

- Sformułowanie zadania poszukiwania pierwiastków.
- Przedział izolacji.
- Twierdzenia o istnieniu pierwiastków.
- Warunki zatrzymywania algorytmów.
- Metoda połowienia: założenia, algorytm, ilustracja graficzna, zbieżność.
- Metoda regula falsi: założenia, algorytm, ilustracja graficzna, zbieżność.
- Metoda siecznych: założenia, algorytm, ilustracja graficzna, zbieżność.
- Metoda Newtona: założenia, algorytm, ilustracja graficzna, zbieżność.
- Zastosowanie wzoru Newtona.
- Szacowanie liczby pierwiastków w zadanym przedziale. Zastosowanie ciągu Sturma.
- Deflacja.

Dla danej funkcji rzeczywistej jednej zmiennej znaleźć wartości x , dla której

$$f(x) = 0$$

w praktyce:

dopuszczamy pewną tolerancję, uwzględniając precyzję arytmetyki, np. dla $\varepsilon = 2^{-24}$

$$|f(x)| < 10^{-5}$$

Przedział izolacji pierwiastka - jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła i ma na końcach przedziału $[a, b]$ przeciwne znaki, to w przedziale $[a, b]$ leży co najmniej jeden jej pierwiastek.

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

w praktyce:

rezygnujemy z mnożenia z powodu możliwości wystąpienia nadmiaru albo niedomiaru i sprawdzamy

$$\operatorname{sgn}(a) \neq \operatorname{sgn}(b)$$

Twierdzenie Bolzano

Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągłą i oznaczoną w przedziale $[a, b]$ i jej wartości na końcach przedziału mają różne znaki, to istnieje co najmniej jeden punkt c , dla którego $f(c)=0$,

$$f(c)=0 \quad i \quad a < c < b$$

Twierdzenie Bolzano – Cauchy'ego

Jeśli funkcja $f(x,y)$ ciągła i oznaczona w obszarze spójnym przyjmuje w dwóch jego punktach (x_1, y_1) i (x_2, y_2) wartości o przeciwnych znakach, to istnieje taki jeden punkt (x_3, y_3) w tym obszarze, dla którego $f(x_3, y_3)=0$,

$$f(x_3, y_3)=0, \quad \text{jeśli} \quad f(x_1, y_1) > 0 \quad i \quad f(x_2, y_2) < 0$$

Metoda polega na dzieleniu przedziału izolacji pierwiastka na połowę i sprawdzaniu znaku iloczynu wartości funkcji na końcach dwóch nowo powstałych podprzedziałów.

