

MACIERZE ODWROTNE

Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ nazywamy taką macierz $\mathbf{A}^{-1}$, że

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I},$$

gdzie $\mathbf{I}$ jest macierzą jednostkową tego samego stopnia co macierz $\mathbf{A}$

Tylko macierze nieosobliwe ($\det \mathbf{A} \neq 0$) posiadają macierz odwrotną.

Sposoby wyznaczania macierzy odwrotnej

1) jeśli macierz $\mathbf{A}$ jest stopnia n , to $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$ i elementy macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ wyznaczamy z równania macierzowego $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

$$2) \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot [\mathbf{D}_{ij}]^T,$$

przy czym $[\mathbf{D}_{ij}]^T$ jest transpozycją macierzy dopełnień algebraicznych, czyli macierzy

$$[\mathbf{D}_{ij}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie $\mathbf{D}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |\mathbf{A}_{ij}|$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} , zaś $|\mathbf{A}_{ij}|$ jest minorem elementu a_{ij} (wyznacznik macierzy powstałej z macierzy $\mathbf{A}$ przez skreślenie i -tego wiersza i j -tej kolumny).

3) **Twierdzenie 1.** Jeżeli macierz kwadratowa $\mathbf{A}$ jest macierzą nieosobliwą ($\det \mathbf{A} \neq 0$), to istnieje ciąg przekształceń elementarnych sprowadzających tę macierz do macierzy jednostkowej.

Twierdzenie 2. Jeżeli ciąg przekształceń elementarnych sprowadza nieosobliwą macierz kwadratową stopnia n do macierzy jednostkowej stopnia n , to ten sam ciąg przekształceń elementarnych sprowadza tę samą macierz jednostkową do macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ (przekształcenia dokonujemy bądź na wierszach, bądź na kolumnach).

Jeżeli w trakcie przekształceń elementarnych otrzymamy wiersz lub kolumnę zerową tzn., że macierz odwrotna nie istnieje.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & | & \mathbf{I} \\ \downarrow T_n & & \downarrow T_n \\ \mathbf{I} & | & \mathbf{A}^{-1} \end{array}$$

OPERACJE ELEMENTARNE I RZĄD MACIERZY

Przekształceniami elementarnymi danej macierzy $A=[a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy następujące działania na wierszach lub kolumnach macierzy:

- T_1 – polega na pomnożeniu wszystkich elementów wybranego wiersza lub kolumny przez liczbę $\alpha \neq 0$,
- T_2 – polega na zamianie miejscami dwóch dowolnie wybranych wierszy lub kolumn,
- T_3 – polega na dodaniu do wszystkich elementów wybranego wiersza lub kolumny odpowiadających im elementów innego wiersza lub kolumny pomnożonych przez liczbę $\alpha \neq 0$.

Przykład. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{T_1(2 \cdot w_2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{T_3(w_1 + 2w_3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\xleftrightarrow{T_2(w_1 \leftrightarrow w_2)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Rzędem macierzy A nazywamy maksymalną liczbę liniowo niezależnych wektorów (wierszy lub kolumn) tej macierzy i oznaczamy przez $\text{rz}A$.

Sposoby wyznaczania rzędu macierzy

- 1) Rząd macierzy jest to najwyższy stopień niezerowego wyznacznika kwadratowej podmacierzy (minora) tej macierzy (najwyższy stopień jej nieosobliwej podmacierzy).
- 2) **Tw.** Przekształcenia elementarne typu T_1, T_2, T_3 nie zmieniają rzędu macierzy.

Postać bazowa macierzy (macierz bazowa) dla macierzy A

$$A = \left[\begin{array}{c|c} I_k & R \\ \hline O_1 & O_2 \end{array} \right],$$

gdzie I_k jest macierzą jednostkową stopnia k , zaś O_1 i O_2 są macierzami zerowymi.

Tw. Każdą macierz A można za pomocą ciągu operacji elementarnych przekształcić do macierzy bazowej, która zawiera podmacierz jednostkową stopnia k . Wtedy $\text{rz}A = k$.

Stopień k macierzy jednostkowej I otrzymanej w lewym górnym rogu macierzy określa rząd macierzy.