W. KRYSICKI • L. WŁODARSKI

ANALIZA MATEMATYCZNA W ZADANIACH

część II

ISBN 83-01-02440-2

ANALIZA MATEMATYCZNA
W ZADANIACH

WŁODZIMIERZ KRYSICKI, LECH WŁODARSKI

ANALIZA MATEMATYCZNA W ZADANIACH

CZĘŚĆ DRUGA

Wydanie XXV

WARSZAWA 2000
WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Projekt okładki

Krzysztof Racinowski

© Copyright by
Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1974

© Copyright by
Wydawnictwo Naukowe PWN
Warszawa 1994

Copyright © by
Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 1998

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
ul. Miodowa 10, 00-251 Warszawa
Tel.: 69 54 321, e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.com.pl

ISBN 83-01-02440-2

PRZEDMOWA DO WYDANIA PIERWSZEGO

Druga część „Analizy matematycznej w zadaniach" opracowana została na tych samych zasadach co i część pierwsza. Dla uchronienia więc Czytelnika przed mechanicznym rozwiązywaniem zadań, na początku każdego rozdziału zostały podane potrzebne definicje i twierdzenia. W ten sposób Czytelnik przy rozwiązywaniu zadań powtarza i teorię. Dzięki temu również unika się nieporozumień mogących wyniknąć z faktu podawania przez różnych autorów twierdzeń przy różnych założeniach, a czasem nawet przy różnej symbolice.

Głównym celem niniejszego podręcznika jest nauczenie Czytelnika rozwiązywania zadań z analizy matematycznej. Z tego powodu każdy rozdział składa się z zadań całkowicie rozwiązanych i z zadań do samodzielnego rozwiązania. Dla umożliwienia Czytelnikowi kontrolowania, czy rozwiązuje zadania we właściwy sposób, na końcu podręcznika są podane odpowiedzi do zadań nie rozwiązanych, a nadto przy trudniejszych zadaniach wskazówki pomocne do ich rozwiązania.

Drugim celem niniejszej książki jest ilustracja teorii analizy matematycznej przykładami, ale oczywiście nie zastąpienie tej teorii. Opanowanie bowiem teorii analizy matematycznej jest możliwe jedynie przez dokładne poznanie twierdzeń wraz z dowodami, które Czytelnik znajdzie w odpowiednich podręcznikach teorii analizy matematycznej.

Autorzy

PRZEDMOWA DO WYDANIA DZIESIĄTEGO

Niniejsze wydanie ukazuje się w znacznie zmienionej postaci, dzięki przede wszystkim znacznemu rozszerzeniu materiału w nim zawartego, a mianowicie włączone zostały zupełnie nowe rozdziały: Funkcje zmiennej zespolonej, Transformacja Laplace'a i jej zastosowania, Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych, Rachunek wariacyjny, Rachunek prawdopodobieństwa, a także szereg dawnych rozdziałów zostało znacznie rozbudowanych; są to rozdziały: Funkcje dwóch i więcej zmiennych, Funkcje uwikłane, Całki krzywoliniowe i powierzchniowe, Równania różniczkowe wyższych rzędów. Natomiast rozdziały poświęcone całce funkcji jednej zmiennej zostały przeniesione do części I.

Przy dokonywaniu wszystkich zmian kierowaliśmy się nowymi programami matematyki na wydziałach uczelni technicznych o rozszerzonym programie zarówno na studiach stacjonarnych jak wieczorowych i zaocznych. W części teoretycznej rozbudowane zostały te fragmenty, które, jak nam się wydaje, sprawiają szczególne trudności przy przygotowywaniu się studentów do egzaminów. We wszystkich nowych rozdziałach są zadania z pełnymi rozwiązaniami oraz do samodzielnego rozwiązania, a w dawnych rozdziałach liczba zadań została znacznie powiększona.

Chcielibyśmy przy tej okazji serdecznie podziękować tym wszystkim, którzy w czasie opracowywania niniejszego wydania przekazali swoje cenne uwagi, a w szczególności prof. dr Z. Zahorskiemu z Instytutu Matematyki Politechniki Gliwickiej, doc. dr hab. W. Waliszewskiemu z Instytutu Matematycznego PAN, dr W. Dyczce z Instytutu Matematyki Politechniki Łódzkiej.

Będziemy również wdzięczni uważnym Czytelnikom za przesyłanie swoich uwag odnoszących się bądź do treści naszego podręcznika, bądź zawierających propozycje zmian czy uzupełnień. Uwagi takie prosimy przesyłać na adres: W. Krysicki, Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej, Łódź, ul. Żwirki 36, lub L. Włodarski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, ul. Nowopołudniowa 22.

Autorzy

Łódź, listopad 1972 r.

Rozdział I

FUNKCJE DWU LUB WIĘCEJ ZMIENNYCH

§ 1.1. PRZESTRZEŃ EUKLIDESOWA

W § 4.1 części pierwszej podaliśmy definicję funkcji jednej zmiennej. Chcąc określić funkcję p zmiennych dogodnie jest wprowadzić pojęcie przestrzeni euklidesowej p-wymiarowej.

Przestrzenią euklidesową p-wymiarową (p – liczba naturalna) nazywamy zbiór wszystkich ciągów p-wyrazowych $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, których elementy a_i są liczbami rzeczywistymi. Elementy a_i tych ciągów, dla odróżnienia od elementów przestrzeni euklidesowej, będziemy nazywali *współrzędnymi*, a same ciągi – *elementami*, *wektorami* albo *punktami* przestrzeni euklidesowej p-wymiarowej.

Elementy przestrzeni euklidesowej będziemy oznaczali literami półgrubymi, a więc np. $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, a całą przestrzeń euklidesową p-wymiarową – symbolem $\mathscr{R}^p$ [1].

Zauważmy, że przestrzeń euklidesową dwuwymiarową możemy interpretować geometrycznie jako płaszczyznę, elementy tej przestrzeni $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2)$ jako punkty płaszczyzny, dla których a_1 oznacza odciętą, a a_2 rzędną punktu $\boldsymbol{a}$. Przestrzeń euklidesowa trójwymiarowa jest znaną nam z geometrii przestrzenią, w której liczby a_1, a_2 i a_3 są współrzędnymi punktu $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$.

Dwa elementy $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ i $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ uważamy za *równe*, co notujemy w zwykły sposób $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, jeżeli mają wszystkie współrzędne odpowiednio równe, to znaczy jeżeli $a_i=b_i$ dla $i=1, 2, \ldots, p$.

Zapis $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$ oznacza, że warunek równości nie jest spełniony, to znaczy, że dla co najmniej jednego i jest $a_i\neq b_i$.

W przestrzeni $\mathscr{R}^p$ określamy odległość $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ dwóch punktów $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ w sposób następujący:

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\sqrt{\sum_{i=1}^{p}(a_i-b_i)^2}. \tag{1.1.1}$$

Widać, że w przypadku $p=2$ wzór (1.1.1) określa odległość między punktami płaszczyzny, a w przypadku $p=3$ między punktami przestrzeni trójwymiarowej.

Jak wynika z definicji (1.1.1), odległość dwóch punktów w przestrzeni euklidesowej jest zawsze liczbą rzeczywistą, nieujemną. Ponadto odległość określona powyżej spełnia

---

[1] Przestrzeń euklidesową jednowymiarową oznacza się po prostu symbolem $\mathscr{R}$.

następujące warunki:

$$(d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0)\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}), \tag{1.1.2}$$

$$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=d(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}), \tag{1.1.3}$$

$$d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+d(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\geqslant d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}). \tag{1.1.4}$$

Warunek (1.1.2) mówi nam, że odległość dwóch punktów w przestrzeni euklidesowej równa się zeru wtedy i tylko wtedy, gdy te punkty pokrywają się, czyli gdy ich odpowiednie współrzędne są takie same. Warunek (1.1 3) określa odległość jako operację symetryczną. Warunek (1.1.4) nazywamy *prawem trójkąta*; warunek ten na płaszczyźnie odpowiada twierdzeniu, że suma dwóch boków w trójkącie jest zawsze nie mniejsza od boku trzeciego.

Ze względu na to, że odległość (1.1.1) określona w przestrzeni euklidesowej $\mathscr{R}^p$ spełnia warunki (1.1.2 - 4), zbiór $\mathscr{R}^p$ nazywamy *przestrzenią metryczną*.

W przestrzeni euklidesowej używa się również często pojęcia normy. Przez *normę* $\|\boldsymbol{a}\|$ elementu $\boldsymbol{a}$ rozumiemy liczbę

$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{p} a_i^2}, \tag{1.1.5}$$

to znaczy norma elementu $\boldsymbol{a}$ jest to odległość tego elementu od elementu zerowego $\boldsymbol{o}=(0, 0, \ldots, 0)$. Norma elementu zbioru $\mathscr{R}^p$ ma podobne własności jak moduł liczby zespolonej (por. I, § 8.1) (1).

Przestrzeń euklidesowa $\mathscr{R}^p$ jest również przestrzenią liniową (por. I, § 9.7) przy następujących działaniach określonych wzorami:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_p)+(b_1, b_2, \ldots, b_p)=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_p+b_p), \tag{1.1.6}$$

$$\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_p)=(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_p). \tag{1.1.7}$$

Zadania

1.1. Znaleźć normę elementu $(3, 4, 12)\in\mathscr{R}^3$. Zbadać, co geometrycznie oznacza wartość normy?

1.2. Wykazać, że norma określona wzorem (1.1.5) w przestrzeni euklidesowej $\mathscr{R}^p$ ma następujące własności:

(a) $(\|\boldsymbol{a}\|=0)\Leftrightarrow$(dla każdego $i=1, 2, \ldots, p$: $a_i=0$, czyli $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$),

(b) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|\leqslant\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$,

(c) $\|\lambda\boldsymbol{a}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{a}\|$.

(1) Zapis ten oznacza: część I, paragraf 8.1.

§ 1.2. ZBIORY W PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ

Kulą (*otwartą*) o *środku* a i *promieniu* r ($r>0$) będziemy nazywali zbiór tych wszystkich elementów x przestrzeni $\mathscr{R}^p$, dla których $d(x,a)<r$. Kulę taką będziemy oznaczali symbolem $K(a,r)$. Symbolicznie

$$K(a,r)=\{x\in\mathscr{R}^p : d(x,a)<r\}. \tag{1.2.1}$$

Otoczeniem $O(a,r)$ *punktu* a przestrzeni $\mathscr{R}^p$ nazywamy każdą kulę o środku a i dowolnym promieniu r. Symbolicznie

$$O(a,r)=\{x\in\mathscr{R}^p : d(x,a)<r\}. \tag{1.2.2}$$

Sąsiedztwem $S(a,r)$ *punktu* a nazywamy zbiór elementów otoczenia $O(a,r)$ bez środka a, przy czym r jest dowolnie dobraną liczbą dodatnią. Symbolicznie

$$S(a,r)=\{x\in\mathscr{R}^p : 0<d(x,a)<r\}. \tag{1.2.3}$$

Średnicę δ *zbioru* A definiujemy następująco:

$$\delta=\sup_{a,b} d(a,b), \qquad a,b\in A. \tag{1.2.4}$$

Mówimy, że punkt a zbioru $A\subset\mathscr{R}^p$ jest *punktem wewnętrznym zbioru* A, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu a, które jest zawarte w zbiorze A.

Zbiór nazywamy *zbiorem otwartym*, jeżeli każdy punkt a tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym, np. kula (otwarta) jest zbiorem otwartym. W szczególności cała przestrzeń jest zbiorem otwartym. Zbiór pusty (nie zawierający żadnych elementów) uważamy z definicji również za zbiór otwarty.

Dopełnieniem A' [1] *zbioru* A nazywamy zbiór tych wszystkich punktów przestrzeni $\mathscr{R}^p$, które nie należą do zbioru A; symbolicznie

$$A'=\{b\in\mathscr{R}^p : b\notin A\}. \tag{1.2.5}$$

Za dopełnienie zbioru pustego uważamy całą przestrzeń i odwrotnie.

Punkt a (należący lub nie należący do zbioru A) nazywamy *punktem skupienia zbioru* A, jeżeli każde otoczenie punktu a zawiera co najmniej jeden element zbioru A różny od a.

Zbiór nazywamy *zbiorem domkniętym*, jeżeli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. W szczególności, cała przestrzeń jest zbiorem domkniętym. Zbiór pusty uważamy z definicji również za zbiór domknięty.

Można wykazać bez trudności, że *dopełnienie zbioru otwartego jest zbiorem domkniętym, a dopełnienie zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym.*

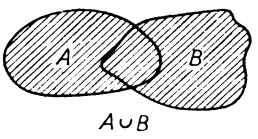
Przypominamy (por. I, § 1.2), że *sumą mnogościową* $A\cup B$ zbiorów A, B nazywamy zbiór składający się ze wszystkich elementów należących bądź do zbioru A, bądź do zbioru

---

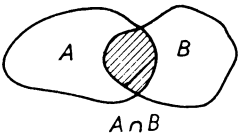
[1] Oznacza się też CA lub A^c.

B (rys. 1.1), a *przekrojem* (*iloczynem mnogościowym*) $A \cap B$ zbiorów A, B nazywamy zbiór składający się z tych wszystkich elementów przestrzeni $\mathscr{R}^p$, które należą zarówno do zbioru A jak i do zbioru B (rys. 1.2).

Domknięciem $\bar{A}$ *zbioru* A nazywamy zbiór będący sumą mnogościową zbioru A oraz zbioru wszystkich punktów skupienia zbioru A, czyli domknięcie $\bar{A}$ składa się z elementów zbioru A oraz z jego punktów skupienia (rys. 1.3).



Rys. 1.1



Rys. 1.2

Rys. 1.3

Brzegiem zbioru A nazywamy te wszystkie punkty przestrzeni $\mathscr{R}^p$ (należące do A lub nie należące do zbioru A zwane *punktami brzegowymi*), w których każdym otoczeniu znajduje się zarówno punkt A jak i punkt jego dopełnienia A'. Łatwo wykazać, że *żaden punkt brzegowy zbioru otwartego do niego nie należy*, natomiast *każdy punkt brzegowy zbioru domkniętego należy do niego.*

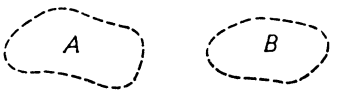
Są zbiory, których część brzegu do nich należy, a część brzegu nie należy, np. w przestrzeni $\mathscr{R}$, czyli na prostej, zbiór $\langle 0, 1)$ zawiera punkt brzegowy 0, a nie zawiera punktu brzegowego 1.

Suma mnogościowa zbioru i jego brzegu jest zawsze zbiorem domkniętym.

Dwa zbiory nazywamy *zbiorami rozłącznymi*, jeżeli nie mają żadnych wspólnych elementów.

Obszarem nazywamy zbiór otwarty, który nie da się przedstawić jako suma mnogościowa dwóch zbiorów otwartych, niepustych i rozłącznych (np. na rys. 1.4 zbiory A i B są obszarami).

Obszarem domkniętym nazywamy sumę mnogościową obszaru i jego brzegu.



Rys. 1.4

Rys. 1.5

Suma mnogościowa dwóch obszarów nie jest na ogół obszarem (chociaż zawsze jest zbiorem otwartym, patrz np. rys. 1.4, zbiór $A \cup B$ nie jest obszarem). Natomiast suma mnogościowa dwóch obszarów mających co najmniej jeden punkt wspólny jest zawsze obszarem (rys. 1.5, zbiór $C \cup D$ jest obszarem). Obszary domknięte analogicznej własności nie mają.

Zbiór nazywamy *zbiorem ograniczonym*, jeżeli jest zawarty w pewnej kuli. W szczególności każde otoczenie, każde sąsiedztwo i każda kula są zbiorami ograniczonymi.

Sumą algebraiczną $A+B$ podzbiorów A i B przestrzeni euklidesowej $\mathscr{R}^p$ nazywamy zbiór wszystkich elementów postaci $a+b$, gdzie a należy do zbioru A, b zaś należy do zbioru

B; symbolicznie

$$A+B=\{a+b:\ a\in A\wedge b\in B\}. \tag{1.2.6}$$

ZADANIE 1.3. W przestrzeni $\mathscr{R}$ (liczb rzeczywistych) dane są zbiory $A=\{1,4\}$, $B=\{2,4,7\}$. Znaleźć sumę mnogościową $A\cup B$ i sumę algebraiczną $A+B$ tych zbiorów.

§ 1.3. ZBIEŻNOŚĆ W PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ

Mówimy, że *ciąg punktów* $a_n=(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_p^{(n)})$ przestrzeni $\mathscr{R}^p$ jest *zbieżny do punktu* $a_0=(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_p^{(0)})$ tejże przestrzeni, jeżeli odległość $d(a_n, a_0)$ określona wzorem (1.1.1) dąży do zera, gdy $n\to\infty$. Zbieżność elementów przestrzeni $\mathscr{R}^p$ zapisujemy tak samo jak zbieżność ciągów liczbowych (por. I, § 2.1), tzn.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a_0 \quad \text{lub} \quad a_n\to a_0, \text{ gdy } n\to\infty. \tag{1.3.1}$$

Można bez trudności wykazać, że następujący warunek jest dostateczny i konieczny na to, aby zachodziła zbieżność (1.3.1):

$$\lim_{n\to\infty} a_i^{(n)}=a_i^{(0)} \quad \text{dla} \quad i=1,2,\ldots,p, \tag{1.3.2}$$

to znaczy *ciąg elementów przestrzeni euklidesowej jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie współrzędne określające te elementy są ciągami liczbowymi zbieżnymi.*

Warunek (1.3.1) dostateczny i konieczny na zbieżność można też wyrazić następująco:

(1.3.3) *Dla każdego* $\varepsilon>0$ *istnieje takie* n_0, *że dla każdego* $n\geqslant n_0$ *i dla każdego* $i=1,2,\ldots,p$ *zachodzi nierówność* $|a_i^{(n)}-a_i^{(0)}|<\varepsilon$.

§ 1.4. FUNKCJA, GRANICA FUNKCJI, CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI W PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ

Mówimy, że w zbiorze A (zwanym *polem* lub *dziedziną funkcji*) zawartym w przestrzeni euklidesowej $\mathscr{R}^p$ została określona pewna *funkcja* f, jeżeli każdemu elementowi x ze zbioru A jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba u.

Zbiór wszystkich liczb u nazywamy *zakresem* lub *przeciwdziedziną funkcji* f. Przyporządkowanie to zapisujemy w formie takiej samej jak w przypadku funkcji zmiennej liczbowej:

$$u=f(x). \tag{1.4.1}$$

W związku z tym, że $x=(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ jest elementem $\mathscr{R}^p$, używamy również zapisu równoważnego

$$u=f(x_1, x_2, \ldots, x_p). \tag{1.4.2}$$

W przypadku $p=3$, używamy na ogół liter x, y, z jako współrzędnych argumentu funkcji f i wobec tego mamy zapis $u=f(x, y, z)$, a w przypadku $p=2$, zapis $u=f(x, y)$.