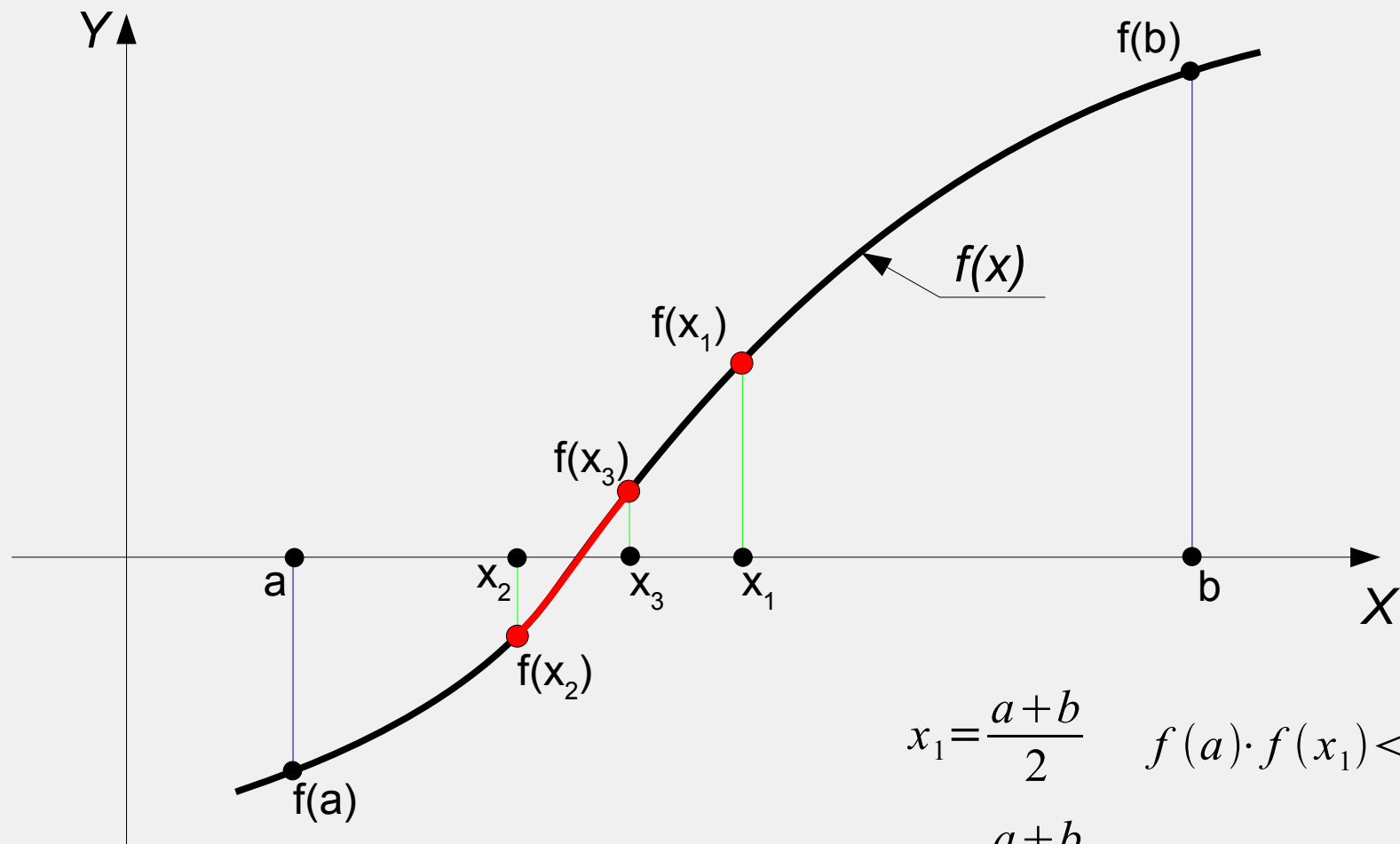
$$x = \frac{a + b}{2}$$

Wybierany jest ten, w którym znajduje się pierwiastek. Czynność ta powtarzana jest aż do znalezienia rozwiązania.

w praktyce:

$$x = a + \frac{b - a}{2}$$

Równania nieliniowe – metoda połowienia (bisekcji)



$$x_1 = \frac{a+b}{2} \quad f(a) \cdot f(x_1) < 0 \quad b = x_1$$

$$x_2 = \frac{a+b}{2} \quad f(x_2) \cdot f(b) < 0 \quad a = x_2$$

$$x_3 = \frac{a+b}{2} \quad f(a) \cdot f(x_3) < 0 \quad b = x_3$$

Twierdzenie

Jeśli przedziały $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$... są tworzone metodą połowienia, to granice

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k \quad i \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$$

istnieją, są identyczne i równe zeru funkcji f .

Jeśli $r = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k$, gdzie $c_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ to

$$|r - c_k| \geq 2^{-(k+1)}(b_0 - a_0)$$

Metoda fałszywego założenia liniowości funkcji.

