldsymbol{R}$; **d)** $x=-5+3y+z+2s$, $t=-2z$, gdzie $y,z,s\in\boldsymbol{R}$.

**4.17** Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, nieskończenie wiele rozwiązań lub też nie posiada rozwiązań odpowiednio dla: **a)** $p\in\boldsymbol{R}\setminus\{-5,3\}$, $p=3$, $p=-5$; **b)** $p\in\boldsymbol{R}\setminus\{-1,-7\}$, $p=-1$, $p=-7$.

**4.18** Czasy potrzebne na narysowanie formy, wycięcie, złożenie modelu i pomalowanie wynoszą odpowiednio 1 minutę, 3 minuty, 2 minuty i 4 minuty.

# Rozdział 5

**5.1** **a)** 13; **b)** 4; **c)** $\sqrt{\varrho^2+h^2}$; **d)** $\varrho$.

**5.2** $\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$, $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$.

**5.3** **a)** $\vec{u}=(\cos\alpha,\sin\alpha,0)$; **b)** $\vec{u}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$; **c)** $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{17}}(2,3,-2)$ lub $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{17}}(-2,-3,2)$.

**5.4** **a)** 5; **b)** $-17$; **c*)** $-1$.

**5.5** **a)** $\arccos\frac{-8\sqrt{5}}{25}\approx 2,37\,[\mathrm{rad}]\approx 135,8^\circ$; **b)** $\frac{\pi}{3}\,[\mathrm{rad}]$; **c)** $\varphi_1=\arccos\frac{20}{3\sqrt{59}}\approx 0,52\,[\mathrm{rad}]\approx 29,8^\circ$, $\varphi_2=\arccos\frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{295}}\approx 0,39\,[\mathrm{rad}]\approx 22,3^\circ$, $\varphi_3=\arccos\frac{13}{3\sqrt{35}}\approx 0,75\,[\mathrm{rad}]\approx 43,0^\circ$.

**5.6** $\frac{9}{\sqrt{13}}$.

**5.7** **a)** $(-4,-6,-17)$; **b)** $3\vec{i}+5\vec{j}+2\vec{k}$; **c*)** $\vec{p}-7\vec{q}+5\vec{r}$.

**5.8** **a)** $S=\sqrt{285}$; **b)** $S=\sqrt{61}$;
**c)** $S=\frac{1}{2}\left(|\vec{u}\times\vec{v}|+|\vec{v}\times\vec{w}|+|\vec{w}\times\vec{u}|+|(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{w}-\vec{v})|\right)$.

**5.9** $h_c=\frac{\sqrt{14910}}{35}$.

**5.10** **a)** $-55$; **b)** $22$.

**5.11** **a)** $|V|=9$; **b)** $|V|=2$; **c*)** $|V|=\frac{1}{8}\left|(\vec{v}-\vec{w},\vec{u}-\vec{w},\vec{u}+\vec{v})\right|=\frac{1}{4}\left|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right|$.

**5.12** **a)** tak; **b)** nie.

**5.13** **a)** $3y-2z+6=0$, $(x,y,z)=(1,-2,0)+s(1,0,0)+t(0,2,3)$, gdzie $s,t\in\boldsymbol{R}$;
**b)** $19x-8y-z=0$, $(x,y,z)=(0,0,0)+s(1,2,3)+t(-1,-3,5)$, gdzie $s,t\in\boldsymbol{R}$;
**c)** $5x+z-9=0$, $(x,y,z)=(1,-3,4)+s(0,1,0)+t(1,3,-5)$, gdzie $s,t\in\boldsymbol{R}$;
**d)** $x-y+z-5=0$, $(x,y,z)=(1,-1,3)+s(1,1,0)+t(0,1,1)$, gdzie $s,t\in\boldsymbol{R}$;
**e)** $3x-y+3=0$, $(x,y,z)=(0,3,0)+s(0,0,1)+t(1,3,0)$, gdzie $s,t\in\boldsymbol{R}$.
**f)** $-x+y+z+4=0$, $(x,y,z)=(2,1,-3)+s(1,1,0)+t(0,1,-1)$, gdzie $s,t\in\boldsymbol{R}$.

**5.14** **a)** $l:\begin{cases}x=-3+2t,\\ y=5-t,\\ z=2+3t,\end{cases}$ gdzie $t\in\boldsymbol{R}$, $l:\ \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-2}{3}$;

**b)** $l:\begin{cases}x=1-3t,\\ y=2t,\\ z=6-2t,\end{cases}$ gdzie $t\in\boldsymbol{R}$, $l:\ \frac{x-1}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{-2}$;

**c)** $l:\begin{cases}x=3t,\\ y=-2-t,\\ z=3+2t,\end{cases}$ gdzie $t\in\boldsymbol{R}$, $l:\ \frac{x}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{2}$;

**d)** $l:\begin{cases}x=7+6t,\\ y=2+3t,\\ z=4t,\end{cases}$ gdzie $t\in\boldsymbol{R}$, $l:\ \frac{x-7}{6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{4}$;

**e)** $l:\begin{cases}x=-2+2t,\\ y=4-3t,\\ z=4t,\end{cases}$ gdzie $t\in\boldsymbol{R}$, $l:\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z}{4}$;

**f*)** $l:\begin{cases}x=1+7t,\\ y=-1-2t,\\ z=2+31t,\end{cases}$ gdzie $t\in\boldsymbol{R}$, $l:\ \frac{x-1}{7}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{31}$.