Funkcję f określoną w zbiorze A nazywamy *ograniczoną w tym zbiorze*, jeżeli istnieje taka liczba $M>0$, że dla każdego elementu a zbioru A zachodzi nierówność $|f(a)|\leqslant M$.

Mówimy, że funkcja f, określona w pewnym sąsiedztwie $S(a_0, r)$ punktu a_0, ma w tym *punkcie granicę* równą liczbie h, jeżeli dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje takie sąsiedztwo $S(a_0, r_\varepsilon)$ punktu a_0, że dla każdego elementu x należącego do tego sąsiedztwa zachodzi nierówność

$$|f(x)-h|<\varepsilon. \tag{1.4.3}$$

Zapisujemy to

$$\lim_{x\to a_0} f(x)=h \quad \text{lub} \quad f(x)\to h, \text{ gdy } x\to a_0.$$

Podana wyżej definicja granicy funkcji jest *definicją granicy w sensie Cauchy'ego*. Równoważna jej *definicja granicy w sensie Heinego* jest następująca:

Mówimy, że funkcja f określona w pewnym sąsiedztwie $S(a_0, r)$ punktu a_0 ma w tym *punkcie granicę* h, jeżeli dla każdego ciągu a_n takiego, że $a_n\neq a_0$ (dla każdego n) oraz $a_n\to a_0$ zachodzi $f(a_n)\to h$.

Mówimy, że *funkcja f określona w pewnym otoczeniu $O(a_0, r)$ punktu a_0 jest ciągła w punkcie a_0*, jeżeli ma w tym punkcie granicę równą wartości funkcji w tym punkcie, tzn.

$$\lim_{x\to a_0} f(x)=f(a_0). \tag{1.4.4}$$

Funkcja $f(x)$ jest *ciągła w pewnym zbiorze A*, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie zbioru A. Mówimy wówczas, że *funkcja $f(x)$ jest klasy C w zbiorze A*.

Zauważmy, że przy określaniu granic w pewnym punkcie mówimy o sąsiedztwie tego punktu, a nie o jego otoczeniu. Wynika to z tego, że na granicę w punkcie a_0 nie tylko nie wpływa wartość funkcji w tym punkcie, ale nawet to, czy funkcja jest w tym punkcie określona.

Inna sytuacja jest w przypadku ciągłości funkcji. Można wykazać, że podany poprzednio warunek ciągłości funkcji w punkcie a_0 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

(1.4.5) *Dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje takie otoczenie $O(a_0, r)$ punktu a_0, że dla każdego punktu x z tego otoczenia jest spełniona relacja $|f(x)-f(a_0)|<\varepsilon$.*

Struktura zbioru, w którym funkcja jest ciągła, ma wpływ na własności funkcji w tym zbiorze. Zachodzi następujące twierdzenie:

(1.4.6) *Funkcja f określona i ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym, zawartym w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{R}^p$, ma następujące własności:*

a) *jest ograniczona,*

b) *przyjmuje co najmniej raz w tym zbiorze wartość największą i wartość najmniejszą,*

c) *przyjmuje co najmniej raz w tym zbiorze każdą wartość zawartą między tymi wartościami ekstremalnymi,*

d) *jest jednostajnie ciągła, to znaczy dla każdego* $\varepsilon>0$ *istnieje takie* $\delta>0$, *że jeżeli* x *i* x' *należą do tego zbioru oraz* $d(x,x')<\delta$, *to* $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$, *czyli wartości funkcji różnią się dowolnie mało dla każdych dwóch punktów dostatecznie bliskich.*

Jeżeli ciągła funkcja f *jest dodatnia (ujemna) w pewnym punkcie* a_0 *obszaru, to istnieje takie otoczenie punktu* a_0, *że w każdym punkcie tego otoczenia jest ona dodatnia (ujemna).*

Funkcją liniową p *zmiennych* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ nazywamy każdą funkcję postaci

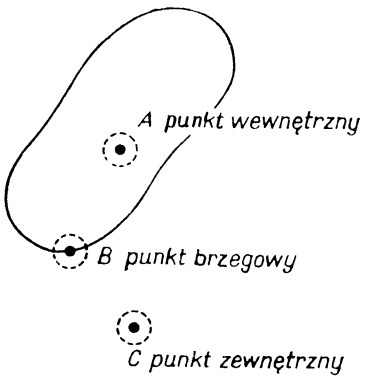
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_p x_p, \tag{1.47}$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_p$ są dowolnymi liczbami stałymi.

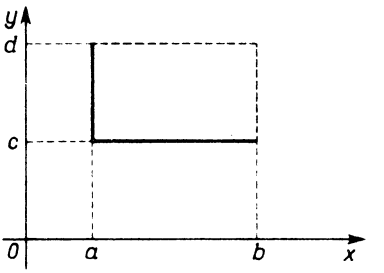
§ 1.5. ZBIORY PŁASKIE

Między elementami przestrzeni euklidesowej $\mathscr{R}^2$ a punktami płaszczyzny istnieje przyporządkowanie wzajemnie jednoznaczne. Płaszczyznę możemy więc traktować jako model geometryczny przestrzeni $\mathscr{R}^2$, a zbiory punktów na płaszczyźnie jako obrazy podzbiorów przestrzeni $\mathscr{R}^2$. Z tego powodu podzbiory przestrzeni $\mathscr{R}^2$ nazywamy *zbiorami płaskimi.*

Kulą w przestrzeni $\mathscr{R}^2$ jest koło (otwarte), *otoczeniem punktu* (a_0, b_0) każde koło, którego ten punkt jest środkiem, a *sąsiedztwem punktu* (a_0, b_0) koło o środku w tym punkcie (i dowolnym promieniu) bez samego punktu (a_0, b_0). Każdy więc punkt ma nieskończenie wiele otoczeń.



Rys. 1.6

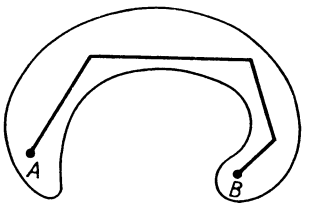


Rys. 1.7

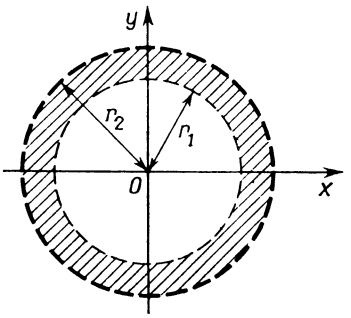
Punkt A zbioru Z nazywamy *punktem wewnętrznym* zbioru Z, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu A, które jest zawarte w zbiorze Z. Punkt C nazywamy *punktem zewnętrznym* (rys. 1.6) względem zbioru Z, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu C, które nie zawiera żadnego punktu zbioru Z. Punkt B nazywamy *punktem brzegowym* zbioru Z, jeżeli w każdym otoczeniu punktu B znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru Z i co najmniej jeden punkt nie należący do zbioru Z. *Wnętrzem zbioru* Z nazywamy zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru Z. *Brzegiem zbioru* Z nazywamy zbiór wszystkich jego

punktów brzegowych. Brzeg zbioru Z może być zawarty w zbiorze Z, np. dla koła domkniętego; brzeg zbioru Z może nie zawierać żadnych punktów zbioru Z, np. dla koła otwartego. Również brzeg zbioru Z może zawierać punkty należące do Z i nie należące do Z, np. zbiór punktów M dany nierównościami dla współrzędnych $a \leqslant x < b$, $c \leqslant y < d$; brzeg tego zbioru jest obwodem prostokąta (rys. 1.7), którego tylko dwa boki (bez górnego i prawego punktu końcowego) są częścią określonego zbioru.

Weźmy teraz pod uwagę zbiór X punktów $M(x, y)$ prostokąta K: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, przy czym współrzędne punktu M są liczbami wymiernymi. Brzeg zbioru X jest całym prostokątem K, a więc zawiera zbiór X, a oprócz niego także punkty nie należące do X.



Rys. 1.8



Rys. 1.9

Można udowodnić, że *zbiór płaski jest obszarem wtedy i tylko wtedy, gdy jest otwarty i gdy każde jego dwa punkty dadzą się połączyć linią łamaną zawartą w tym zbiorze* (por. rys. 1.8).

PRZYKŁAD. Obszarem jest zbiór wszystkich punktów $M(x, y)$, których współrzędne spełniają nierówność

$$r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2, \quad \text{gdzie} \quad 0 < r_1 < r_2. \tag{1.5.1}$$

Jest to tzw. *pierścień* (otwarty) (rys. 1.9). Brzegiem tego obszaru są dwa okręgi współśrodkowe, o środkach w początku układu współrzędnych, a których promienie równają się odpowiednio r_1 i r_2. Jeżeli okręgi te dołączymy do pierścienia, czyli weźmiemy zbiór tych wszystkich punktów $M(x, y)$, dla których jest spełniona nierówność

$$r_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant r_2^2, \tag{1.5.2}$$

to otrzymamy obszar domknięty. Oba zbiory (1.5.1) i (1.5.2) są ograniczone.

Przykładem obszaru nieograniczonego jest półpłaszczyzna określona nierównością $x > 0$, a przykładem obszaru nieograniczonego domkniętego półpłaszczyzna $y \geqslant 0$.

ZADANIE 1.4. Wymienić, jakie znane własności mają zbiory wszystkich takich punktów $M(x, y)$, których współrzędne x i y spełniają odpowiednio następujące nierówności:

a) $a < x < b$, $c < y < d$, gdzie $a < b$, $c < d$,

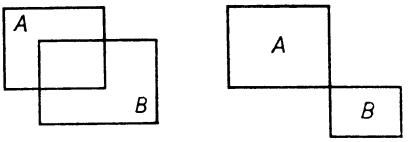
b) $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, gdzie $a > 0$, $b > 0$,

c) $0 < \sin x < \frac{1}{2}$,

d) x i y wymierne pomiędzy 0 a 1.

Suma dwóch obszarów mających punkt wspólny jest znowu obszarem. Suma dwóch obszarów domkniętych mających wspólny punkt wewnętrzny jest znowu obszarem domkniętym; jeżeli natomiast wspólny jest punkt brzegowy, to suma, aczkolwiek jest zbiorem domkniętym, nie musi być obszarem domkniętym (rys. 1.10).

Obszarem regularnym nazywamy obszar ograniczony, którego brzeg daje się podzielić na skończoną ilość łuków o równaniach $y=f(x)$ lub $x=g(y)$ w przedziałach skończonych. Niektóre z tych łuków mogą być zastąpione pojedynczymi punktami. Przykładami obsza-



Rys. 1.10

Rys. 1.11

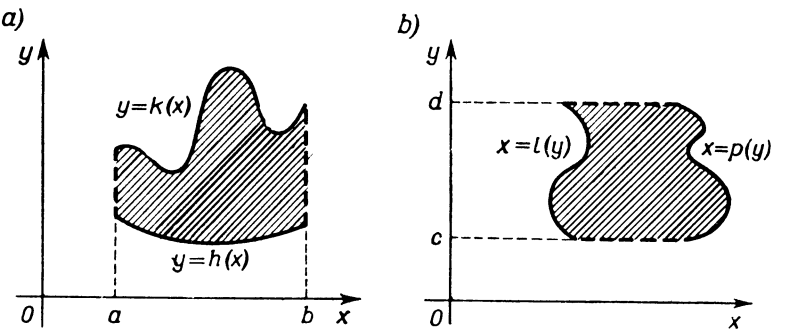
rów regularnych mogą być: wnętrze elipsy, koło otwarte bez środka, koło otwarte bez jednego promienia, pierścień kołowy (rys. 1.9) oraz obszar przedstawiony na rysunku 1.11.

Suma dwóch obszarów regularnych mających wspólny punkt nie musi być obszarem regularnym.

Obszarem normalnym względem osi Ox nazywamy zbiór wszystkich punktów $M(x, y)$, których współrzędne spełniają (jednocześnie) nierówności

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad h(x) \leqslant y \leqslant k(x), \tag{1.5.3}$$

przy czym funkcje $h(x)$ i $k(x)$ są ciągłe w przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz spełniają nierówność $h(x)<k(x)$ w przedziale (a, b) (rys. 1.12a). Każda prosta $x=\xi$, gdzie $a<\xi<b$, ma z brzegiem takiego obszaru dokładnie dwa punkty wspólne.



Rys. 1.12

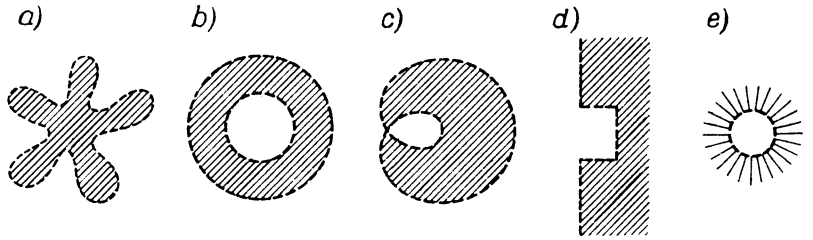
Obszarem normalnym względem osi Oy nazywamy zbiór wszystkich punktów $M(x, y)$, których współrzędne spełniają (jednocześnie) nierówności

$$l(y) \leqslant x \leqslant p(y), \quad c \leqslant y \leqslant d, \tag{1.5.4}$$

gdzie $l(y)$ i $p(y)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale $\langle c, d\rangle$ oraz $l(y)<p(y)$ w przedziale (c, d) (rys. 1.12b).

Jak wynika z powyższych definicji, obszar normalny jest domkniętym obszarem regularnym. Suma dwóch obszarów normalnych, mających wspólne punkty wewnętrzne, nie musi być obszarem normalnym.

PRZYKŁAD Obszar ograniczony elipsą jest normalny względem obu osi współrzędnych.



Rys. 1.13

Obszar D nazywamy *obszarem jednospójnym*, jeżeli każdy zbiór ograniczony, którego cały brzeg należy do obszaru D, jest zawarty w obszarze D. Obszary jednospójne mogą być ograniczone lub nieograniczone.

PRZYKŁAD. Na rysunkach 1.13a, 1.13c, 1.13d obszary są jednospójne, a na rysunkach 1.13b i 1.13e obszary nie są jednospójne.

§ 1.6. ZBIEŻNOŚĆ CIĄGÓW W PRZESTRZENI $\mathscr{R}^2$

Jak wiemy na podstawie (1.3.2), *ciąg* (a_n, b_n) *jest zbieżny w* $\mathscr{R}^2$ *do punktu* (a_0, b_0) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b_0. \tag{1.6.1}$$

ZADANIE 1.5. Zbadać, czy podane niżej ciągi są zbieżne, a jeśli tak, to podać, do jakiej granicy:

a) $\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right)$; b) $\left(\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}\sin n\right)$; c) $\left(2, \cos\frac{1}{n}\right)$; d) $\left(n, \frac{n-1}{2n}\right)$.

§ 1.7. FUNKCJE DWÓCH ZMIENNYCH

Funkcję $f(x, y)$ *dwóch zmiennych* określamy najczęściej za pomocą jednego lub kilku wzorów.

PRZYKŁAD 1. Funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad y \leqslant x, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}|x-y| & \text{dla} \quad y > x. \end{cases} \tag{1.7.1}$$

PRZYKŁAD 2. Funkcja $h(x, y)$ określona jest na całej płaszczyźnie (czyli w $\mathscr{R}^2$) następująco:

$$(1.7.2)\quad h(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{gdy } x \text{ i } y \text{ są wymierne,} \\ 0, & \text{gdy } x \text{ i } y \text{ są niewymierne,} \\ -1, & \text{gdy } x \text{ jest wymierne, a } y \text{ niewymierne, lub na odwrót.} \end{cases}$$

Jeżeli funkcję dwóch zmiennych określamy za pomocą jednego wzoru, np. $g(x, y)=y\sqrt{x^2-1}$, bez dodatkowych ograniczeń, to rozumiemy to w ten sposób, że funkcja ta jest określona w takim zbiorze liczb (polu funkcji), w którym ten wzór ma sens. W naszym przykładzie polem funkcji są dwie półpłaszczyzny określone nierównościami $x \leqslant -1$ lub $x \geqslant 1$.

Wykresem funkcji dwóch zmiennych $z=f(x, y)$ nazywamy zbiór wszystkich punktów (x, y, z) w przestrzeni trójwymiarowej $\mathscr{R}^3$, dla których $z=f(x, y)$. Na ogół więc wykresem funkcji dwóch zmiennych jest pewna *powierzchnia* w przestrzeni trójwymiarowej. Sporządzanie wykresu funkcji dwóch zmiennych jest często dosyć trudne.

ZADANIE 1.6. Znaleźć pole następujących funkcji i przedstawić je graficznie:

a) $z=\dfrac{1}{x-y}$; b) $z=\operatorname{ctg}(x-y)$;

c) $z=\sqrt{xy}$; d) $z=\sqrt{x}+\sqrt{y}$; e) $z=\sqrt{x^2-y^2}$.

§ 1.8. GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

Granicę funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ w punkcie (a, b) oznaczamy

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x,y) \quad \text{lub} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y).$$

W § 1.4 podaliśmy definicję granicy funkcji w sensie Cauchy'ego i sensie Heinego (przypominamy, że obie definicje granicy funkcji są równoważne) oraz definicję ciągłości funkcji.

Z definicji granicy w sensie Heinego wynika, że w przypadku $\mathscr{R}^2$:

Funkcja $f(x, y)$, określona w pewnym sąsiedztwie punktu (a, b), ma w tym *punkcie granicę* równą liczbie h wtedy i tylko wtedy, gdy

(1.8.1) Dla każdego ciągu punktów (x_n, y_n) z sąsiedztwa punktu (a, b) i takiego, że $x_n \to a$, $y_n \to b$, ciąg $f(x_n, y_n) \to h$.

Natomiast z definicji granicy w sensie Cauchy'ego wynika, że w przypadku $\mathscr{R}^2$:

Funkcja $f(x, y)$, określona w pewnym otoczeniu punktu (a, b), jest w tym *punkcie ciągła*, jeżeli dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje takie $\delta>0$, że dla każdego punktu (x, y) z tego otoczenia z zachodzenia nierówności $|x-a|<\delta$ oraz $|y-b|<\delta$ wynika, że $|f(x, y)-f(a, b)|<\varepsilon$.