Założenia:

- w przedziale $[a,b]$ równanie ma dokładnie jeden pierwiastek pojedynczy,
- $f(a)f(b) < 0$
- $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ jest funkcją klasy C^2 ,
- pierwsza i druga pochodna mają stały znak na przedziale $[a,b]$

Punkt stały x_s – punkt, w którym $f(x)$ i $f'(x)$ mają ten sam znak.

$$x_s = a \rightarrow x_0 = b$$

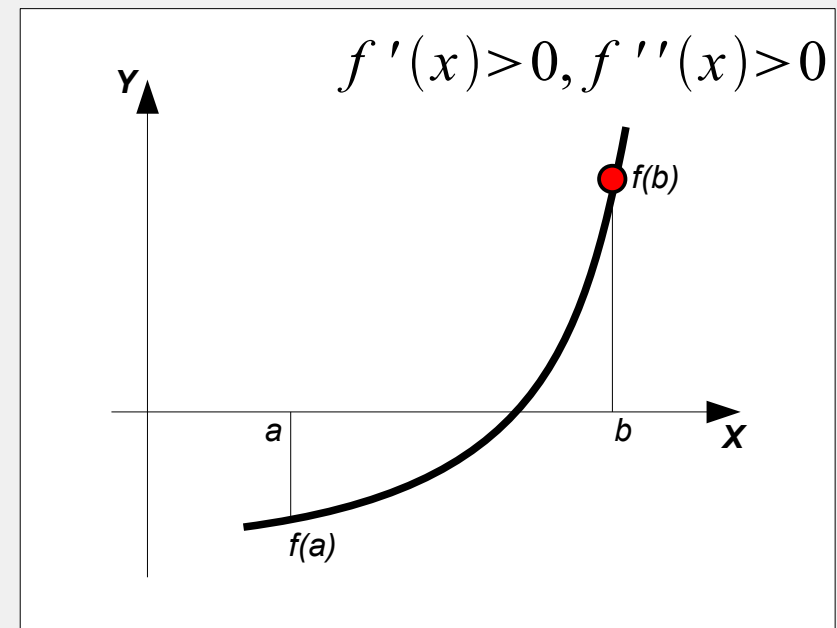
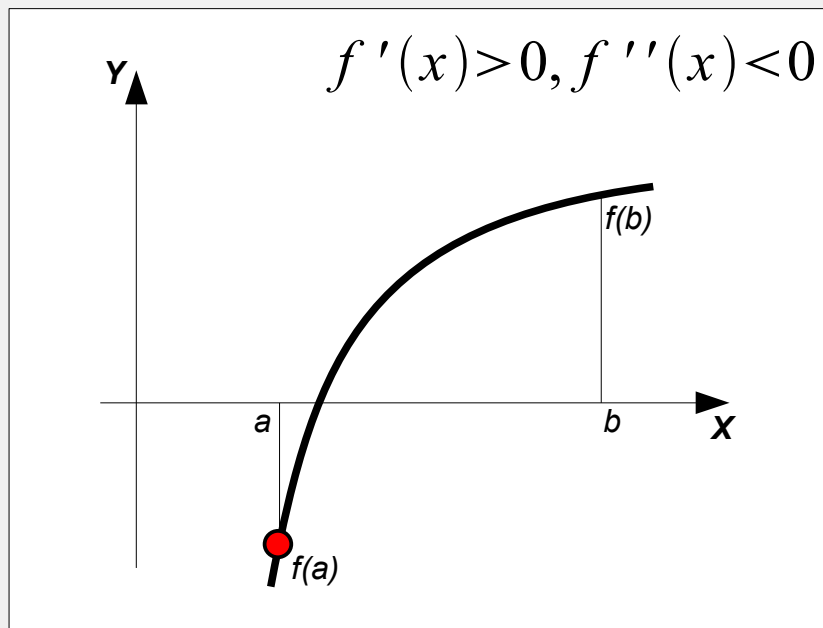
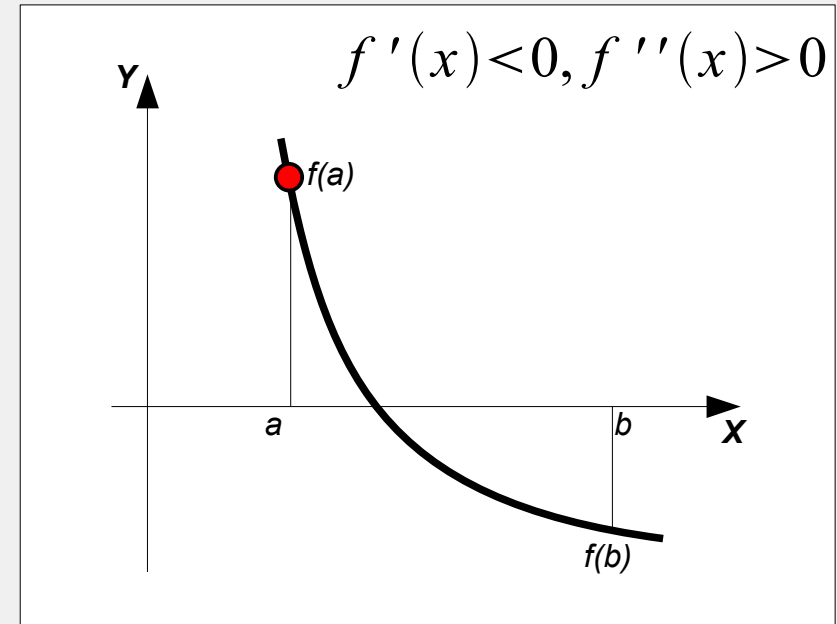
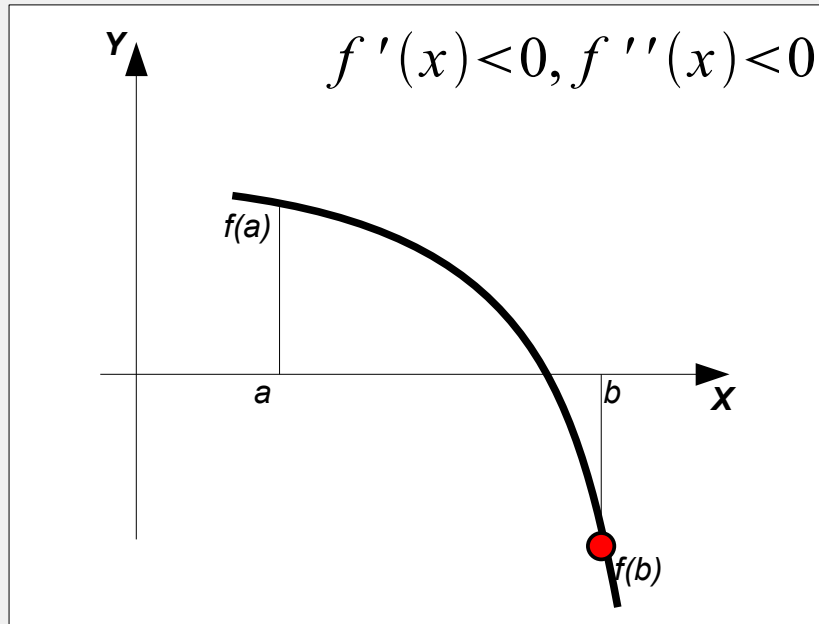
$$x_s = b \rightarrow x_0 = a$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_s) - f(x_k)} \cdot (x_s - x_k)$$