**5.15** **a)** punkt $A$ należy, a punkt $B$ nie należy do prostej $l$; **b)** prosta $m$ jest zawarta w płaszczyźnie $\pi$; **c)** punkt $A$ należy, a punkt $B$ nie należy do płaszczyzny $\pi$; **d)** proste $l_1$ i $l_2$ mają punkt wspólny $(1,2,4)$; **e)** prosta $l$ jest równoległa do płaszczyzny $\pi$.

**5.16** **a)** $(-1,0,3)$; **b)** $(1,1,3)$; **c)** $(0,2,-3)$.

**5.17** **a)** $\frac{5}{\sqrt{11}}$; **b)** 1; **c)** 2; **d)** $\sqrt{\frac{6}{7}}$; **e)** $\sqrt{14}$; **f)** 1; **g)** $\frac{57}{7}$; **h)** $\frac{3}{7}\sqrt{21}$.

**5.18** **a)** $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}} \approx 1,37\,[\mathrm{rad}] \approx 78,7^\circ$; **b)** $\alpha = \arccos \frac{3}{2\sqrt{21}} \approx 1,24\,[\mathrm{rad}] \approx 70,9^\circ$; **c)** $\alpha = \arccos \frac{10}{\sqrt{154}} \approx 0,63\,[\mathrm{rad}] \approx 36,3^\circ$.

**5.19** **a)** $\left(-\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$; **b)** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; **c)** $l' : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$.

**5.20** **a)** $(0,-5,5)$; **b)** $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; **c)** $(6,1,1)$.

**5.21** **a)** $(-4,-6,2)$; **b)** $l' : \frac{x+2}{4} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+1}{1}$.

**5.22** **a)** $|V| = \frac{4}{3}$, $|S| = 9$; **b)** $|V| = 60$, $|S| = 2\left(15\sqrt{2} + 20\sqrt{5} + \sqrt{4154}\right)$.

**5.23** $S = \sqrt{61}$.

**5.24** $h = \frac{200}{3}\sqrt{11} \approx 221$ km.

**5.25** $P_0 = (-4,-12,9)$.

**5.26** $h_4 = 150$ m.

**5.27** $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\varphi \approx 26,6^\circ$.

**5.28** $S = 10\sqrt{319}\,\mathrm{m}^2$.

**5.29** $d_{\min} = (h_2 - h_1)\cos\alpha = 2000\cos 10^\circ \approx 1970\,\mathrm{m}$.

**5.30** Wskazówka. Wykazać, że suma momentów sił ciężkości tych punktów materialnych, względem osi obrotu, jest równa $\vec{O}$.

**5.31** **a)** $(x_0, y_0, z_0) = \left(5, \frac{55}{9}, \frac{65}{9}\right)$; **b)** 4000; **c)** 3200;
**d)** $\frac{2G}{25}\left(\frac{9\sqrt{2}}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{9} + 7, \frac{-7\sqrt{2}}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{9} - 5, -\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{9} - 4\right)$, gdzie $G$ jest stałą grawitacji.

## Zbiory zadań


1. O.Cuberbiller, *Zadania i ćwiczenia z geometri analitycznej*, PWN, Warszawa 1965.
2. W.Dubnicki, L.Filmo, H.Sosnowska, *Algebra liniowa w zadaniach*, PWN, Warszawa 1985.
3. D.K.Faddeev, I.S.Sominsky, *Zbiór zadań z algebry wyższej*, Wydawnictwo „Nauka", Moskwa 1977 (w jęz. ros.).
4. B.Gdowski, E.Pluciński, *Zbiór zadań z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.
5. R.Grzymkowski, R.Wituła, *Metody rachunkowe w algebrze*, Cz. I, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2000.
6. H.Guściora, M.Sadowski, *Przykłady i zadania z algebry liniowej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańska 1976.
7. L.Jeśmianowicz, J.Łoś, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1969.
8. I.L.Kalichman, *Zadania z algebry liniowej i programowania liniowego*, PWN, Warszawa 1974.
9. E.Kącki, D.Sadowska, L.Siewierski, *Geometria analityczna w zadanich*, PWN, Warszawa 1975.
10. J.Klukowski, *Algebra w zadaniach*, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1991.
11. A.I Kostrikin (red.), *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa 1995.
12. W.Krysicki, L.Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, cz. I*, PWN, Warszawa 2001.
13. R.Leitner, W.Matuszewski, Z.Rojek, *Zadania z matematyki wyższej, cz. I*, WNT, Warszawa 2000.
14. I.V.Proskuryakow, *Problems in linear algebra*, Mir Publishers, Moscow 1978.
15. S.Przybyło, A.Szlachtowski, *Algebra i wielowymiarowa geometria anlityczna w zadaniach*, WNT, Warszawa 1998.
16. Z.Radziszewski, *Zbiór zadań z geometrii analitycznej*, Wydawnictwo UMCS, Warszawa 1996.
17. E.Stolarska, red., *Zbiór zadań z algebry liniowej dla ekonometryków*, PWN, Warszawa 1986.