Oczywiście warunek powyższy jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x,y)=f(a,b).$$

Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej zachodzą następujące twierdzenia:

(1.8.2) *Suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a, b) *jest funkcją ciągłą w punkcie* (a, b).

(1.8.3) *Iloczyn dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a, b) *jest funkcją ciągłą w punkcie* (a, b).

(1.8.4) *Iloraz dwóch funkcji ciągłych w punkcie* (a, b), *takich że dzielnik w tym punkcie jest różny od zera, jest funkcją ciągłą w punkcie* (a, b).

(1.8.5) *Jeżeli funkcja złożona* $F(g(x, y))$ *jest określona w pewnym otoczeniu punktu* (a, b), *funkcja* $g(x, y)$ *jest ciągła w punkcie* (a, b), *a funkcja* $F(u)$ *ciągła w punkcie* $u=g(a, b)$, *to funkcja złożona* $F(g(x, y))$ *jest ciągła w punkcie* (a, b).

Z twierdzeń (1.8.2) i (1.8.3) wynika, że

Wielomian

$$(1.8.6)\qquad W(x,y)=a_0+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+\\ +\ldots+a_{n0}x^n+a_{n-1,1}x^{n-1}y+\ldots+a_{0n}y^n$$

dwóch zmiennych x i y stopnia n jest ciągły w każdym punkcie płaszczyzny (x, y).

Z podanych powyżej twierdzeń wynika, że takie funkcje jak np.

$$\sin(x^2+y),\quad a^{x+y}\ (a>0),\quad \log(x^2+y^4+1)$$

są ciągłe w całej płaszczyźnie.

Wykorzystując podane twierdzenia oraz metody wyznaczania granicy funkcji jednej zmiennej (patrz I, rozdz. V) możemy bez większych trudności obliczać wiele granic funkcji dwóch zmiennych. Nowe trudności występują najczęściej w przypadku, gdy mamy do czynienia z funkcją określoną wzorem, który staje się nieoznaczony w jakimś punkcie (a, b). Właśnie badanie, czy w takim punkcie istnieje granica, jest w wielu przypadkach kłopotliwe.

ZADANIE 1.7. Zbadać istnienie granicy funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{dla}\quad x\neq 0,\\[2ex] 0 & \text{dla}\quad x=0,\end{cases}$$

w punkcie $(0, 0)$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona na całej płaszczyźnie. Przypuśćmy, że $x_n\to 0$ oraz $y_n\to 0$ oraz oznaczmy $c_n=f(x_n, y_n)$. Jeżeli x_n lub y_n równa się zeru, to wówczas $c_n=0$. Jeżeli natomiast zarówno x_n jak i y_n są różne od zera (por. I, str. 82), to

$$c_n=y_n\frac{\sin(x_n y_n)}{x_n y_n}\to 0,\quad \text{gdy}\quad n\to+\infty.$$

A więc zawsze $c_n\to 0$, co na podstawie (1.8.1) dowodzi, że granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ istnieje i równa się zeru.

ZADANIE 1.8. Zbadać istnienie granicy funkcji

$$g(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

w punkcie $(0, 0)$.

Rozwiązanie. Funkcja jest określona na całej płaszczyźnie z wyjątkiem punktu (0, 0). Utwórzmy ciągi

$$x_n=\frac{1}{n}, \quad y_n=\frac{a}{n}.$$

Oczywiście $x_n\to 0$, $y_n\to 0$, natomiast $g(x_n, y_n)=\frac{a}{1+a^2}$. Liczba po prawej stronie nierówności, przyjmująca różne wartości przy różnych wartościach a, jest granicą ciągu $g(x_n, y_n)$. Warunek (1.8.1) nie jest spełniony, a zatem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ nie istnieje.

Zauważmy na koniec, że obie tzw. *granice iterowane*

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} g(x,y)\right) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} g(x,y)\right) \tag{1.8.7}$$

istnieją i są równe zeru.

A więc *z istnienia granic iterowanych nie wynika istnienie granicy podwójnej.*

Zadanie 1.9. Zbadać istnienie granicy funkcji

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x-y} & \text{dla} \quad x\neq y,\\ 0 & \text{dla} \quad x=y,\end{cases}$$

w punkcie (0, 0).

Rozwiązanie. Funkcja określona jest na całej płaszczyźnie. Jeżeli przyjmiemy

$$x_n^{(1)}=\frac{1}{n}, \quad y_n^{(1)}=-\frac{1}{n}, \quad \text{to} \quad x_n^{(1)}\to 0, \quad y_n^{(1)}\to 0 \quad \text{oraz} \quad h(x_n^{(1)}, y_n^{(1)})=-\frac{1}{2n}\to 0,$$

a jeżeli przyjmiemy

$$x_n^{(2)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}, \quad y_n^{(2)}=\frac{1}{n}, \quad \text{to} \quad x_n^{(2)}\to 0, \quad y_n^{(2)}\to 0 \quad \text{oraz} \quad h(x_n^{(2)}, y_n^{(2)})=n+\frac{1}{n}\to+\infty.$$

Zatem warunek (1.8.1) nie jest spełniony i badana granica nie istnieje.

Zadanie 1.10. Zbadać istnienie granicy funkcji

$$k(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

w punkcie (0, 0).

Rozwiązanie. Funkcja nasza określona jest na całej płaszczyźnie z wyjątkiem punktu (0, 0). Niech x_n i y_n będą dowolnymi ciągami zbieżnymi do zera takimi, że x_n i y_n nie są równocześnie równe zeru, czyli $x_n^2+y_n^2>0$ dla każdego n. Oznaczmy

$$a_n=\max(|x_n|, |y_n|)>0.$$

Wówczas $|x_n^2 y_n|\leqslant a_n^3$ oraz $x_n^2+y_n^2\geqslant a_n^2$, a zatem $0\leqslant|k(x_n, y_n)|\leqslant a_n$. Ponieważ $a_n\to 0$, gdy $n\to\infty$, a więc stosując twierdzenie o trzech ciągach mamy $\lim\limits_{n\to\infty} k(x_n, y_n)=0$. Na podstawie (1.8.1) badana granica $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} k(x, y)$ istnieje i równa się zeru.

Zadania

Zbadać istnienie granic (zad. 1.11 - 1.29):

1.11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2}{x^2+y^2}$. **1.12.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}$. **1.13.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3}{x^2+y^2}$.

Wskazówka (do zad. 1.11). Postępować podobnie jak w zadaniu 1.8.

Wskazówka (do zad. 1.12). Przekształcić $\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}=1+\frac{x^2}{x^2+y^2}$ i wykorzystać zadanie 1.11.

Wskazówka (do zad. 1.13). Postępować podobnie jak w zadaniu 1.10.

1.14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$. **1.15.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{9+x^2+y^2}-3}{x^2+y^2}$.

Wskazówka (do zad. 1.14). Podstawić $x^2+y^2=u$.

Wskazówka (do zad. 1.15). Pomnożyć licznik i mianownik ułamka przez $\sqrt{9+x^2+y^2}+3$.

1.16. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$. **1.17.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3}{2x^2+y^4}$. **1.18.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y}{2x^2+y^4}$.

1.19. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \sin\frac{\pi}{x^2+y^2}$. **1.20.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sin\frac{1}{x^2+y^2}$. **1.21.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

1.22. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin(xy^2)}{y^2+(x-2)^2}$. **1.23.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y^3}{x^4+\sin^2 y}$. **1.24.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$.

1.25. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^8+y^8} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$. **1.26.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$. **1.27.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^4y^4)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Wskazówka (do zad. 1.25). Wykorzystać wzór $\lim\limits_{u\to+\infty} u^k e^{-u}=0$ przy k dowolnym.

Wskazówka (do zad. 1.26). Wykorzystać wzór $\lim\limits_{u\to 0+} (1+u)^{\frac{1}{u}}=e$.

1.28. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. **1.29.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2(x^2+y^2)}$.

1.30. Wykazać, że funkcja (1.7.2), określona w § 1.7, jest nieciągła w każdym punkcie płaszczyzny.

1.31. Wykazać, że funkcja (1.7.1), określona w § 1.7, jest ciągła w każdym punkcie płaszczyzny.

§ 1.9. POCHODNE CZĄSTKOWE

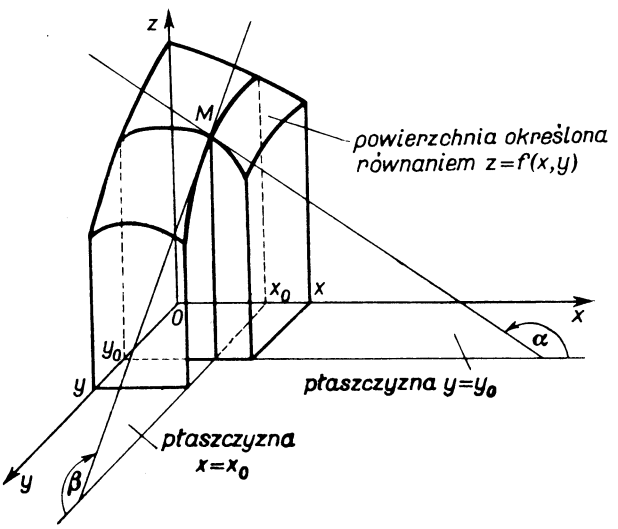
Rozpatrzmy funkcję dwóch zmiennych $z=f(x,y)$. *Pochodną cząstkową (rzędu pierwszego)* tej funkcji w punkcie (x_0,y_0) *względem zmiennej* x nazywamy granicę (jeżeli istnieje):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}. \tag{1.9.1}$$

Praktycznie pochodną tę obliczamy jak zwykłą pochodną funkcji jednej zmiennej x, przy czym zmienną y traktujemy jako stały parametr.

Podobnie, *pochodną cząstkową (rzędu pierwszego)* funkcji $z=f(x,y)$ *względem zmiennej* y definiujemy jako granicę (jeżeli istnieje):

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}. \tag{1.9.2}$$



Rys. 1.14

Pochodne cząstkowe funkcji $z=f(x,y)$ względem zmiennej x oznaczamy symbolami

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z'_x,\quad f'_x(x,y)\quad \text{(lub czasem } z_x,\ f_x(x,y)),$$

a względem zmiennej y odpowiednio

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z'_y,\quad f'_y(x,y)\quad \text{(lub czasem } z_y,\ f_y(x,y)).$$

Dla podkreślenia, że pochodną cząstkową obliczamy w punkcie (x_0,y_0), piszemy $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)}$ $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}$ itp. (czasem po prostu $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0$ itp.).

Analogicznie definiujemy, obliczamy i oznaczamy pochodne cząstkowe funkcji trzech lub większej liczby zmiennych.

Funkcję dwóch lub większej liczby zmiennych, mającą pochodne cząstkowe rzędu pierwszego ciągłe, nazywamy *funkcją klasy* C^1.

W interpretacji geometrycznej (rys. 1.14), pochodna cząstkowa $f'_x(x_0, y_0)$ równa się współczynnikowi kątowemu (równemu tg α) stycznej do krzywej będącej przekrojem powierzchni $z=f(x,y)$ z płaszczyzną $y=y_0$ (równoległą do płaszczyzny Oxz) w punkcie x_0. Analogiczną interpretację geometryczną ma pochodna cząstkowa $f'_y(x_0, y_0)$ (rys. 1.14).

Specjalnej uwagi wymaga obliczanie pochodnej cząstkowej funkcji złożonej. Niech funkcje $g(x,y)$ i $h(x,y)$ będą określone w pewnym zbiorze płaskim A i niech zbiór par wartości tych funkcji $(g(x,y), h(x,y))$ będzie zawarty w zbiorze płaskim B, w którym jest określona funkcja $f(u,v)$.

Jeżeli funkcje $g(x,y)$ i $h(x,y)$ mają pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0), a funkcja $f(u,v)$ ma pochodne cząstkowe f'_u i f'_v ciągłe w pewnym otoczeniu punktu (u_0, v_0), gdzie $u_0 = g(x_0, y_0)$, $v_0 = h(x_0, y_0)$, to funkcja złożona $F(x,y)=f(g(x,y), h(x,y))$ ma pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0), przy czym

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(u_0,v_0)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{(u_0,v_0)}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} \tag{1.9.3}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{(u_0,v_0)}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{(u_0,v_0)}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)}.$$

Wzory powyższe zapisujemy często w skróconej postaci w następujący sposób:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{1.9.3'}$$

Jeżeli w szczególności u i v są różniczkowalnymi funkcjami jednej zmiennej t: $u=u(t)$, $v=v(t)$, oraz $u(t_0)=u_0$, $v(t_0)=v_0$, to przy podanych założeniach pochodna funkcji $F(t)=f(u(t), v(t))$ w punkcie t_0 wyraża się wzorem

$$F'(t_0) = f'_u(u_0, v_0)u'(t_0) + f'_v(u_0, v_0)v'(t_0), \tag{1.9.4}$$

lub (por. (1.9.3')):

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}. \tag{1.9.4'}$$

Otrzymujemy stąd wzór na *różniczkę funkcji* $F(t)=f(u(t),v(t))$ (por. I, § 6.1):

$$dF = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv. \tag{1.9.5}$$

ZADANIE 1.32. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $z=x^2y^3-x\sin y$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 - \sin y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 - x\cos y.$$

ZADANIE 1.33. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $u=x^5y^{10}-x^3\sin z+y^2e^z$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4y^{10}-3x^2\sin z,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=10x^5y^9+2ye^z,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-x^3\cos z+y^2e^z.$$

ZADANIE 1.34. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $u=(3x^2y+z^4)^{10}$.

Rozwiązanie. Zróżniczkujmy u jako funkcję złożoną $u=v^{10}$, gdzie $v=3x^2y+z^4$. Na podstawie wzoru na pochodną funkcji złożonej (por. I, § 6.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{du}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

mamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=10v^9\cdot 6xy=60xy\,(3x^2y+z^4)^9.$$

Podobnie obliczmy

$$\frac{\partial u}{\partial y}=30x^2(3x^2y+z^4)^9,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=40z^3(3x^2y+z^4)^9.$$

ZADANIE 1.35. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $u=x^y$, gdzie $x>0$.

Rozwiązanie. Przy obliczaniu pochodnych cząstkowych funkcji u opieramy się na następujących wzorach z rachunku różniczkowego:

$$\frac{d}{dx}(x^a)=ax^{a-1},\quad \frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a \text{ dla } a>0.$$

Mamy więc

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x.$$

ZADANIE 1.36. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $u=(\ln x)^{\sin y}$, gdzie $x>1$.

Rozwiązanie. Aby zróżniczkować funkcję u, musimy stosować wzory na pochodne funkcji złożonej oraz wzory na pochodne z poprzedniego zadania:

jeżeli $v=z^a$, gdzie $z=f(x)$, to $\frac{dv}{dx}=az^{a-1}\frac{dz}{dx}$;

jeżeli $v=a^z$, gdzie $z=f(x)$, to $\frac{dv}{dx}=a^z\ln a\frac{dz}{dx}$ dla $a>0$.

Mamy więc

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sin y\,(\ln x)^{\sin y-1}\frac{1}{x}=\frac{\sin y}{x}(\ln x)^{\sin y-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(\ln x)^{\sin y}(\ln\ln x)\cos y=\cos y\ln\ln x(\ln x)^{\sin y}.$$

ZADANIE 1.37. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $u=(x\operatorname{tg} z)^{\ln y}$, gdzie $x>0$, $y>0$, $\operatorname{tg} z>0$.

Rozwiązanie. Opierając się na wzorach w poprzednim zadaniu mamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\ln y(x\operatorname{tg}z)^{\ln y-1}\operatorname{tg}z=x^{\ln y-1}(\operatorname{tg}z)^{\ln y}\ln y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(x\operatorname{tg}z)^{\ln y}\ln(x\operatorname{tg}z)\frac{1}{y}=\frac{(x\operatorname{tg}z)^{\ln y}}{y}\ln(x\operatorname{tg}z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\ln y(x\operatorname{tg}z)^{\ln y-1}\frac{x}{\cos^2 z}=\frac{x\ln y}{\cos^2 z}(x\operatorname{tg}z)^{\ln y-1}=x^{\ln y}(\operatorname{tg}z)^{\ln y-1}\frac{\ln y}{\cos^2 z}.$$

ZADANIE 1.38. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $u=(2x+3z)^{yz}$, gdzie $2x+3z>0$.

Rozwiązanie. Pochodne cząstkowe względem x i y obliczamy podobnie, jak w poprzednim zadaniu:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz(2x+3z)^{yz-1}\cdot 2=2yz(2x+3z)^{yz-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(2x+3z)^{yz}\ln(2x+3z)\cdot z=z(2x+3z)^{yz}\ln(2x+3z).$$

Jeżeli chcemy jednak obliczyć $\partial u/\partial z$, to wobec tego, że zarówno podstawa, jak i wykładnik potęgi są funkcjami zmiennej z, musimy się oprzeć na wzorze na pochodną funkcji podniesionej do potęgi, która też jest funkcją.

Niech będą dane funkcje $v=f(x)$ i $w=g(x)$, a chcemy obliczyć pochodną funkcji $y=v^w$, gdy $v>0$. Jak wiemy (por. I, zad. 6.20 i 6.21), przedstawiamy wtedy funkcję y w postaci $y=e^{w\ln v}$ i następnie różniczkujemy:

$$y'=e^{w\ln v}\left(w'\ln v+\frac{wv'}{v}\right),$$

a więc

$$(v^w)'=v^w\left(w'\ln v+\frac{wv'}{v}\right).$$

W naszym więc przypadku, pochodna cząstkowa względem z będzie

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(2x+3z)^{yz}\left(y\ln(2x+3z)+\frac{yz\cdot 3}{2z+3z}\right)=$$

$$=y(2x+3z)^{yz}\left(\ln(2x+3z)+\frac{3z}{2x+3z}\right).$$

ZADANIE 1.39. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $u=y^2(5y-2z)^{xz}$, gdzie $5y-2z>0$.

Rozwiązanie. Funkcja u jest względem x typu $u=ab^v$, gdzie $v=f(x)$; pochodna jej będzie $u'=av'b^v\ln b$, a więc

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z(5y-2z)^{xz}\ln(5y-2z).$$

Funkcja u jest względem y typu $u=vw^a$, gdzie $v=f(y)$, $w=g(y)$; pochodna jej będzie $u'=w^{a-1}(v'w+avw')$, a więc

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(5y-2z)^{xz-1}[2y(5y-2z)+5xy^2z].$$

Funkcja u jest względem z typu $u=av^w$, gdzie $v=f(z)$, $w=g(z)$; pochodna jej, według wzoru wyprowadzonego w poprzednim zadaniu, będzie

$$u'=av^w\left(w'\ln v+\frac{wv'}{v}\right).$$

Mamy więc

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xy^2(5y-2z)^{xz}\left(\ln(5y-2z)-\frac{2z}{5y-2z}\right).$$

ZADANIE 1.40. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $u=(\sin x)^{\operatorname{tg} z}(\operatorname{ctg} z)^{\cos y}$, gdzie $\sin x>0$, $\operatorname{ctg} z>0$.