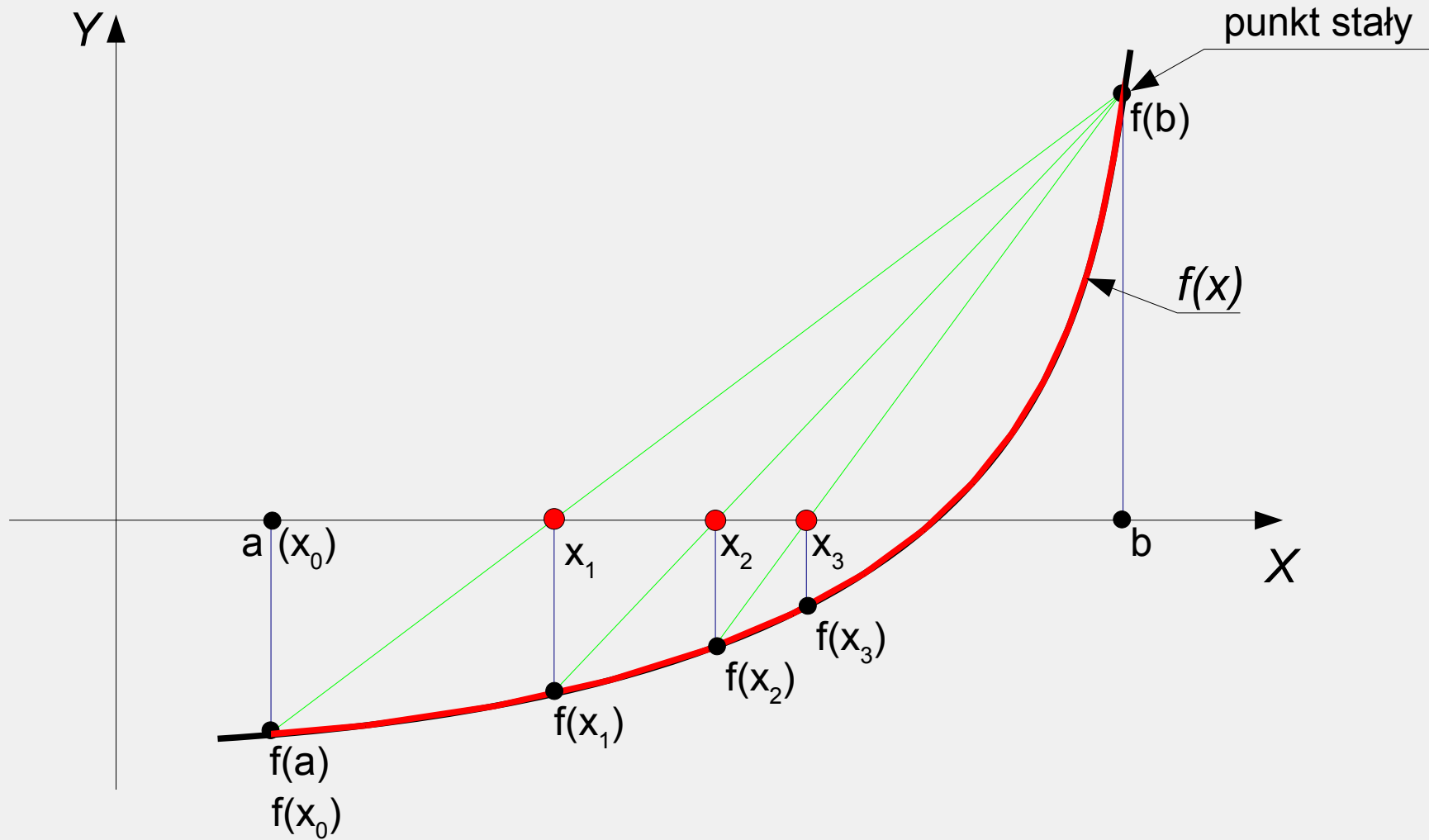
Ciąg $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ jest rosnący i ograniczony, a więc jest zbieżny. Jego granicą jest szukany pierwiastek.

- zbieżność liniowa.

Równania nieliniowe – metoda regula falsi



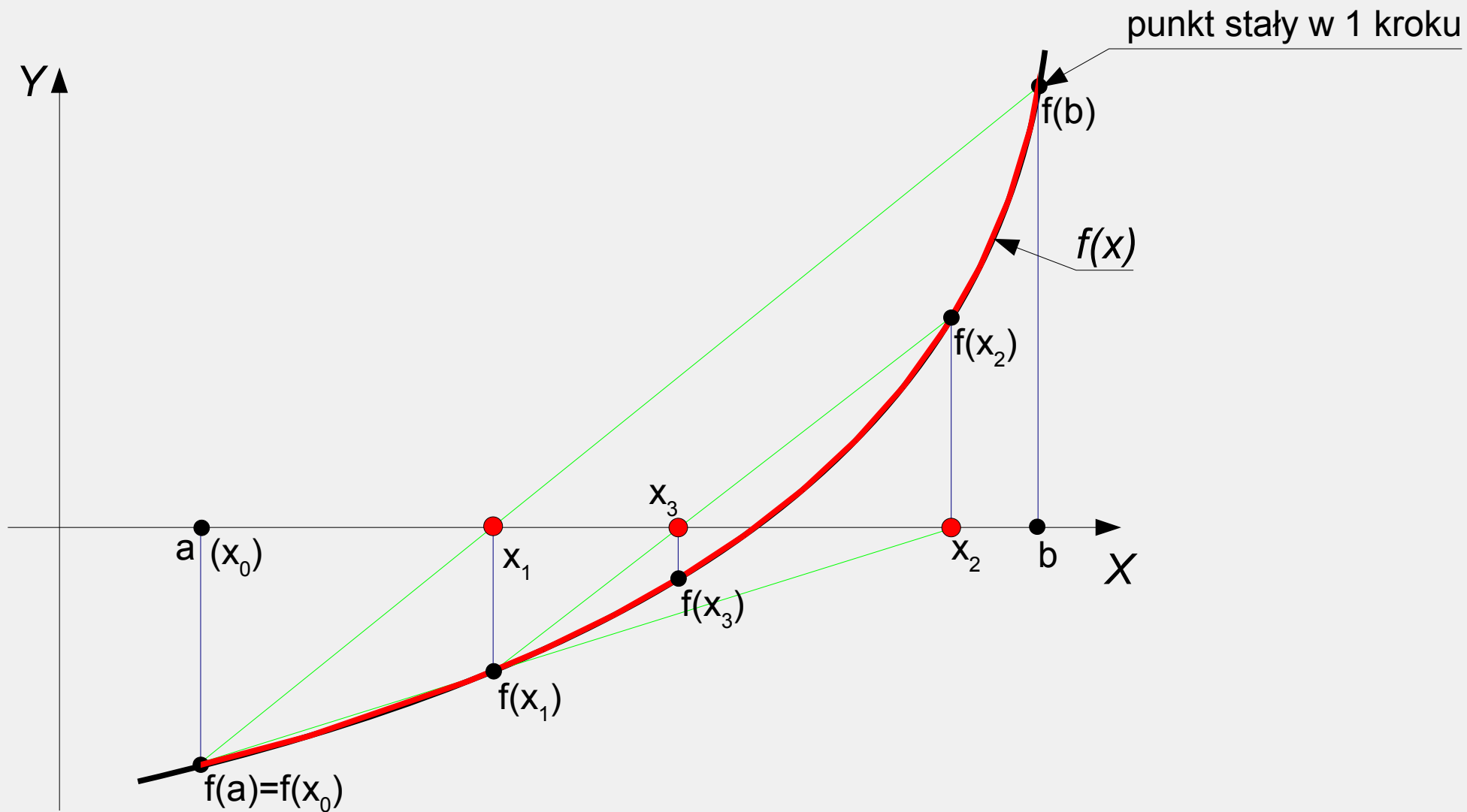
Równania nieliniowe – metoda regula falsi



Założenia:

- w przedziale $[a,b]$ równanie ma dokładnie jeden pierwiastek pojedynczy,
- $f(a)f(b) < 0$
- $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ jest funkcją klasy C^2 ,
- pierwsza i druga pochodna mają stały znak na przedziale $[a,b]$,

Równania nieliniowe – metoda siecznych



Pierwszy krok obliczamy na podstawie metody regula falsi.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot (x_{k-1} - x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