Rozwiązanie. Funkcja u jest względem zmiennej x typu $u=v^ab$; pochodna jej będzie $u'=av^{a-1}v'b$, a więc

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\operatorname{tg} z(\sin x)^{\operatorname{tg} z-1}\cos x(\operatorname{ctg} z)^{\cos y}.$$

Po uproszczeniu, biorąc pod uwagę, że $\operatorname{tg} z=1/\operatorname{ctg} z$, będzie

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos x(\sin x)^{\operatorname{tg} z-1}(\operatorname{ctg} z)^{\cos y-1}.$$

Funkcja u jest względem zmiennej y typu $u=ab^v$; pochodna jej będzie $u'=ab^v v'\ln b$, a więc

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(\sin x)^{\operatorname{tg} z}(\operatorname{ctg} z)^{\cos y}(-\sin y)\ln\operatorname{ctg} z.$$

Funkcja u jest względem zmiennej z typu $u=a^vw^b$; pochodna jej więc będzie $u'=a^vw^{b-1}(v'w\ln a+bw')$, a więc

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(\sin z)^{\operatorname{tg} z}(\operatorname{ctg} z)^{\cos y-1}\left(\frac{1}{\cos^2 z}\operatorname{ctg} z\ln\sin x+\cos y\frac{-1}{\sin^2 z}\right)$$

i po uproszczeniu

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(\sin x)^{\operatorname{tg} z}(\operatorname{ctg} z)^{\cos y-1}\left(\frac{\ln\sin x}{\sin z\cos z}-\frac{\cos y}{\sin^2 z}\right).$$

ZADANIE 1.41. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $u=x^{y^z}$, gdzie $x>0$, $y>0$.

Rozwiązanie. Funkcja u jest względem zmiennej x typu x^a gdzie $a=y^z$; pochodna jej będzie ax^{a-1}, mamy więc

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^zx^{y^z-1}.$$

Funkcja u jest względem zmiennej y typu a^v, gdzie $v=y^b$; pochodna jej będzie $a^v v' \ln a$, gdzie $v'=by^{a-1}$, mamy więc

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z} z y^{z-1} \ln x.$$

Funkcja u jest względem zmiennej z typu a^v, gdzie $v=b^z$; pochodna jej będzie $a^v v' \ln a$, gdzie $v=b^z \ln b$, mamy więc

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z} y^z \ln x \ln y.$$

ZADANIE 1.42. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $v=xy-x(3x-y)^{3z}+\cos(y-z)$, gdzie $3x-y>0$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{\partial v}{\partial x}=y-3\cdot 3xz(3x-y)^{3z-1}-(3x-y)^{3z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=x+3xz(3x-y)^{3z-1}-\sin(y-z),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-3x\ln(3x-y)(3x-y)^{3z}+\sin(y-z).$$

ZADANIE 1.43. Pole potencjalne w punkcie (x, y, z) jest wyznaczone wzorem $v=$ $=3\sin(xy-z)+(2x-z)^3y^2$. Wyznaczyć składowe natężenia pola: $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ i $\partial v/\partial z$.

Rozwiazanie. Mamy

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3y\cos(xy-z)+6(2x-z)^2y^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=3x\cos(xy-z)+2y(2x-z)^3,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-3\cos(xy-z)-3(2x-z)^2y^2.$$

ZADANIE 1.44. Dana jest funkcja $v=z\sin^{x^2}(x-y^2)$, gdzie $0<x-y^2<\pi$. Obliczyć pochodne cząstkowe.

Rozwiązanie. Przy spełnieniu danych nierówności funkcja $\sin(x-y^2)$ przybiera wartości dodatnie, a więc daną funkcję v można napisać w postaci $v=ze^{x^2 \ln \sin(x-y^2)}$. Obliczamy

$$\frac{\partial v}{\partial x}=z\left(2x\ln\sin(x-y^2)+x^2\operatorname{ctg}(x-y^2)\right)e^{x^2\ln\sin(x-y^2)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=zx^2(-2y)\operatorname{ctg}(x-y^2)e^{x^2\ln\sin(x-y^2)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z}=e^{x^2\ln\sin(x-y^2)}.$$

Zadania

Obliczyć pochodne cząstkowe względem każdej zmiennej występującej w danej funkcji (zad. 1.45 - 1.66):

1.45. $u=xy^2z^3-y\sin z$. **1.46.** $u=x\sqrt{y}-e^z\ln y$. **1.47.** $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt{x}}$.

1.48. $z=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\alpha}$. **1.49.** $l=\rho e^{\pi\cos\varphi}$.

1.50. $u=\sin(x^2)\sqrt{\operatorname{tg} y}-e^{\sin z}\cos^2 y$. **1.51.** $u=\sqrt{x^4+\cos^2 y}+e^{\sqrt{z}}\sin y$.

1.52. $u=z^4(5xy^2-3yz^2)^{20}$. **1.53.** $u=x^{\sqrt{y}}$.

1.54. $u=(xy)^z$. **1.55.** $u=x^{yz}$.

1.56. $z=(1+xy)^y$. **1.57.** $z=\ln(x+\ln y)$.

1.58. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. **1.59.** $u=\ln\sin(x-2t)$.

1.60. $u=(\sin x)^{\ln y}$. **1.61.** $u=x^{\frac{1}{y}z}$.

1.62. $u=x^{y\operatorname{arctg} z}$. **1.63.** $u=(y\sin^2 x+5)^{\sqrt{y}}$.

1.64. $u=2x^3y-5x^2y^3+x\cos 2y$. **1.65.** $u=\sqrt{xy}(3x+2z)^{\sqrt{yz}}$.

1.66. $u=(\sin x)^{(\sin y)^{\sin z}}$, $\sin x>0$, $\sin y>0$.

1.67. Wykazać, że funkcja $u=\ln(e^x+e^y)$ spełnia równanie $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=1$.

1.68. Wykazać, że funkcja $u=x^y y^x$ spełnia równanie $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=(x+y+\ln u)u$.

1.69. Wykazać, że funkcja $u=e^{x/y^2}$ spełnia równanie $2x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

1.70. Wykazać, że funkcja $u=x+\frac{x-y}{y-z}$ spełnia równanie $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1$.

1.71. Wykazać, że funkcja $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ spełnia równanie $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$.

1.72. Wykazać, że w równaniu Clapeyrona $pv=RT$ iloczyn pochodnych cząstkowych $\partial p/\partial v$, $\partial v/\partial T$ i $\partial T/\partial p$ równa się -1 (związek ten jest bardzo ważny w termodynamice).

1.73. Zbadać, z jaką prędkością zmienia się objętość stożka a) przy zmianie wysokości h; b) przy zmianie promienia podstawy R.

1.74. Obliczyć, pod jakim kątem przecinają się krzywe otrzymane przez przecięcie powierzchni $z=x^2+\frac{y^2}{6}$ i $z=\frac{x^2+y^3}{3}$ płaszczyzną $y=2$.

1.75. Przez punkt $M(1, 2, 6)$ powierzchni $z=2x^2+y^2$ przeprowadzono płaszczyzny równoległe do płaszczyzny układu Oxz i Oyz. Wyznaczyć kąty, jakie tworzą z osiami współrzędnych styczne wyprowadzone z punktu M do otrzymanych przekrojów.

1.76. Pole trapezu o podstawach równych a, b i wysokości h wyraża się wzorem $S=\frac{1}{2}(a+b)h$. Znaleźć $\partial S/\partial a$, $\partial S/\partial b$, $\partial S/\partial h$ i podać ich interpretację geometryczną.

§ 1.10. POCHODNE JEDNOSTRONNE I POCHODNE W KIERUNKU OSI

Weźmy pod uwagę funkcję jednej zmiennej $y=g(x)$ określoną w otoczeniu punktu $x=x_0$. Jak wiemy, przez pochodną $g'(x_0)$ funkcji $g(x)$ w punkcie $x=x_0$ rozumiemy granicę (por. I, § 6.1):

$$g'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}.$$

Jeżeli zamiast granicy (dwustronnej) ilorazu różnicowego weźmiemy pod uwagę granicę prawostronną (por. I, § 5.1), to otrzymamy tzw. *pochodną prawostronną* $g'_+(x_0)$ funkcji $g(x)$ w punkcie $x=x_0$:

$$g'_+(x_0)=\lim_{h\to 0+}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}; \tag{1.10.1}$$

analogicznie określamy *pochodną lewostronną* $g'_-(x_0)$ funkcji $g(x)$ w punkcie $x=x_0$ jako granicę

$$g'_-(x_0)=\lim_{h\to 0-}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}. \tag{1.10.2}$$

Pochodne (1.10.1) i (1.10.2) noszą wspólną nazwę *pochodnych jednostronnych.*

Z podanych definicji wynika, że *jeżeli funkcja $g(x)$ ma w punkcie $x=x_0$ pochodną $g'(x_0)$, to ma również w tym punkcie pochodne jednostronne, przy czym*

$$g'_+(x_0)=g'_-(x_0) \tag{1.10.3}$$

i obie te liczby są równe $g'(x_0)$.

Jeżeli na odwrót istnieją pochodne jednostronne $g'_+(x_0)$ i $g'_-(x_0)$ oraz zachodzi równość (1.10.3), *to istnieje także pochodna $g'(x_0)$ i jest równa wspólnej wartości pochodnych jednostronnych.*

Może się jednak zdarzyć, że pochodne $g'_+(x_0)$ oraz $g'_-(x_0)$ istnieją, ale mają wartości różne. Wówczas oczywiście pochodna $g'(x_0)$ nie istnieje.

PRZYKŁAD. Funkcja $M(x)=|x|$ w punkcie $x=0$ ma obie pochodne jednostronne, a mianowicie

$$M'_+(0)=1 \quad \text{oraz} \quad M'_-(0)=-1,$$

ale są one różne, więc pochodna $M'(0)$ nie istnieje (por. też I, str. 94).

W interpretacji geometrycznej pochodna jednostronna jest równa współczynnikowi kątowemu stycznej jednostronnej.

Podobnie dla funkcji dwóch zmiennych $z=f(x, y)$ możemy wprowadzić pojęcie *pochodnych cząstkowych jednostronnych*. Mianowicie mamy takie równości definicyjne:

$$f'_{x+}(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h}, \tag{1.10.4}$$

$$f'_{x-}(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)}{h},$$

$$f'_{y+}(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0, y_0+h)-f(x_0, y_0)}{h}, \tag{1.10.5}$$

$$f'_{y-}(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0, y_0+h)-f(x_0, y_0)}{h}.$$

Obecnie wprowadzimy pojęcie pochodnej funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ w kierunku pewnej, leżącej w płaszczyźnie Oxy, osi Os (przechodzącej przez początek układu współrzędnych O). Niech oś Os tworzy z osiami Ox i Oy odpowiednio kąty α i β. Wiadomo z geometrii analitycznej, że równania

$$x=x_0+t\cos\alpha, \quad y=y_0+t\cos\beta \quad (t\geqslant 0) \tag{1.10.6}$$

przedstawiają w formie parametrycznej półprostą wychodzącą z punktu (x_0, y_0), równoległą do osi Os i mającą ten sam zwrot.

Przez *pochodną funkcji* $f(x, y)$ *w punkcie* (x_0, y_0) *w kierunku osi* Os (*pochodną kierunkową*) rozumiemy granicę jednostronną

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0=\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0, y_0)}{t}. \tag{1.10.7}$$

W szczególności, jak widać z powyższej definicji, pochodną funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) w kierunku osi Ox jest $f'_{x+}(x_0, y_0)$, a w kierunku osi Oy jest $f'_{y+}(x_0, y_0)$.

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe, to stosując twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej dla funkcji

$$F(t)=f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta) \tag{1.10.8}$$

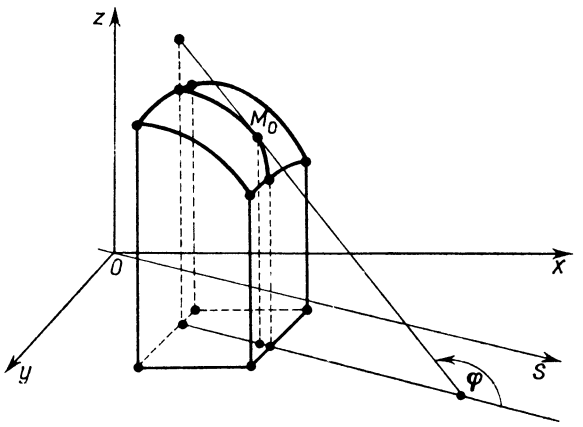
w punkcie $t=0$ i biorąc pod uwagę, że $F'_+(0)=\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0$, otrzymujemy, że pochodna ta istnieje i jest równa

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0=f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0, y_0)\cos\beta. \tag{1.10.9}$$

Geometrycznie wykresem funkcji (1.10.8) jest krzywa będąca przekrojem powierzchni $z=f(x, y)$ z płaszczyzną przechodzącą przez punkt (x_0, y_0) i równoległą do płaszczyzny Ozs (patrz rys. 1.15).

Jeśli więc istnieje pochodna (1.10.7), to do wyżej określonej krzywej w punkcie (x_0, y_0) istnieje styczna prawostronna, która z osią Os tworzy taki kąt φ, którego tangens równy jest pochodnej (1.10.7).

Jeżeli oś Os zmienimy w ten sposób, że zmienimy w niej tylko zwrot na przeciwny, to wobec wzoru $\cos(180°+\gamma)=-\cos\gamma$ przyrosty funkcji występującej w liczniku ilorazu różnicowego (1.10.7) zmienią znaki, natomiast mianownik nie zmieni znaku (to znaczy pozostanie dodatni). A zatem w tym przypadku pochodną w kierunku osi o zmienionym zwrocie jest granica lewostronna ilorazu (1.10.7), ale wzięta ze znakiem ujemnym.



Rys. 1.15

Przy założeniach, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła wraz z pierwszymi pochodnymi cząstkowymi (klasy C^1), pochodna w kierunku osi o zmienionym zwrocie istnieje i równa się $-\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0$, co wynika także bezpośrednio ze wzoru (1.10.9).

Zauważmy jeszcze, że wzór (1.10.9) otrzymamy w sposób formalny ze wzoru (1.10.8), jeżeli zmienną niezależną oznaczymy literą s zamiast t i obliczymy pochodną $\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0$ względem s według reguły różniczkowania funkcji złożonej.

Pojęcie pochodnej w kierunku osi możemy rozszerzyć na przypadek trzech zmiennych. Niech będzie dana funkcja $u=f(x, y, z)$ w otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0) oraz niech będzie dana oś Os, która z osiami Ox, Oy i Oz układu prostokątnego tworzy odpowiednio kąty α, β, γ (z geometrii analitycznej wiemy, że kąty α, β i γ są związane zależnością $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$). Wówczas przez *pochodną funkcji* $f(x, y, z)$ *w punkcie* (x_0, y_0, z_0) *w kierunku osi* Os (*pochodną kierunkową*) rozumiemy granicę jednostronną

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0 = \lim_{t\to 0+} \frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)-f(x_0, y_0, z_0)}{t}. \tag{1.10.10}$$

Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ ma w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0) pochodne cząstkowe rzędu pierwszego ciągłe, to wówczas pochodna funkcji $f(x, y, z)$ w punkcie (x_0, y_0, z_0)

w kierunku osi Os wyraża się wzorem następującym:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0 = f'_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + f'_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma. \tag{1.10.11}$$

ZADANIE 1.77. Obliczyć pochodną funkcji $u=x^2+y^2-z^2$ w punkcie (1, 1, 1) w kierunku osi Os wyznaczonej przez kąty $\alpha=45°$, $\beta=45°$, $\gamma=90°$.

Rozwiązanie. Stosując wzór (1.10.11), otrzymujemy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{(1,1,1)} = (2x\cos 45° + 2y\cos 45° - 2z\cos 90°)_{(1,1,1)} = 2\sqrt{2}.$$

ZADANIE 1.78. Znaleźć pochodną funkcji $u=x^2-2xy$ w punkcie $P(2, 1)$ w kierunku od punktu P do punktu $Q(5, 5)$.

Rozwiązanie. Znajdujemy długość odcinka $|PQ|=\sqrt{(5-2)^2+(5-1)^2}=5$ i cosinusy kątów, jakie wektor $\overrightarrow{PQ}$ tworzy z osiami współrzędnych:

$$\cos\alpha = \frac{5-2}{|PQ|} = \frac{3}{5}, \qquad \cos\beta = \frac{5-1}{|PQ|} = \frac{4}{5}.$$

Stosując wzór (1.10.11) mamy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{(2,1)} = \left((2x-2y)\cdot\tfrac{3}{5} - 2x\cdot\tfrac{4}{5}\right)_{(2,1)} = \tfrac{6}{5} - \tfrac{16}{5} = -2.$$

§ 1.11. TWIERDZENIE O PRZYROSTACH. RÓŻNICZKA ZUPEŁNA

W paragrafie tym dla ustalenia uwagi i łatwiejszej interpretacji geometrycznej będziemy mówili o funkcjach dwóch zmiennych. Ale to co powiemy przenosi się w sposób bezpośredni na funkcje p zmiennych.

TWIERDZENIE O PRZYROSTACH. *Jeżeli funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ jest klasy C^1* (por. § 1.9) *w pewnym otoczeniu punktu (x_1, y_1), to dla każdego punktu (x_2, y_2) z tego otoczenia istnieje taka liczba θ, spełniająca nierówność $0<\theta<1$, że ma miejsce następujący wzór:*

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = (x_2-x_1)f'_x(x_\theta, y_\theta) + (y_2-y_1)f'_y(x_\theta, y_\theta), \tag{1.11.1}$$

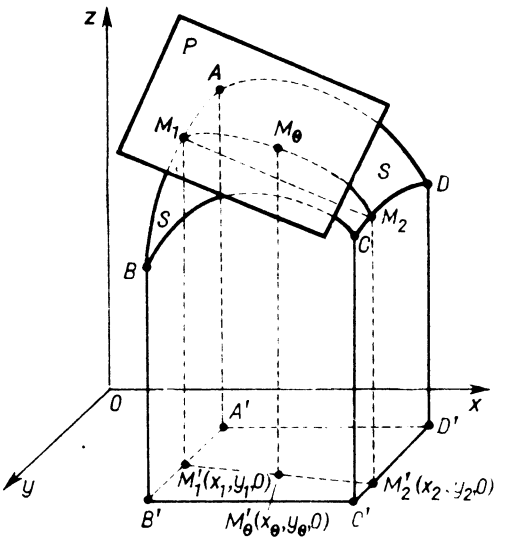
gdzie $x_\theta = x_1+\theta(x_2-x_1) = (1-\theta)x_1+\theta x_2$, $y_\theta = y_1+\theta(y_2-y_1) = (1-\theta)y_1+\theta y_2$ $(0<\theta<1)$.