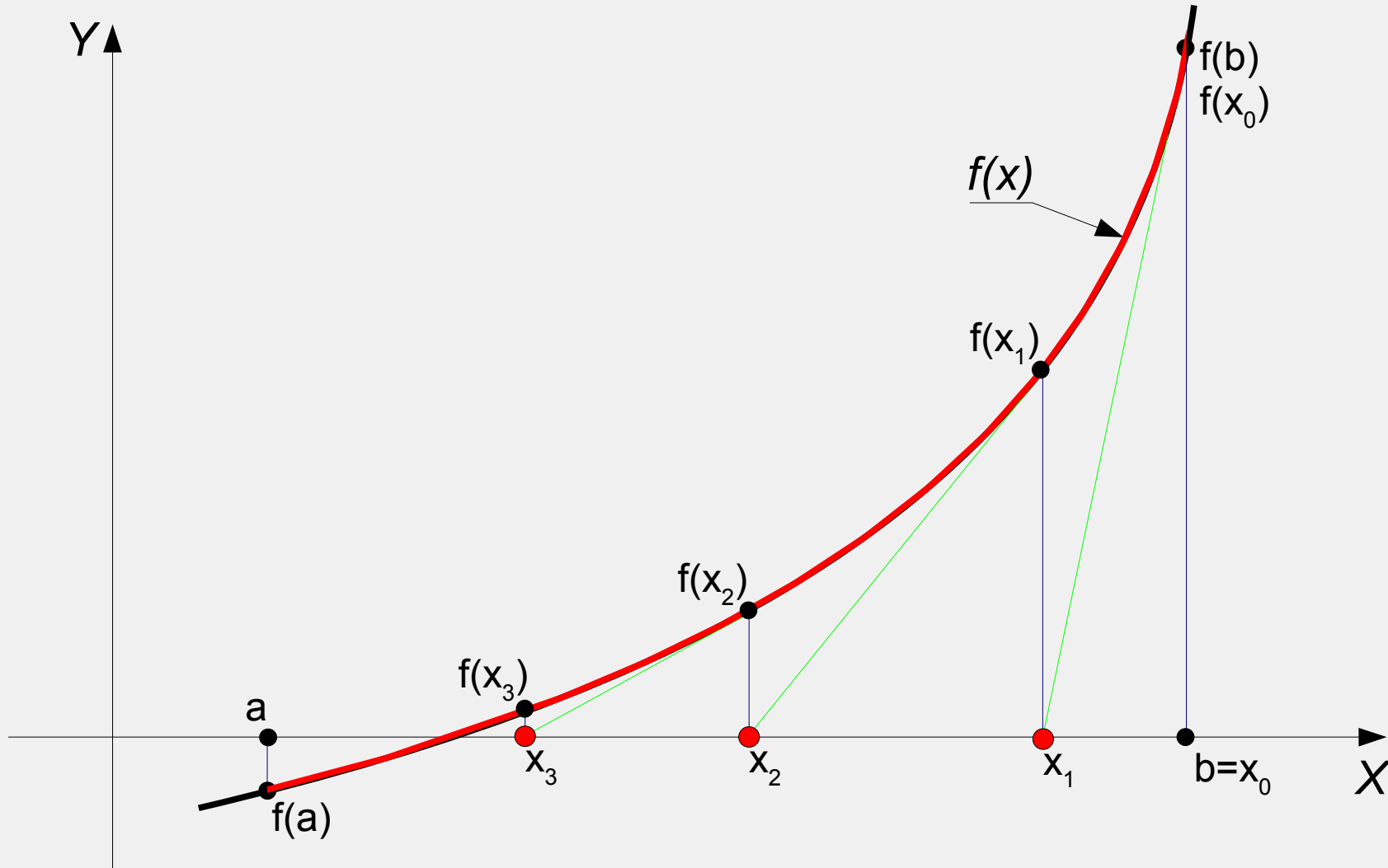
Ciąg $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ jest rosnący i ograniczony, a więc jest zbieżny. Jego granicą jest szukany pierwiastek.