Tak określony punkt (x_θ, y_θ) leży na odcinku o końcach (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2).

Wzór (1.11.1) mówi nam, że przyrost funkcji $f(x, y)$ klasy C^1 równa się sumie przyrostu zmiennej x pomnożonego przez pochodną cząstkową względem x w punkcie pośrednim oraz przyrostu zmiennej y pomnożonego przez pochodną cząstkową względem y w punkcie pośrednim, przy czym przy obu przyrostach punkt pośredni jest ten sam i leży na odcinku łączącym punkty określające przyrosty zmiennych.

Podane twierdzenie ma dla funkcji dwóch zmiennych podobne znaczenie jak twierdzenie Lagrange'a dla funkcji jednej zmiennej (por. I, § 10.1).

Zauważmy, że w podanym twierdzeniu zrobione założenia są nieco mocniejsze niż odpowiednie założenia twierdzenia Lagrange'a, ponieważ tutaj zakładamy nie tylko istnienie pochodnych cząstkowych, ale także ich ciągłość. Bez założenia ciągłości pochodnych wzór podobny do wzoru (1.11.1) jest prawdziwy, jednak z tą różnicą, że punkty pośrednie, w których oblicza się pochodne cząstkowe, nie muszą być te same oraz nie muszą nawet leżeć na odcinku łączącym punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2).



Rys. 1.16

Interpretacja geometryczna wzoru (1.11.1) jest następująca: Jeżeli weźmiemy dwa punkty $M_1(x_1, y_1, z_1)$ oraz $M_2(x_2, y_2, z_2)$ leżące na powierzchni $z=f(x, y)$, to na łuku $\overset{\frown}{M_1M_2}$ otrzymanym przez przekrój powierzchni z płaszczyzną przechodzącą przez punkty M_1 i M_2 i równoległą do osi Oz znajduje się taki punkt $M_\theta(x_\theta, y_\theta, z_\theta)$, w którym płaszczyzna styczna do powierzchni $z=f(x, y)$ jest równoległa do siecznej M_1M_2 (rys. 1.16).

Jeżeli teraz użyjemy trochę innych oznaczeń, mianowicie zamiast (x_1, y_1) napiszemy odpowiednio (x, y), a zamiast (x_2, y_2) napiszemy $(x+dx, y+dy)$, gdzie dx i dy oznaczają odpowiednio przyrosty zmiennej x i zmiennej y, to wzór (1.11.1) przybierze postać

$$f(x+dx, y+dy)-f(x, y)=f'_x(x_\theta, y_\theta)\,dx+f'_y(x_\theta, y_\theta)\,dy, \tag{1.11.2}$$

gdzie $x_\theta=x+\theta\,dx$, $y_\theta=y+\theta\,dy$ $(0<\theta<1)$.

Przyrost funkcji nie jest na ogół wyrażeniem liniowym względem przyrostów zmiennych niezależnych; jednak w wielu przypadkach możemy go dla małych przyrostów argumentów zastąpić z dość dużą dokładnością przez wyrażenie liniowe. Właśnie pojęcie *różniczki* funkcji ciągłej f wiąże się z istnieniem takiej funkcji liniowej D względem przyrostów zmiennych niezależnych, która aproksymuje przyrost funkcji f w ten sposób, że iloraz różnicy $\Delta f-D$ przez odległość punktów wyznaczających ten przyrost dąży do zera, gdy odległość tych punktów dąży do zera. Jeżeli taka funkcja (forma) liniowa D względem przyrostów zmiennych niezależnych istnieje, to nazywamy ją *różniczką zupełną funkcji f*.

Dla lepszej ilustracji rozważmy najpierw funkcję jednej zmiennej $y=f(x)$ (por. też I, §6.1). Zgodnie z tym, co zostało powiedziane, warunek istnienia różniczki funkcji f w punkcie $x=x_0$ polega na istnieniu takiej stałej A, że

$$\lim_{|dx|\to 0}\frac{\Delta f-A\,dx}{|dx|}=0, \quad \text{gdzie} \quad \Delta f=f(x_0+dx)-f(x_0). \tag{1.11.3}$$

Widzimy od razu, że warunek (1.11.3) jest równoważny warunkowi $A=f'(x_0)$. A więc funkcja jednej zmiennej $f(x)$ ma różniczkę (zupełną) w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje pochodna $f'(x_0)$, i wówczas różniczka funkcji (w tym punkcie) równa się

$$D(dx)=f'(x_0)\,dx. \tag{1.11.4}$$

Przypuśćmy teraz, że mamy funkcję dwóch zmiennych $u=f(x, y)$. Funkcja ta będzie miała *różniczkę zupełną* w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, jeżeli będą istniały takie stałe A, B, że

$$\lim_{|PP_0|\to 0}\frac{\Delta f-(A\,dx+B\,dy)}{|PP_0|}=0, \tag{1.11.5}$$

gdzie $|PP_0|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, $\Delta f=f(x_0+dx, y_0+dy)-f(x_0, y_0)$.

Łatwo zauważyć przyjmując $dy=0$, a następnie $dx=0$, że jeżeli warunek (1.11.5) jest spełniony, to istnieją pochodne cząstkowe $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ oraz

$$A=f'_x(x_0, y_0), \quad B=f'_y(x_0, y_0). \tag{1.11.6}$$

Wnioskowanie odwrotne nie jest jednak prawdziwe. Zobaczymy to na przykładzie funkcji

$$g(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x, y)\neq(0, 0),\\ 0 & \text{dla} \quad x=y=0.\end{cases} \tag{1.11.7}$$

Funkcja $g(x, y)$, jak widać z powyższego, jest określona na całej płaszczyźnie. Wzdłuż obu osi współrzędnych funkcja ta równa się stale zeru, wobec tego dla dowolnych x i y mamy $g'_x(x, 0)=0$, $g'_y(0, y)=0$, więc w szczególności

$$g'_x(0, 0)=g'_y(0, 0)=0, \tag{1.11.8}$$

a wobec tego różniczka funkcji g w punkcie $(0, 0)$ byłaby postaci

$$D(dx, dy)=0.$$

Tymczasem przyrost funkcji w punkcie $(0, 0)$ jest następujący:

$$\Delta g=g(dx, dy)-g(0, 0)=\frac{dx\,dy}{(dx)^2+(dy)^2}.$$

Ponieważ $|PP_0|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, więc warunek (1.11.5) w naszym przypadku wygląda następująco:

$$\lim_{|PP_0|\to 0}\frac{dx\,dy}{\left((dx)^2+(dy)^2\right)^{3/2}}=0. \tag{1.11.9}$$

Rozumując analogicznie jak w zadaniu 1.8 (str. 18), można wykazać, że nie tylko granica stojąca po lewej stronie równości (1.11.9) nie istnieje, ale że wyrażenie stojące pod znakiem granicy w dowolnym otoczeniu punktu $dx=dy=0$ przybiera dowolnie duże wartości.

Jak wynika również z zadania 1.8, funkcja (1.11.7) jest nieciągła w punkcie (0, 0), pomimo tego, że ma w tym punkcie obie pochodne cząstkowe, a także, co łatwo sprawdzić wprost z definicji, ma w punkcie (0, 0) pochodną w dowolnym kierunku.

Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ określona w otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$ ma w tym punkcie *różniczkę zupełną w sensie Stolza* $Adx+Bdy$, jeżeli jest spełniony warunek (1.11.5).

Ponieważ z warunku (1.11.5) wynikają równości (1.11.6) niekiedy w literaturze *różniczką zupełną funkcji* $f(x, y)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ nazywa się wyrażenie liniowe postaci

$$f'_x(x_0, y_0)\,dx+f'_y(x_0, y_0)\,dy, \tag{1.11.10}$$

przy jednym warunku, że pochodne cząstkowe występujące we wzorze (1.11.10) istnieją. Przy takiej jednak definicji różniczka zupełna nie musi być, jak to widzieliśmy na przykładzie funkcji (1.11.7), przybliżeniem liniowym przyrostu $\Delta f=f(x_0+dx, y_0+dy)-f(x_0, y_0)$.

Różniczkę zupełną funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) oznaczamy symbolami

$$df, \quad df(x_0, y_0), \quad (df)_{(x_0, y_0)}.$$

Ważne praktycznie znaczenie ma następujące twierdzenie:

(1.11.11) *Jeżeli funkcja* $f(x, y)$ *jest w pewnym otoczeniu punktu* (x_0, y_0) *klasy* C^1, *to jest spełniony warunek* (1.11.5), *a zatem forma liniowa* (1.11.10) *jest różniczką zupełną w sensie Stolza, czyli jest liniową częścią przyrostu* Δf.

Należy pamiętać, że różniczka zupełna funkcji $f(x, y)$ jest funkcją liniową przyrostów dx, dy, natomiast sam punkt (x, y) jest ustalony.

Z punktu widzenia geometrycznego, różniczka zupełna funkcji dwóch zmiennych $z=f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) wyraża przyrost Δz wzdłuż płaszczyzny stycznej w punkcie (x_0, y_0, z_0), gdzie $z_0=f(x_0, y_0)$, do powierzchni $z=f(x, y)$.

Analogicznie wprowadza się pojęcie *różniczki zupełnej* (*różniczki zupełnej w sensie Stolza*) dla funkcji p zmiennych $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

ZADANIE 1.79. Obliczyć, jaki popełniamy maksymalny błąd bezwzględny oraz względny przy obliczaniu objętości prostopadłościanu o krawędziach wyznaczonych z podaną dokładnością: $x=4{,}1\pm0{,}1$, $y=3{,}2\pm0{,}1$, $z=8{,}4\pm0{,}2$.

Rozwiązanie. Aby wyznaczyć wartość funkcji $f(x, y, z)$ w pewnym punkcie $(x+dx, y+dy, z+dz)$, korzystamy ze wzoru

$$f(x+dx, y+dy, z+dz)\approx f(x, y, z)+df, \tag{1.11.12}$$

gdzie dx, dy, dz są przyrostami odpowiednio zmiennych x, y, z. Niech będą dane pewne maksymalne oszacowania tych przyrostów:

$$|dx|\leqslant M_1, \quad |dy|\leqslant M_2, \quad |dz|\leqslant M_3.$$

Wówczas można oszacować z góry moduł różnicy $\Delta f=f(x+dx, y+dy, z+dz)-f(x, y, z)$

Korzystając ze związku

$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz, \tag{1.11.13}$$

otrzymujemy oszacowanie

$$|\Delta f| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| M_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| M_2 + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| M_3. \tag{1.11.14}$$

Powyższy wzór daje nam oszacowanie błędu bezwzględnego, jaki popełniamy, jeżeli zastępujemy rzeczywistą wartość funkcji f wziętą w nieznanym nam dokładnie punkcie $(x+dx, y+dy, z+dz)$ przez wartość funkcji w znanym nam punkcie (x, y, z).

W naszym przypadku funkcji $f(x, y, z)=xyz$ mamy

$$x=4{,}1,\ |dx|\leqslant 0{,}1,\quad y=3{,}2,\ |dy|\leqslant 0{,}1,\quad z=8{,}4,\ |dz|\leqslant 0{,}2.$$

Obliczamy różniczkę zupełną

$$df = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

Maksymalny błąd bezwzględny, jaki popełniamy obliczając objętość tego prostopadłościanu, wynosi

$$|\Delta f| \leqslant 3{,}2\cdot 8{,}4\cdot 0{,}1 + 4{,}1\cdot 8{,}4\cdot 0{,}1 + 4{,}1\cdot 3{,}2\cdot 0{,}2 = 8{,}756 < 8{,}8.$$

Maksymalny błąd względny popełniony podczas obliczeń otrzymujemy dzieląc maksymalny błąd bezwzględny przez wyznaczoną objętość prostopadłościanu, zatem

$$\delta_f = \frac{|\Delta f|}{v} < \frac{8{,}8}{110{,}2} \approx 0{,}08 = 8\%.$$

ZADANIE 1.80. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $(1{,}02)^{3{,}01}$.

Rozwiązanie. Rozpatrzmy funkcję $f(x, y)=x^y$. Ponieważ jest spełnione założenie twierdzenia (1.11.11) w otoczeniu punktu (1, 3), zatem można przyjąć, że $f(x_0+dx, y_0+dy)\approx f(x_0, y_0)+df$. Obliczamy różniczkę zupełną

$$df = yx^{y-1}\,dx + x^y \ln x\,dy.$$

Podstawiając $x_0=1$, $y_0=3$, $dx=0{,}02$, $dy=0{,}01$, otrzymujemy

$$(1{,}02)^{3{,}01} \approx 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot 0{,}02 + 1^3 \ln 1\cdot 0{,}01 = 1 + 0{,}06 = 1{,}06.$$

ZADANIE 1.81. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt{(6{,}2)^2+(8{,}1)^2}$.

Rozwiązanie. Rozpatrzmy funkcję $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Różniczka zupełna tej funkcji ma postać

$$df = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dx + y\,dy).$$

Podstawiając $x_0=6$, $y_0=8$, $dx=0{,}2$, $dy=0{,}1$, otrzymujemy

$$\sqrt{(6{,}2)^2+(8{,}1)^2} = \sqrt{36+64} + \frac{1}{\sqrt{36+64}}(6\cdot 0{,}2 + 8\cdot 0{,}1) = 10 + 0{,}2 = 10{,}2.$$

Zadania

1.82. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $z=\frac{2{,}01\cdot 1{,}03}{(2{,}01)^2-(1{,}03)^2}$.

1.83. Obliczyć przybliżoną wartość ilorazu $\frac{8{,}04}{2{,}02}$.

1.84. Znaleźć maksymalny błąd bezwzględny i względny powstały przy obliczaniu objętości kuli, jeżeli średnica kuli wynosi $d=3{,}7\pm 0{,}05$, a $\pi=3{,}14$.

1.85. Obliczyć maksymalny błąd bezwzględny powstały przy wyznaczaniu objętości stożka, przyjmując promień podstawy $r=3\pm 0{,}02$, wysokość stożka $h=2{,}2\pm 0{,}1$ oraz $\pi=3{,}14$.

§ 1.12. POCHODNE CZĄSTKOWE WYŻSZYCH RZĘDÓW

Niech będzie dana funkcja $f(x, y)$ określona w pewnym obszarze D. Przypuśćmy, że istnieją pochodne cząstkowe tej funkcji $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$. Pochodne cząstkowe tych pochodnych, jeżeli istnieją, nazywamy *pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego funkcji* $f(x, y)$.

Wszystkich pochodnych rzędu drugiego funkcji $f(x, y)$ jest 4, mianowicie

$$f''_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f''_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\quad f''_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \tag{1.12.1}$$

przy czym np. zapis ∂x^2 jest skrótem zapisu $\partial x\partial x$. Pochodne cząstkowe f''_{xx} i f''_{yy} nazywamy niekiedy *pochodnymi czystymi*, a pochodne f''_{xy} i f''_{yx} nazywamy *pochodnymi mieszanymi*.

Analogicznie wprowadzamy pojęcie *pochodnej cząstkowej rzędu drugiego funkcji p zmiennych* $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Funkcja ta może mieć p^2 pochodnych cząstkowych rzędu drugiego.

Mówimy, że *funkcja* $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *jest klasy* C^2 *w obszarze* D, jeżeli ma wszystkie pochodne cząstkowe rzędu drugiego i jeżeli wszystkie te pochodne są ciągłe w obszarze D.

Na ogół kolejność różniczkowania odgrywa rolę, to znaczy mogą np. istnieć pochodne mieszane różniące się tylko kolejnością różniczkowania i być różnymi funkcjami. Zachodzi jednak

TWIERDZENIE SCHWARZA. *Jeżeli w pewnym otoczeniu punktu* P_0 *istnieją pochodne mieszane różniące się tylko kolejnością różniczkowania i w punkcie* P_0 *są ciągłe, to w punkcie* P_0 *są równe.*

Wynika stąd, że *jeżeli funkcja f jest klasy* C^2 *w obszarze D, to pochodne mieszane różniące się tylko kolejnością różniczkowania są parami równe.*

Obliczając pochodne cząstkowe pochodnych rzędu drugiego funkcji $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ (jeżeli istnieją) otrzymujemy *pochodne cząstkowe rzędu trzeciego funkcji* $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Ogólnie, *pochodną cząstkową rzędu k funkcji* $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ nazywamy pochodną

cząstkową (jeżeli istnieje) pochodnej cząstkowej rzędu $k-1$ i oznaczamy

$$f^{(k)}_{x_1^\alpha x_2^\beta \dots x_p^\gamma} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \dots \partial x_p^\gamma}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha+\beta+\dots+\gamma=k.$$

Mówimy, że *funkcja* $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ *jest klasy* C^k *w pewnym zbiorze* D, jeżeli w tym zbiorze ma wszystkie pochodne cząstkowe do rzędu k włącznie i pochodne te są ciągłe.

ZADANIE 1.86. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji $f(x, y, z)=xy+xa^z$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y+a^z, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=xa^z\ln a,$$

skąd

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}=a^z\ln a,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=xa^z(\ln a)^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}=a^z\ln a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}=0.$$

Stwierdzamy równość pochodnych f''_{xy} i f''_{yx}, f''_{xz} i f''_{zx}, f''_{yz} i f''_{zy}.

ZADANIE 1.87. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji $f(x, y)=x^y$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x.$$

skąd

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^y(\ln x)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=yx^{y-1}\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}=x^{y-1}(y\ln x+1).$$

ZADANIE 1.88. Wykazać, że funkcja

$$u(x, y)=\ln\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

(tzw. *potencjał logarytmiczny punktu* (x_0, y_0)) spełnia równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Zapiszmy daną funkcję w postaci

$$u(x, y)=\tfrac{1}{2}\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right).$$

Różniczkujemy względem x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\cdot 2(x-x_0)=\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Różniczkujemy jeszcze raz względem x i po redukcji otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(y-y_0)^2-(x-x_0)^2}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2}. \tag{2}$$

Ze względu na symetrię funkcji $u(x, y)$ względem $x-x_0$ oraz $y-y_0$ można wnioskować, że

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2}. \tag{3}$$

Dodając stronami (2) i (3) otrzymujemy równanie (1).

Równanie (1) nosi nazwę *równania różniczkowego Laplace'a* i odgrywa dużą rolę w teorii potencjału płaskiego.

* * *

Specjalną uwagę należy poświęcić obliczaniu pochodnych cząstkowych rzędu drugiego, jeżeli mamy do czynienia z funkcją złożoną. Wówczas dwukrotnie stosujemy postępowanie opisane wzorem (1.9.3) (por. § 1.9).

Niech funkcje $g(x, y)$ i $h(x, y)$ będą określone w pewnym zbiorze płaskim A i niech zbiór par wartości tych funkcji $(g(x, y), h(x, y))$ będzie zawarty w zbiorze płaskim B, w którym jest określona funkcja $f(u, v)$. Jeżeli funkcje $g(x, y)$ i $h(x, y)$ są klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0), a funkcja $f(u, v)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu (u_0, v_0), gdzie $u_0=g(x_0, y_0)$, $v_0=h(x_0, y_0)$, to funkcja złożona $f(g(x, y), h(x, y))$ ma pochodne cząstkowe rzędu drugiego w punkcie (x_0, y_0), przy czym mają miejsce następujące wzory (por. str. 22):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^2+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_0,$$

(1.12.2)
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\right]+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)_0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^2+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_0.$$

Wzory te łatwo wyprowadzić opierając się na definicji pochodnej cząstkowej rzędu drugiego, stosując wzory (1.9.3) oraz wzór na pochodną iloczynu dwóch funkcji.

Jeżeli w szczególności u i v są funkcjami jednej zmiennej t, czyli $u=u(t)$, $v=v(t)$, oraz $u(t_0)=u_0$, $v(t_0)=v_0$, to druga pochodna funkcji $F(t)=(u(t), v(t))$ jednej zmiennej t wyraża się wzorem

$$F''(t_0)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right)_0(u'(t_0))^2+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0 u''(t_0)+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)_0 u'(t_0)v'(t_0)+ \tag{1.12.3}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)_0(v'(t_0))^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0 v''(t_0).$$

Szczególnie ważny przypadek zachodzi, gdy funkcje $u(t)$ i $v(t)$ są liniowe. Wówczas na podstawie wzoru (1.12.3) mamy

$$\frac{d^2F}{dt^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2. \tag{1.12.4}$$

Używając pojęcia różniczki dla funkcji jednej zmiennej (patrz I, § 6.1 oraz por. wzór (1.9.5)), wzór (1.12.4) możemy zapisać w postaci określającej *drugą różniczkę* (*różniczkę rzędu drugiego*) *funkcji* $F(t)$:

$$d^2F=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(du)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}dudv+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(dv)^2. \tag{1.12.5}$$

Analogicznie otrzymujemy *trzecią różniczkę* (*różniczkę rzędu trzeciego*) funkcji $F(t)=f(u(t), v(t))$:

$$d^3F=\frac{\partial^3 f}{\partial u^3}(du)^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial u^2\partial v}(du)^2dv+3\frac{\partial^3 f}{\partial u\partial v^2}du(dv)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial v^3}(dv)^3, \tag{1.12.6}$$

gdzie $f(u, v)$ jest funkcją klasy C^3 w pewnym obszarze, a funkcje $u(t)$, $v(t)$ jednej zmiennej t są liniowe. Rozważania te można uogólnić na *k-tą różniczkę* (*różniczkę rzędu k*) funkcji $F(t)=f(u(t), v(t))$.

ZADANIE 1.89. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji $z=(x^2+y^3)^{2x+3y+2}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x(2x+3y+2)(x^2+y^3)^{2x+3y+1}+2(x^2+y^3)^{2x+3y+2}\ln(x^2+y^3),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2(2x+3y+2)(x^2+y^3)^{2x+3y+1}+3(x^2+y^3)^{2x+3y+2}\ln(x^2+y^3).$$

Stąd

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(4x+6y+4)(x^2+y^3)^{2x+3y+1}+4x(x^2+y^3)^{2x+3y+1}+$$
$$+2x(2x+3y+2)\big((2x+3y+1)(x^2+y^3)^{2x+3y}2x+$$
$$+2(x^2+y^3)^{2x+3y+1}\ln(x^2+y^3)\big)+$$
$$+2\ln(x^2+y^3)\big((2x+3y+2)(x^2+y^3)^{2x+3y+1}2x+$$
$$+2(x^2+y^3)^{2x+3y+2}\ln(x^2+y^3)\big)+2(x^2+y^3)^{2x+3y+2}\frac{2x}{x^2+y^3}=$$
$$=2(x^2+y^3)^{2x+3y}[(2x+3y+2)(x^2+y^3)+2x(x^2+y^3)+$$
$$+2x^2(2x+3y+2)(2x+3y+1)+2x(x^2+y^3)+$$
$$+2\ln(x^2+y^3)(x(2x+3y+2)(x^2+y^3)+x(2x+3y+2)(x^2+y^3)+$$
$$+(x^2+y^3)^2\ln(x^2+y^3))]=$$
$$=2(x^2+y^3)^{2x+3y}[8x^4+18x^3+24x^3y+21x^2y+18x^2y^2+6x^2+6xy^3+2y^3+3y^4+$$
$$+2\ln(x^2+y^3)((4x^4+4x^2y^3+6x^3y+6xy^4+4x^3+4xy^3)+$$
$$+(x^2+y^3)^2\ln(x^2+y^2))],$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(12xy+18y^2+12y)(x^2+y^3)^{2x+3y+1}+9y^2(x^2+y^3)^{2x+3y+1}+$$
$$+3y^2(2x+3y+2)\big((2x+3y+1)(x^2+y^3)^{2x+3y}3y^2+$$
$$+3(x^2+y^3)^{2x+3y+1}\ln(x^2+y^3)\big)+$$
$$+3\ln(x^2+y^3)(3y^2(2x+3y+2)(x^2+y^3)^{2x+3y+1}+$$
$$+3(x^2+y^3)^{2x+3y+2}\ln(x^2+y^3)\big)+3(x^2+y^3)^{2x+3y+2}\frac{3y^2}{x^2+y^3}=$$
$$=3(x^2+y^3)^{2x+3y}[(4xy+6y^2+4y)(x^2+y^3)+3y^2(x^2+y^3)+$$
$$+3y^4(2x+3y+2)(2x+3y+1)+3y^2(x^2+y^3)+$$
$$+3\ln(x^2+y^3)(y^2(2x+3y+2)(x^2+y^3)+y^2(2x+3y+2)(x^2+y^3)+$$
$$+(x^2+y^3)^2\ln(x^2+y^3))]=$$
$$=3(x^2+y^3)^{2x+3y}[4x^3y+22xy^4+12x^2y^2+4x^2y+12x^2y^4+36xy^5+27y^6+$$
$$+39y^5+10y^4+3\ln(x^2+y^3)(4x^3y^2+6x^2y^3+4x^2y^2+4xy^5+6y^6+4y^5+$$
$$+(x^2+y^3)^2\ln(x^2+y^3))],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x(x^2+y^3)^{2x+3y+1} +$$
$$+2x(2x+3y+2)\big((2x+3y+1)(x^2+y^3)^{2x+3y}3y^2 +$$
$$+3(x^2+y^3)^{2x+3y+1}\ln(x^2+y^3)\big) +$$
$$+2\ln(x^2+y^3)\big((2x+3y+2)(x^2+y^3)^{2x+3y+1}3y^2 +$$
$$+3(x^2+y^3)^{2x+3y+2}\ln(x^2+y^3)\big)+2(x^2+y^3)^{2x+3y+2}\frac{3y^2}{x^2+y^3} =$$
$$=6(x^2+y^3)^{2x+3y}[x(x^2+y^3)+xy^2(2x+3y+2)(2x+3y+1)+$$
$$+y^2(x^2+y^3)+\ln(x^2+y^3)\big(x(2x+3y+2)(x^2+y^3)+$$
$$+(x^2+y^3)(2x+3y+2)y^2+(x^2+y^3)^2\ln(x^2+y^3)\big)] =$$
$$=6(x^2+y^3)^{2x+3y}[x^3+12x^2y^3+7x^2y^2+10xy^3+9xy^4+2xy^2+y^5+4x^3y^2+$$
$$+\ln(x^2+y^3)(2x^4+5x^2y^3+3x^3y+3xy^4+2x^3+2xy^3+2x^3y^2+$$
$$+2xy^5+2x^2y^2+2y^5+3y^6+(x^2+y^3)^2\ln(x^2+y^3))] = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

ZADANIE 1.90. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{(1-xy)+(x+y)y}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1+y^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{(1-xy)+x(x+y)}{(1-xy)^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Stąd

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0.$$

ZADANIE 1.91. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji $z=\ln(x+\ln y)$.

Rozwiązanie. Mamy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x+\ln y)^{-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y}(x+\ln y)^{-1};$$

stąd

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(x+\ln y)^{-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}(x+\ln y)^{-1} - \frac{1}{y^2}(x+\ln y)^{-2} = -\frac{1}{y^2}(x+\ln y)^{-2}(1+x+\ln y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y}(x+\ln y)^{-2}.$$

Zadania

Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego funkcji (zad. 1.92 - 1.94):

1.92. $z=\sin^2(2x+y)$. **1.93.** $z=e^{xe^y}$. **1.94.** $z=\ln(x^2+y)$.

Obliczyć $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ (zad. 1.95 - 1.99):

1.95. $u=\sqrt{2xy+y^2}$. **1.96.** $u=y^{\ln x}$.

1.97. $u=\arcsin\frac{x-y}{x}$. **1.98.** $u=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

1.99. $u=x^2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-y^2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

1.100. Wykazać, że funkcja

$$u(x,y,z)=\frac{1}{r}, \quad \text{gdzie} \quad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}, \tag{1}$$

spełnia *równanie różniczkowe Laplace'a* (w układzie przestrzennym) (por. zad. 1.88):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Funkcję (1) nazywamy *potencjałem newtonowskim punktu* (x_0, y_0, z_0).

1.101. Wykazać, że funkcja $u(x,t)=A\sin(a\lambda t+\varphi)\sin\lambda x$ spełnia tzw. *równanie struny drgającej*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

1.102. Przekształcić równanie struny drgającej (1) wprowadzając nowe zmienne $u=x+at$, $v=x-at$.

§ 1.13. RÓŻNICZKI WYŻSZYCH RZĘDÓW FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Rozpatrzmy funkcję dwóch zmiennych $f(x,y)$ klasy C^1 w pewnym obszarze D. Jeżeli $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, są funkcjami różniczkowalnymi zmiennej t, przy czym $(x(t), y(t))\in D$, to zgodnie ze wzorem (1.9.5) różniczka rzędu pierwszego funkcji

$$F(t)=f(x(t),y(t)) \tag{1.13.1}$$

równa się

$$dF=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy, \tag{1.13.2}$$

gdzie dx oraz dy oznaczają różniczki funkcji $x=x(t)$, $y=y(t)$. Z drugiej strony, zauważmy, że na podstawie definicji podanej w § 1.11 różniczka zupełna funkcji f równa się

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy, \tag{1.13.3}$$

gdzie dx i dy oznaczają przyrosty zmiennych niezależnych x i y. Formalnie prawe strony wzorów (1.13.2) i (1.13.3) są identyczne. Faktycznie jednak prawa strona wzoru (1.13.2) przy pełnym zapisie jest następująca:

$$f'_x(x(t),y(t))x'(t)dt+f'_y(x(t),y(t))y'(t)dt, \tag{1.13.4}$$

zależy więc od zmiennej t, którą uważamy za ustaloną, oraz przyrostu dt, który może być dowolny. Natomiast prawa strona wzoru (1.13.3) jest następująca:

$$f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy, \tag{1.13.5}$$

przy czym współrzędne x i y uważamy za ustalone, natomiast przyrosty dx i dy mogą być dowolne.

Przy zrobionych więc założeniach mamy następującą równość dla funkcji (1.13.1):

$$df(x(t),y(t))=[df(x,y)]_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}}. \tag{1.13.6}$$

Po lewej stronie wzoru (1.13.6) mamy różniczkę funkcji (złożonej) jednej zmiennej t, po prawej stronie (1.13.6) wyrażenie postaci (1.13.5), w którym robimy podstawienie $x=x(t), y=y(t)$.

Drugą różniczkę (różniczkę rzędu drugiego) zupełną $d^2f(x,y)$ funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$ określa się w ten sposób, aby przy zrobionych założeniach oraz założeniach, że funkcja f jest klasy C^2 oraz funkcje $x(t)$ i $y(t)$ są liniowe, był prawdziwy następujący wzór:

$$d^2f(x(t),y(t))=[d^2f(x,y)]_{\substack{x=x(t)\\y=y(t)}}. \tag{1.13.7}$$

Jeżeli więc funkcja $f(x,y)$ jest klasy C^2 w pewnym obszarze D, to biorąc pod uwagę wzór (1.12.5) *drugą różniczkę zupełną* (*różniczkę zupełną rzędu drugiego*) $d^2f(x,y)$ *funkcji* $f(x,y)$ definiujemy wzorem

$$d^2f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2, \tag{1.13.8}$$

przy czym dx^2 jest przyjętym skrótowym zapisem $(dx)^2$ i podobnie dy^2; dx^2 należy odróżnić od $d(x^2)=2xdx$.

Zgodnie z tą definicją d^2f jest jednorodnym wielomianem kwadratowym (formą kwadratową) względem przyrostów dx i dy zmiennych x i y. Można udowodnić, że *przy zrobionych założeniach wśród wszystkich wielomianów kwadratowych względem dx i dy wielomian*

$$df+\tfrac{1}{2}d^2f \tag{1.13.9}$$

najlepiej przybliża przyrost funkcji Δf (por. § 1.15).

Analogicznie, jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^3 w pewnym obszarze D, to biorąc pod uwagę wzór (1.12.6) *trzecią różniczkę zupełną* (*różniczkę zupełną rzędu trzeciego*) $d^3f(x, y)$ *funkcji* $f(x, y)$ definiujemy wzorem

$$d^3f(x,y)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3. \tag{1.13.10}$$

W wyrażeniu tym uważamy punkt (x, y) za ustalony, natomiast za zmienne uważamy przyrosty dx i dy. Wobec tego trzecia różniczka jest względem tych przyrostów dx i dy jednorodnym wielomianem trzeciego stopnia, czyli formą sześcienną. Można udowodnić, że *przy zrobionych założeniach wśród wszystkich wielomianów stopnia trzeciego wielomian*

$$df+\tfrac{1}{2}d^2f+\tfrac{1}{6}d^3f \tag{1.13.11}$$

najlepiej przybliża przyrost funkcji Δf (por. § 1.15).

Widać już sposób, w jaki określamy różniczki zupełne dowolnie wysokich rzędów. Formalnym sposobem określania różniczek wyższych rzędów zajmiemy się w następnym paragrafie.

§ 1.14. OPERACJE DYSTRYBUTYWNE (LINIOWE) W PRZESTRZENI LINIOWEJ I ICH ZASTOSOWANIA PRZY OBLICZANIU RÓŻNICZEK ZUPEŁNYCH

Określenie przestrzeni liniowej podaliśmy w części I w § 9.7 (str. 173). Z grubsza biorąc, zbiór X jest *przestrzenią liniową* (*nad ciałem liczb rzeczywistych*), gdy w zbiorze X jest określone działanie *dodawania elementów* (*wektorów*) tego zbioru oraz działanie *mnożenia elementu* (*wektora*) *zbioru* X *przez liczbę* (*skalar*), przy czym działania te muszą spełniać określone aksjomaty.

Niech będą teraz dane dwie przestrzenie liniowe X i Y. Mówimy, że w przestrzeni X jest określona *operacja* (*operator*) A o wartościach z przestrzeni Y, jeżeli jest określone przyporządkowanie, na podstawie którego każdemu elementowi przestrzeni X odpowiada dokładnie jeden element przestrzeni Y. Za pomocą symboli fakt ten notujemy następująco:

$$A: X \to Y.$$

Widzimy, że określenie operacji jest analogiczne do określenia funkcji, z tą tylko różnicą, że zbiory X i Y nie muszą być zbiorami liczbowymi.

W szczególności możemy rozpatrywać operacje A przekształcające przestrzeń liniową w siebie.

Operację A z przestrzeni X w Y nazywamy *funkcjonałem*, jeżeli przestrzeń Y jest przestrzenią liczb rzeczywistych (czyli $Y=\mathscr{R}$). Mówimy wówczas, że *funkcjonał* A *jest określony w przestrzeni* X.

Operację A nazywamy *operacją addytywną*, jeżeli dla każdych dwóch x_1 i x_2 z przestrzeni X ma miejsce relacja

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2. \tag{1.14.1}$$

Operację A nazywamy *operacją jednorodną*, jeżeli dla każdej liczby a i dla każdego elementu x z przestrzeni X zachodzi relacja

$$A(ax)=aA(x). \tag{1.14.2}$$

Operację addytywną i jednorodną nazywamy *operacją dystrybutywną (liniową)*.

Łatwo sprawdzić, że *zbiór operacji dystrybutywnych odwzorowujących X w Y jest zbiorem liniowym przy następujących działaniach*:

$$(A+B)(x)=A(x)+B(x), \tag{1.14.3}$$

$$(aA)(x)=aA(x). \tag{1.14.4}$$

Na przykład funkcjonałem dystrybutywnym jest w przestrzeni ciągów zbieżnych granica ciągu, a w przestrzeni funkcji ciągłych na przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ – całka oznaczona w granicach od a do b.

Niech teraz D oznacza pewien obszar na płaszczyźnie, F przestrzeń liniową wszystkich funkcji $f=f(x, y)$ klasy C^2 na zbiorze D. W przestrzeni liniowej F działania na elementach określamy następująco:

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y), \tag{1.14.5}$$

$$(af)(x,y)=af(x,y). \tag{1.14.6}$$

Niech G oznacza przestrzeń liniową wszystkich funkcji klasy C^1 na zbiorze D. Niech symbol $\partial/\partial x$ oznacza operację, która każdej funkcji $f(x, y)$ z przestrzeni F przyporządkowuje funkcję $\partial f/\partial x$ z przestrzeni G. Operacja ta cząstkowego różniczkowania jest addytywna i jednorodna, ponieważ

$$\frac{\partial}{\partial x}(f+g)=\frac{\partial}{\partial x}f+\frac{\partial}{\partial x}g=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}, \tag{1.14.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(af)=a\frac{\partial}{\partial x}f=a\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{1.14.8}$$

Analogicznie określamy operację $\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Niech teraz Δx i Δy będą dowolnymi stałymi. Wówczas operacja

$$d=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y} \tag{1.14.9}$$

jest również operacją dystrybutywną przekształcającą przestrzeń F w przestrzeń G. Wartości operacji postaci (1.14.9) dla ustalonej funkcji f, w ustalonym punkcie (x_0, y_0), a przy różnych przyrostach Δx i Δy równają się wartościom różniczki zupełnej funkcji f w punkcie (x_0, y_0) (por. §§ 1.11 i 1.13)

Niech teraz d^2 oznacza złożenie opracji d ze sobą; mamy więc $d^2f=d(df)$, tzn.

$$d^2f=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}f+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}f\right)+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}f+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}f\right), \tag{1.14.10}$$

czyli

$$d^2f=\Delta^2x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\Delta^2y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{1.14.11}$$

Operacja dystrybutywna d^2 przekształca poprzednio określoną przestrzeń F w przestrzeń H wszystkich funkcji $f(x, y)$ klasy C (czyli po prostu ciągłych) na zbiorze D.