- zbieżność nadliniowa

Założenia:

- w przedziale $[a,b]$ równanie ma dokładnie jeden pierwiastek pojedynczy,
- $f(a)f(b) < 0$
- $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ jest funkcją klasy C^2 ,
- pierwsza pochodna różna od zera na przedziale $[a,b]$,
- druga pochodna ma stały znak na przedziale $[a,b]$

Równania nieliniowe – metoda stycznych



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

x_0 – punkt, w którym $f(x)$ i $f''(x)$ mają ten sam znak.

- zbieżność kwadratowa

Twierdzenie

Jeśli f należy do $C^2(R)$, jest rosnąca, wypukła i ma zero, to jest ono jedyne, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego punktu początkowego.

Twierdzenie

Niech r będzie zerem pojedynczym funkcji f i niech jej druga pochodna f'' będzie ciągła. Wtedy istnieje takie otoczenie punktu r i taka stała C , że jeśli metoda Newtona startuje z tego otoczenia, to kolejne punkty są coraz bliższe r i takie, że

$$|x_{k+1} - r| \leq |C(x_k - r)^2|, \quad k \geq 0$$

Przykład

Znajdź wzór na obliczanie pierwiastka kwadratowego z dowolnej dodatniej liczby c .

$$x = \sqrt{c} \rightarrow x^2 = c \rightarrow x^2 - c = 0$$

$$f(x) = x^2 - c, \quad f'(x) = 2 \cdot x$$

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{c}{x_k} \right)$$

- wzór Herona, greckiego inżyniera i architekta, żył między 100 rokiem p.n.e i 100 rokiem n.e

Ciąg Sturma

$$f_0(x) \equiv f(x)$$

$$f_1(x) = f'(x)$$

$f_2(x)$ reszta z dzielenia $f_0(x)$ przez $f_1(x)$ wzięta ze znakiem przeciwnym

$f_3(x)$ reszta z dzielenia $f_1(x)$ przez $f_2(x)$ wzięta ze znakiem przeciwnym

.....

$$f_{p+1}(x) \equiv 0$$

$f_p(x)$ – ostatnia reszta z dzielenia różna od zera,

Twierdzenie Sturma

Jeżeli ciąg $f_i(x)$ jest ciągiem Sturma na przedziale $[a,b]$ i $f_0(x)f_0(b) \neq 0$, to liczba różnych zer rzeczywistych wielomianu $f_0(x)$ leżących w tym przedziale jest równa $N(a)-N(b)$.

$N(x_0)$ – liczba zmian znaku w ciągu Sturma, w punkcie $x=x_0$, w którym opuszczamy zera.

Inne twierdzenia o istnieniu pierwiastków rzeczywistych

- twierdzenie Fouriera,
- twierdzenie Laguerr'a,
- reguła Kartezjusza.

Przykład - twierdzenie Sturma

Wyznaczyć w przedziale $<0,2>$ liczbę pierwiastków podanego równania.

$$x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$$

Obliczamy funkcje Sturma:

$$P(x) = P_0(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8$$

$$P'(x) = P_1(x) = 4x^3 - 10x + 8$$

$$P_2(x) = 5x^2 - 12x + 16$$

$$P_3(x) = -3x + 284$$

$$P_4(x) = -1$$

Podstawiamy $x=0$ i otrzymujemy ciąg:

$$-8, +8, +16, +284, -1$$

Podstawiamy $x=2$ i otrzymujemy ciąg:

$$+4, +20, +12, +278, -1$$

Liczba zmian znaku: $A=2$, $B=1$

Liczba pierwiastków = $A-B = 1$

Deflacja

- obniżanie stopnia wielomianu,
- zmniejszenie liczby operacji arytmetycznych,
- nie wyznaczamy ponownie tego samego pierwiastka (chyba, że jest wielokrotny)

Zalecenia

- pierwiastki wyznacza się w kolejności rosnących modułów,
- każdy pierwiastek wyznacza się z graniczną dokładnością.