Wartości operacji d^2 ustalonej funkcji $f(x, y)$ w ustalonym punkcie (x_0, y_0), a przy dowolnych stałych Δx i Δy są wartościami drugiej różniczki zupełnej funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0) (por. § 1.13).

Przy okazji zaznaczamy jeszcze raz, że jeżeli rozpatrujemy funkcję dwóch zmiennych $f(x, y)$, to symbole dx i Δx oznaczają dokładnie to samo, to znaczy przyrost zmiennej niezależnej x. Podobnie ma się rzecz z symbolami dy i Δy. Natomiast symbole df i Δf mają różne znaczenia (por. § 1.13).

Na podstawie opisanego tutaj procesu często drugą różniczkę zupełną funkcji f zapisujemy za pomocą następującego symbolu:

$$\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f, \tag{1.14.12}$$

przy czym symbol potęgi operatora różniczkowego należy rozumieć w sposób powyżej opisany. Zapis ten pozwala w łatwy sposób zapamiętać wzór na drugą różniczkę zupełną funkcji f. Pamiętając bowiem, że *kwadrat w tym przypadku oznacza złożenie operatora napisanego w nawiasie z samym sobą* oraz że mamy do czynienia z operatorami dystrybutywnymi, jako wynik przy zrobionych założeniach otrzymamy wyrażenie następujące:

$$\left(dx^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2dxdy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+dy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f, \tag{1.14.13}$$

czyli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2=d^2f. \tag{1.14.14}$$

Zauważmy, że operator w nawiasie wyrażenia (1.14.13) jest formalnie algebraicznym kwadratem operatora $\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)$, z tym że stałe podnosi się algebraicznie do kwadratu, a operatory składa. Pamiętając o tych zasadach i posługując się wzorem Newtona na sześcian dwumianu $(a+b)^3$ otrzymujemy bez żadnych trudności wzór na trzecią różniczkę zupełną funkcji $f(x, y)$ klasy C^3 w pewnym obszarze (por. § 1.13):

$$d^3f=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f= \tag{1.14.15}$$

$$=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

Ogólnie, posługując się wzorem na rozwinięcie dwumianu Newtona $(a+b)^k$ (por. I, § 1.9) otrzymujemy wzór na *k-tą różniczkę zupełną* (*różniczkę zupełną rzędu k*) funkcji

$f(x, y)$ klasy C^k w pewnym obszarze:

$$(1.14.16)\quad d^k f=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f=$$

$$=\frac{\partial^k f}{\partial x^k}dx^k+\binom{k}{1}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}dx^{k-1}dy+\binom{k}{2}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-2}\partial y^2}dx^{k-2}dy^2+\ldots+\frac{\partial^k f}{\partial y^k}dy^k.$$

Dzięki takiemu algebraicznemu formalizmowi tą samą drogą otrzymujemy też wzory na różniczki zupełne wyższych rzędów funkcji większej liczby zmiennych.

PRZYKŁAD. Załóżmy, że funkcja $g(x, y, z)$ jest klasy C^2 w pewnym obszarze Z Mamy

$$dg=\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy+\frac{\partial g}{\partial z}dz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)g,$$

skąd

$$(1.14.17)\quad d^2g=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g.$$

Wykorzystując wzór na kwadrat trójmianu $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$, na podstawie algebraicznego formalizmu otrzymujemy

$$(1.14.18)\quad d^2g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}dz^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}dx\,dy+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}dx\,dz+2\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}dy\,dz.$$

§ 1.15. WZÓR TAYLORA DLA FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Niech funkcja $f(x, y)$ będzie funkcją klasy C^n w pewnym otoczeniu U punktu (x_0, y_0). Niech dx i dy oznaczają dowolnie dobrane, ale dostatecznie małe przyrosty zmiennych niezależnych tak, aby punkt (x_0+dx, y_0+dy) należał jeszcze do otoczenia U punktu (x_0, y_0). Wówczas istnieje taka liczba θ spełniająca nierówność $0<\theta<1$, że ma miejsce wzór, zwany *wzorem Taylora*:

$$(1.15.1)\quad (\Delta f)_{(x_0,y_0)}=(df)_{(x_0,y_0)}+\frac{1}{2}(d^2f)_{(x_0,y_0)}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}(d^{n-1}f)_{(x_0,y_0)}+$$

$$+\frac{1}{n!}(d^n f)_{(x_0+\theta dx,\,y_0+\theta dy)},$$

gdzie

$$(1.15.2)\quad (\Delta f)_{(x_0,y_0)}=f(x_0+dx, y_0+dy)-f(x_0, y_0).$$

Wzór Taylora wyjaśnia, dlaczego df jest najlepszym przybliżeniem liniowym Δf, $df+\frac{1}{2}d^2f$ najlepszym przybliżeniem kwadratowym Δf, a $df+\frac{1}{2}d^2f+\frac{1}{6}d^3f$ najlepszym przybliżeniem sześciennym Δf (por. § 1.13).

W przypadku funkcji $f(x, y)$ dwóch zmiennych przy oznaczeniu przyrostu zmiennej x przez h, a przyrostu zmiennej y przez k, *wzór Taylora* przy $n=2$ wygodnie jest zapisać w postaci

$$(1.15.3)\quad f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+f'_x(x_0, y_0)\,h+f'_y(x_0, y_0)\,k+$$
$$+\tfrac{1}{2}(f''_{xx}h^2+2f''_{xy}hk+f''_{yy}k^2)_{(x_0+\theta h,\, y_0+\theta k)},$$

gdzie wartości drugich pochodnych są obliczone w pewnym punkcie $(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$, gdzie θ jest odpowiednio dobraną liczbą z przedziału (0, 1).

Uwaga. Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych dowodzi się, rozważając funkcję pomocniczą

$$(1.15.4)\qquad F(t)=f(x_0+t\,dx, y_0+t\,dy),$$

skąd otrzymujemy $(\Delta f)_{(x_0, y_0)}=F(1)-F(0)$. Stosując do funkcji (1.15.4) wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej (patrz I, § 11.2) otrzymujemy wzór (1.15.1). Przy różniczkowaniu funkcji $F(t)$ musimy stosować wzory podane w § 1.9 i § 1.12, a w szczególności wzory (1.9.4') i (1.12.4), wobec tego, że wyrażenia $x_0+t\,dx$ oraz $y_0+t\,dy$ są funkcjami liniowymi zmiennej t.

Biorąc pod uwagę to ostatnie widzimy, że wzór Taylora wyjaśnia również związki między wzorem na pochodną funkcji jednej zmiennej t złożonej z funkcji f wielu zmiennych, z których każda wyrażona jest przez funkcję liniową zmiennej t, a wzorem na różniczkę zupełną funkcji f (por. np. wzory (1.12.5), (1.12.6), (1.13.8), (1.13.10)).

Dla funkcji p zmiennych $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ zachodzi *wzór Taylora* analogiczny do wzoru (1.15.2), z tym że Δf, df, d^2f, ..., $d^{n-1}f$ są brane w punkcie $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_p^{(0)})$, a d^nf jest wzięte w punkcie pośrednim $(x_1^{(0)}+\theta\,dx_1, x_2^{(0)}+\theta\,dx_2, \ldots, x_p^{(0)}+\theta\,dx_p)$, gdzie $0<\theta<1$.

Zadanie 1.103. Wyznaczyć trzy pierwsze różniczki występujące we wzorze Taylora dla funkcji $f(x, y)=e^x\sin y$ w otoczeniu punktu (0, 0).

Rozwiązanie. Korzystamy ze wzoru (1.15.1) oraz wzoru (1.14.16) na różniczkę funkcji f rzędu n. Przyjmijmy w tym wzorze $x_0=0$, $y_0=0$, $dx=x$, $dy=y$. Symbol $(f(x, y))_0$ niech oznacza wartość funkcji $f(x, y)$ w punkcie (0, 0), a symbol $(d^nf)_0$ wartość różniczki rzędu n w tym punkcie. Mamy $(f(x, y))_0=(e^x\sin y)_0=0$. Obliczamy następnie kolejno różniczki do rzędu trzeciego:

$$(df)_0=(e^x\sin y)_0\,x+(e^x\cos y)_0\,y=y,$$

$$(d^2f)_0=(e^x\sin y)_0\,x+2(e^x\cos y)_0\,xy-(e^x\sin y)_0\,y^2=2xy,$$

$$(d^3f)_0=(e^x\sin y)_0\,x^3+3(e^x\cos y)_0\,x^2y-3(e^x\sin y)_0\,xy^2-(e^x\cos y)_0\,y^3=3x^2y-y^3.$$

Po podstawieniu obliczonych różniczek do wzoru (1.15.1) otrzymujemy rozwinięcie danej funkcji w otoczeniu punktu (0, 0):

$$e^x\sin y=y+xy+\tfrac{1}{2}x^2y-\tfrac{1}{6}y^3+R_4.$$

ZADANIE 1.104. Wyznaczyć 3 pierwsze wyrazy rozwinięcia funkcji $f(x, y)=e^x \ln(1+y)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu (0, 0).

Rozwiązanie. Podobnie jak w zadaniu poprzednim mamy $x_0=0$, $y_0=0$, $dx=x$, $dy=y$. Mamy $(f(x, y))_0=(e^x \ln(1+y))_0=0$. Obliczmy następnie

$$(df)_0=(e^x \ln(1+y))_0\, dx+\left(e^x\cdot\frac{1}{1+y}\right)_0 dy=dy=y,$$

$$(d^2f)_0=(e^x \ln(1+y))_0\, d^2x+\left(2e^x\cdot\frac{1}{1+y}\right)_0 dx\,dy-\left(e^x\cdot\frac{1}{(1+y)^2}\right)_0 d^2y=$$

$$=2\,dx\,dy-dy^2=2xy-y^2,$$

$$(d^3f)_0=(e^x \ln(1+y))_0\, d^3x+\left(3e^x\cdot\frac{1}{1+y}\right)_0 d^2x\,dy-\left(3e^x\cdot\frac{1}{(1+y)^2}\right)_0 dx\,d^2y+$$

$$+\left(2e^x\cdot\frac{1}{(1+y)^3}\right)_0 d^3y=$$

$$=3\,d^2x\,dy-3\,dx\,d^2y+2\,d^3y=3x^2y-3xy^2+2y^3;$$

stąd

$$e^x \ln(1+y)=(f)_0+\frac{(df)_0}{1!}+\frac{(d^2f)_0}{2!}+\frac{(d^3f)_0}{3!}+R_4=$$

$$=y+\frac{1}{2!}(2xy-y^2)+\frac{1}{3!}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+R_4.$$

Zadania

1.105. Dana jest funkcja $f(x, y)=2x^3+y^2+x^2y$. Zastosować wzór Taylora przy $n=3$.

1.106. Dana jest funkcja $f(x, y)=e^{xy}$. Rozwinąć $f(x+h, y+k)$ według potęg h i k, poprzestając na wyrazach rzędu trzeciego względem h i k.

1.107. Dana jest funkcja $f(x, y)=\ln xy$. Rozwinąć $f(x+h, y+k)$ według potęg h i k, poprzestając na wyrazach rzędu czwartego względem h i k.

§ 1.16. EKSTREMA LOKALNE FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

Niech funkcja $z=f(x, y)$ będzie określona w pewnym obszarze D. Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) należącym do obszaru D *maksimum lokalne słabe*, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo S punktu (x_0, y_0), że dla każdego punktu (x, y) należącego do sąsiedztwa S jest spełniona nierówność (słaba):

$$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0). \tag{1.16.1}$$

Jeżeli zamiast nierówności (1.16.1) jest. spełniona nierówność (ostra):

$$f(x,y)<f(x_0,y_0), \tag{1.16.2}$$

mówimy wówczas o *maksimum lokalnym mocnym*. Analogicznie nierówności

$$f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0), \tag{1.16.3}$$

$$f(x,y)>f(x_0,y_0) \tag{1.16.4}$$

określają odpowiednio *minimum lokalne słabe* oraz *minimum lokalne mocne*.

Mówimy, że funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie (x_0,y_0) *ekstremum lokalne słabe* (*mocne*), jeżeli w tym punkcie ma maksimum lokalne słabe (mocne) lub minimum lokalne słabe (mocne). Zamiast ekstremum słabe mówi się czasem *ekstremum niewłaściwe*, a zamiast ekstremum mocne mówi się *ekstremum właściwe*.

Mówiąc krótko: *maksimum* (*minimum*) *lokalne*, będziemy mieli na myśli maksimum (minimum) lokalne słabe, i podobnie dla ekstremum.

Mamy następujące twierdzenia dotyczące ekstremów lokalnych:

(1.16.5) *Jeżeli funkcja* $f(x,y)$ *ma w punkcie* (x_0,y_0) *ekstremum lokalne* (*słabe lub mocne*) *oraz ma w tym punkcie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to*

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0.$$

(1.16.6) *Jeżeli funkcja* $f(x,y)$ *jest klasy* C^2 *w pewnym otoczeniu punktu* (x_0,y_0) *oraz są spełnione następujące warunki*:

1° $f'_x(x_0,y_0)=0$,

2° $f'_y(x_0,y_0)=0$,

3° $\delta=W(x_0,y_0)=(f''_{xy}(x_0,y_0))^2-f''_{xx}(x_0,y_0)f''_{yy}(x_0,y_0)<0$,

to w punkcie (x_0,y_0) *funkcja* $z=f(x,y)$ *ma ekstremum, przy czym jeżeli*

$$f''_{xx}(x_0,y_0)>0 \quad \textit{lub} \quad f''_{yy}(x_0,y_0)>0\,(^1),$$

to funkcja $z=f(x,y)$ *ma w tym punkcie minimum lokalne, jeżeli zaś*

$$f''_{xx}(x_0,y_0)<0 \quad \textit{lub} \quad f''_{yy}(x_0,y_0)<0,$$

to funkcja $z=f(x,y)$ *ma w tym punkcie maksimum lokalne.*

Uwaga. Jeżeli są spełnione warunki 1° i 2°, a nie jest spełniony warunek 3°, wówczas jeżeli $\delta>0$, to funkcja $z=f(x,y)$ nie ma w tym punkcie ekstremum, a jeżeli $\delta=0$, to w pewnych przypadkach jest ekstremum, np. funkcja $z=x^4+y^4$ w punkcie $(0,0)$ ma minimum, a w innych przypadkach może nie być ekstremum, np. funkcja $z=x^3+y^2$ w punkcie $(0,0)$ nie ma ekstremum lokalnego.

---

(1) Wyrażenia te na podstawie warunku 3° mają zgodne znaki.

ZADANIE 1.108. Zbadać ekstrema funkcji $f(x, y)=3x^3+3x^2y-y^3-15x$.

Rozwiązanie. Obliczmy pochodne

$$f'_x(x, y)=9x^2+6xy-15, \quad f'_y(x, y)=3x^2-3y^2,$$

$$f''_{xx}=18x+6y, \quad f''_{yy}=-6y, \quad f''_{xy}=6x.$$

Rozwiązujemy układ równań $f'_x=0$, $f'_y=0$, czyli po uproszczeniu układ

$$3x^2+2xy-5=0, \quad x^2-y^2=0.$$

Z drugiego równania wynika, że $y=x$ lub $y=-x$.

Podstawiając $y=x$ do pierwszego równania otrzymujemy $5x^2-5=0$, skąd $x=1$ lub $x=-1$, a następnie $y=1$ lub $y=-1$. Mamy dwa punkty $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$, w których może wystąpić ekstremum.

Podstawiamy teraz $y=-x$ do pierwszego równania, otrzymujemy $x^2=5$, stąd $x=\sqrt{5}$ lub $x=-\sqrt{5}$, a następnie $y=-\sqrt{5}$ lub $y=\sqrt{5}$. Mamy więc dwa następne punkty $C(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $D(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. Wypiszmy teraz wartości drugich pochodnych w punktach A, B, C, D:

	A	B	C	D
f''_{xx}	24	-24	$12\sqrt{5}$	$-12\sqrt{5}$
f''_{xy}	6	-6	$6\sqrt{5}$	$-6\sqrt{5}$
f''_{yy}	-6	$+6$	$6\sqrt{5}$	$-6\sqrt{5}$

Widzimy, że dla dwóch pierwszych układów rozwiązań f''_{xx} i f''_{yy} mają różne znaki, a więc warunek 3^0 istnienia ekstremum nie jest spełniony. Natomiast dla układu trzeciego i czwartego zachodzi $\delta<0$, czyli funkcja ma ekstremum, przy czym dla układu trzeciego jest to minimum, a dla układu czwartego jest to maksimum. A więc funkcja $f(x, y)=$ $=3x^3+3x^2y-y^3-15x$ ma minimum w punkcie $C(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, a maksimum w punkcie $D(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

Jak łatwo obliczyć,

$$f_{\min}=-10\sqrt{5}, \quad f_{\max}=10\sqrt{5}.$$

Natomiast wartości $f(1, 1)=-10$ i $f(-1, -1)=10$ nie są ekstremami.

ZADANIE 1.109. Wyznaczyć współrzędne punktów leżących na paraboli $y^2=6x$, których odległość od punktu $A(3, 12)$ jest ekstremalna.

Rozwiązanie. Kwadrat odległości punktu danego $A(3, 12)$ od punktu bieżącego krzywej $y^2=6x$ oznaczmy przez z; wówczas

$$z=(x-3)^2+(y-12)^2.$$

Wyznaczamy pochodną

$$\frac{dz}{dx}=2(x-3)+2(y-12)\frac{dy}{dx}.$$

Pochodną $\frac{dy}{dx}$ otrzymujemy ze związku $y^2=6x$; mamy $2y\frac{dy}{dx}=6$, a więc $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{y}$. Stąd

$$\frac{dz}{dx}=2(x-3)+2(y-12)\frac{3}{y}.$$

Pochodną dz/dx przyrównujemy do zera:

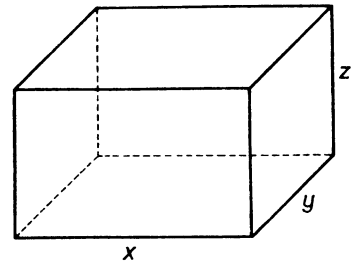
$$2(x-3)+2(y-12)\frac{3}{y}=0, \quad \text{skąd} \quad xy=36.$$

Rozwiązujemy obecnie układ równań

$$xy=36, \quad y^2=6x,$$

skąd mamy $x=6$, $y=6$. Z łatwego szkicu wnioskujemy, że jest to minimum.

ZADANIE 1.110. Określić wymiary otwartego zbiornika prostopadłościennego o objętości 32 cm^3 tak, żeby jego pole powierzchni było minimalne.



Rys. 1.17

Rozwiązanie. Objętość wynosi (rys. 1.17) $xyz=32$. Pole powierzchni zbiornika otwartego równe $S=2yz+2xz+xy$, zatem

$$S=\frac{64}{x}+\frac{64}{y}+xy.$$

Obliczamy pochodne

$$\frac{\partial S}{\partial x}=-\frac{64}{x^2}+y, \quad \frac{\partial S}{\partial y}=-\frac{64}{y^2}+x,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{128}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}=1, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=\frac{128}{y^3}.$$

Rozwiązujemy układ równań $\frac{\partial S}{\partial x}=0$, $\frac{\partial S}{\partial y}=0$, czyli po uproszczeniu

$$64-x^2y=0, \; 64-y^2x=0, \quad \text{skąd} \quad x=4, \; y=4.$$

Wartości drugich pochodnych w tym punkcie wynoszą

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}=1, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=2,$$

zatem

$$\delta=\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=1-4=-3<0$$

Minimalne pole powierzchni zbiornika mamy przy następujących jego wymiarach: $x=4$, $y=4$, $z=2$.

Zadania

Zbadać ekstrema funkcji $z=f(x, y)$ (zad. 1.111 - 1.139):

1.111. $f(x, y)=2x^2+3xy+y^2-2x-y+1$.

1.112. $f(x, y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

1.113. $f(x, y)=x^2-xy+2y^2-x+4y-5$.

1.114. $f(x, y)=x^3+y^3-3axy$.

1.115. $f(x, y)=x^3+3x^2y-6xy-3y^2-15x-15y$.

1.116. $f(x, y)=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$.

1.117. $f(x, y)=x^2+y^2+xy-6x-4y+5$.

1.118. $f(x, y)=x^2-6xy+y^3+3x+6y$.

1.119. $f(x, y)=4xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

1.120. $f(x, y)=x^2-xy+y^2-2x+y$.

1.121. $f(x, y)=x^3+y^2-6xy-48x$.

1.122. $f(x, y)=(x+y)^2-(x+5y+xy)$.

1.123. $f(x, y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

1.124. $f(x, y)=xy^2(a-x-y)^3$.

1.125. $f(x, y)=(6-x-y)x^2y^3$.

1.126. $f(x, y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$.

1.127. $f(x, y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$.

1.128. $f(x, y)=\sin x \sin y \sin(a-x-y)$.

1.129. $f(x, y)=\sin x \sin y \sin(x+y)$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$.

1.130. $f(x, y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

1.131. $f(x, y)=x^2+xy+y^2-4\ln|x|-10\ln|y|$.

1.132. $f(x, y)=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$. **1.133.** $f(x, y)=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

1.134. $f(x, y)=x^3+3xy^2-15x-12y$. **1.135.** $f(x, y)=(x-1)^2-2y^2$.

1.136. $f(x, y)=(x-1)^2-2y^2$. **1.137.** $f(x, y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y$.

1.138. $f(x, y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. **1.139.** $f(x, y)=\frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

1.140. W okrąg wpisać trójkąt o największym polu.

1.141. Liczbę $a>0$ podzielić na takie trzy części, aby ich iloczyn był największy.

1.142. Suma trzech boków trójkąta jest równa $2s$. Jakie należy obrać boki trójkąta, aby pole jego było największe?

1.143. Wyznaczyć współrzędne punktów leżących na okręgu $(x-6)^2+(y-1)^2=25$, których odległość od punktu $A(0, -7)$ jest ekstremalna.

1.144. Wyznaczyć współrzędne punktów leżących na paraboli $2y-x^2=0$, których odległość od punktu $A(4, 1)$ jest ekstremalna.

1.145. W kulę o średnicy $2R$ wpisać prostopadłościan o największej objętości; wyznaczyć jego krawędzie.

1.146. Znaleźć rozmiary prostokątnej wanny, która przy danej objętości V ma najmniejszą powierzchnię.

1.147. Znaleźć równoległościan prostokątny, który przy danej powierzchni S ma największą objętość.

1.148. Przedstawić liczbę $a>0$ w postaci iloczynu czterech dodatnich czynników, tak, aby ich suma była najmniejsza.

1.149. Na płaszczyźnie Oxy znaleźć punkt $M(x, y)$, dla którego suma kwadratów odległości od trzech prostych $x=0$, $y=0$, $x-y+1=0$ była najmniejsza.

1.150. Znaleźć trójkąt o danym obwodzie $2p$, który przy obrocie dookoła jednego ze swoich boków tworzy bryłę o największej objętości.

1.151. Na płaszczyźnie dane są trzy punkty materialne $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ o masach odpowiednio m_1, m_2, m_3. Zbadać, przy jakim położeniu punktu $P(x, y)$ moment bezwładności danego układu punktów względem P (tzn. suma $m_1|P_1P|^2+m_2|P_2P|^2+m_3|P_3P|^2$) będzie najmniejszy.

§ 1.17. EKSTREMA ABSOLUTNE FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona na zbiorze D, a punkt (x_0, y_0) będzie jednym z punktów zbioru D. Mówimy, że funkcja $f(x, y)$ *osiąga w punkcie* (x_0, y_0) *największą wartość* (*maksimum absolutne*) *w zbiorze* D, jeżeli dla każdego punktu (x, y) należącego do D zachodzi nierówność

(1.17.1) $$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0).$$

Podobnie określamy *najmniejszą wartość* (*minimum absolutne*) i ***ekstremum absolutne*** w danym zbiorze D.

Jeżeli zbiór D jest zbiorem otwartym i ograniczonym (a więc w szczególności obszarem ograniczonym), to maksimum absolutne musi być jednocześnie maksimum lokalnym, czyli należy najpierw wyznaczyć punkty, w których funkcja f ma maksimum lokalne, a potem spośród tych punktów wyznaczyć punkt (x_0, y_0), w którym maksimum lokalne jest największe.

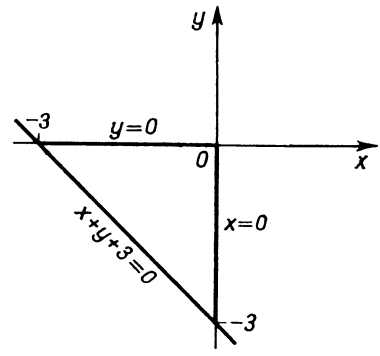
Jeżeli zbiór D jest zbiorem otwartym i nieograniczonym, to trzeba dodatkowo badać zmienność funkcji $f(x, y)$, gdy $x^2+y^2 \to +\infty$.

Jeżeli zbiór D jest obszarem domkniętym, to szukamy oddzielnie maksimum absolutnego we wnętrzu zbioru D i na jego brzegu (por. § 2.7), a następnie wybieramy maksimum większe.

Zachodzi następujące twierdzenie:

(1.17.2) *Funkcja ciągła $f(x, y)$ w zbiorze domkniętym i ograniczonym D jest ograniczona i przyjmuje wartość największą i najmniejszą, czyli ma maksimum i minimum absolutne w D.*

Praktyczne znalezienie maksimum i minimum absolutnego nawet w obszarze domkniętym i ograniczonym często jest jednak trudne.



Rys. 1.18

ZADANIE 1.152. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji

$$z = x^2+y^2-xy+x+y \tag{1}$$

w trójkącie domkniętym ograniczonym przez proste o równaniach

$$x=0, \quad y=0, \quad x+y+3=0. \tag{2}$$

Rozwiązanie. Aby znaleźć wartość największą i najmniejszą w podanym trójkącie (rys. 1.18), musimy zbadać

1° ekstrema lokalne funkcji (1) we wnętrzu trójkąta,

2° ekstrema lokalne funkcji (1) rozpatrywanej odpowiednio wzdłuż każdego z boków (przy takim ograniczeniu funkcja (1) staje się funkcją jednej zmiennej),

3° wartości funkcji w wierzchołkach trójkąta.

Rozpoczynamy od badania ekstremów funkcji (1) wewnątrz trójkąta ograniczonego prostymi (2).

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji (1):

$$z'_x=2x-y+1, \quad z'_y=2y-x+1.$$

Rozwiązując układ równań $z'_x=0$, $z'_y=0$, czyli $2x-y+1=0$, $2y-x+1=0$, otrzymujemy punkt $(-1, -1)$, w którym funkcja (1) może przyjąć ekstremum lokalne wewnątrz rozpatrywanego trójkąta; w punkcie tym mamy $z(-1, -1)=-1$.

Weźmy teraz pod uwagę bok trójkąta $x=0$. Wzdłuż tego boku funkcja (1) przyjmuje wartości $z(y)=y^2+y$, skąd $z'(y)=2y+1$ i ekstremum lokalne dla pierwszego boku jest przyjęte w punkcie $(0, -\frac{1}{2})$, w którym wartość funkcji (1) wynosi $z(0, -\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$.

Weźmy z kolei pod uwagę bok trójkąta $y=0$. Wzdłuż tego boku funkcja (1) przyjmuje wartości $z(x)=x^2+x$, skąd $z'(x)=2x+1$ i ekstremum lokalne dla tego boku może być w punkcie $(-\frac{1}{2}, 0)$, w którym wartość funkcji (1) wynosi $z(-\frac{1}{2}, 0)=-\frac{1}{4}$.

Przechodzimy do badania funkcji (1) wzdłuż boku $x+y+3=0$. Obliczając z tej równości liniowej y i wstawiając do (1), po redukcji otrzymujemy $z(x)=3x^2+9x+6$, skąd $z'(x)=6x+9$. W tym przypadku funkcja może osiągać ekstremum w punkcie $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$, w którym wartość funkcji (1) wynosi $z(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})=-\frac{3}{4}$.

Następnie bierzemy pod uwagę wierzchołki trójkąta i wartości funkcji (1) w tych wierzchołkach. Wierzchołki mają współrzędne $(0, 0), (0, -3), (-3, 0)$, a wartości funkcji (1) w tych punktach wynoszą odpowiednio $z(0, 0)=0$, $z(0, -3)=6$ i $z(-3, 0)=6$.

Porównując otrzymane wartości funkcji widzimy, że badana funkcja przyjmuje wartość największą $+6$ w dwóch punktach $(-3, 0)$ oraz $(0, -3)$ rozważanego trójkąta (oba te punkty są wierzchołkami trójkąta, a wartość najmniejszą równą -1 w punkcie $(-1, -1)$ (leżącym wewnątrz trójkąta).

ZADANIE 1.153. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $z=2xy$ w zbiorze $D=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Rozwiązanie. Podobnie jak w zadaniu poprzednim wyznaczamy z'_x, z'_y i przyrównujemy te pochodne cząstkowe do zera:

$$z'_x=2y=0, \quad z'_y=2x=0.$$

Stąd punkt o współrzędnych $x=y=0$ może być ekstremalny, a wartość funkcji w tym punkcie wynosi $z=0$.

Poszukujemy ewentualnych punktów ekstremalnych funkcji z na brzegu obszaru D. Dzielimy ten brzeg, który jest okręgiem, na dwa półokręgi:

$$y=\sqrt{1-x^2} \text{ dla } -1\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{i} \quad y=-\sqrt{1-x^2} \text{ dla } -1\leqslant x\leqslant 1.$$

Na pierwszym półokręgu funkcja z przyjmuje postać

$$z=2x\sqrt{1-x^2};$$

stąd

$$\frac{dz}{dx}=2\sqrt{1-x^2}-2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}=2\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}},$$

czyli

$$\frac{dz}{dx}=0, \quad \text{gdy} \quad \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Ewentualne punkty ekstremalne odpowiadające górnemu półokręgowi są $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, i wówczas wartość funkcji $z=1$, oraz $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, i wówczas wartości funkcji $z=-1$. Analogicznie na drugim półokręgu funkcja przyjmuje wartość $z=1$ w punkcie $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oraz wartość $z=-1$ w punkcie $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Funkcja $z=2xy$ przyjmuje więc w punktach $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ największą wartość równą 1, a w punktach $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ najmniejszą wartość równą -1.

ZADANIE 1.154. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $z=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$ w prostokącie $D=\{(x,y)\colon 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\pi\}$.

Rozwiązanie. Wyznaczamy

$$z'_x=\cos x+\cos(x+y)=2\cos(x+\tfrac{1}{2}y)\cos\tfrac{1}{2}y,$$

$$z'_y=\cos y+\cos(x+y)=2\cos(\tfrac{1}{2}x+y)\cos\tfrac{1}{2}x.$$

Pochodne z'_x i z'_y wewnątrz obszaru D przyjmują wartość zero w punkcie $x=\frac{1}{3}\pi$, $y=\frac{1}{3}\pi$. W tym punkcie wartość funkcji z wynosi

$$z=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}=\tfrac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Poszukujemy punktów ekstremalnych na brzegu D.

Weźmy pod uwagę bok prostokąta $x=0$. Wówczas

$$z=2\sin y, \quad \text{skąd} \quad \frac{dz}{dy}=2\cos y.$$

W przedziale otwartym $(0, \frac{1}{2}\pi)$ pochodna dz/dy w żadnym punkcie nie równa się zeru.

Weźmy pod uwagę bok prostokąta $y=0$. Wówczas

$$z=2\sin x, \quad \text{skąd} \quad \frac{dz}{dx}=2\cos x.$$

Również ta pochodna w przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi)$ nie równa się zeru.

Weźmy teraz pod uwagę bok prostokąta $x=\frac{1}{2}\pi$. Wówczas

$$z=1+\sin y+\sin(\tfrac{1}{2}\pi+y).$$

Mamy

$$\frac{dz}{dy}=\cos y+\cos(\tfrac{1}{2}\pi+y)=2\cos(\tfrac{1}{4}\pi+y)\cos\tfrac{1}{4}\pi=\sqrt{2}\cos(\tfrac{1}{4}\pi+y);$$

stąd

$$\frac{dz}{dy}=0 \quad \text{dla} \quad y=\tfrac{1}{4}\pi.$$

W punkcie $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ funkcja przyjmuje wartość $z=1+\sqrt{2}$.

Podobnie wartością ekstremalną na boku prostokąta $y=\frac{1}{2}\pi$ jest $z=1+\sqrt{2}$ w punkcie $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

Uwaga. Wartość ekstremalna wychodzi taka sama, ponieważ badana funkcja jest symetryczna względem zmiennych x i y.

Obecnie obliczamy wartość funkcji w wierzchołkach prostokąta $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{1}{2}\pi, 0)$, $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. W punktach tych mamy odpowiednio $z=0$, $z=2$, $z=2$, $z=2$.

Ponieważ $\frac{3}{2}\sqrt{3}>2{,}5$, a $1+\sqrt{2}<2{,}5$, więc największą wartością, jaką przyjmuje funkcja z, jest $\frac{3}{2}\sqrt{3}$, a najmniejszą 0. Wartości te przyjęte są odpowiednio w punktach $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ i $(0, 0)$.

Zadania

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji (zad. 1.155 - 1.157):

1.155. $z=2x^2-2y^2$ w kole $x^2+y^2\leqslant 4$.

1.156. $z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$ w kole $x^2+y^2\leqslant 4$.

1.157. $z=2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2}$ w zbiorze $D=\{(x, y)\colon \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2\leqslant 1\}$.

Rozdział II

FUNKCJE UWIKŁANE

§ 2.1. FUNKCJE WIELOWARTOŚCIOWE (WIELOZNACZNE)

W paragrafie tym rozszerzymy podane poprzednio (patrz I, rozdz. IV) pojęcie funkcji.

Niech będą dane dwa zbiory A i B. Jeżeli każdemu elementowi zbioru A jest przyporządkowany jednoznacznie podzbiór zbioru B, to mówimy, że w zbiorze A została określona *funkcja wielowartościowa* (*wieloznaczna*) o *wartościach w zbiorze* B.

PRZYKŁAD. Niech zbiorami A i B będzie zbiór liczb naturalnych $\mathcal{N}$. Każdej liczbie naturalnej n przyporządkujmy zbiór jej dzielników naturalnych. Określiliśmy w ten sposób w zbiorze $\mathcal{N}$ funkcję wielowartościową o wartościach również w zbiorze $\mathcal{N}$. Oznaczmy tę funkcję literą Q. Mamy więc np.

$$Q(1)=\{1\}, \quad Q(2)=\{1,2\}, \quad Q(3)=\{1,3\}, \quad Q(4)=\{1,2,4\},$$

$$Q(5)=\{1,5\}, \quad Q(6)=\{1,2,3,6\}, \quad Q(7)=\{1,7\}, \quad Q(8)=\{1,2,4,8\},$$

$$Q(9)=\{1,3,9\}, \quad Q(10)=\{1,2,5,10\}.$$

Poprzednio rozważane funkcje dla odróżnienia nazywa się czasem *funkcjami jednowartościowymi* (*jednoznacznymi*).

Inne ważne przykłady funkcji wielowartościowych otrzymujemy przy odwracaniu (por. I, § 4.5) funkcji trygonometrycznych.

Oznaczmy dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$ przez $\operatorname{Arcsin} x$ zbiór wszystkich takich liczb y, dla których $\sin y = x$. W ten sposób określamy w przedziale domkniętym $\langle -1, 1\rangle$ funkcję nieskończenie wielowartościową $\operatorname{Arcsin} x$.

Podobnie funkcją wielowartościową określoną dla wszystkich liczb rzeczywistych jest funkcja $\operatorname{Arctg} x$, która dowolnej liczbie rzeczywistej x przyporządkowuje te wszystkie liczby y, dla których $\operatorname{tg} y = x$; z określenia tego widać, że każde dwie wartości funkcji $\operatorname{Arctg} x$ (przy tym samym x) różnią się o wielokrotność π.

Aby uniknąć niewygodnej wieloznaczności, wprowadzamy pojęcie gałęzi funkcji wielowartościowej. Niech A i B oznaczają zbiory liczbowe, a F funkcję wielowartościową określoną w zbiorze A i przyjmującą wartości ze zbioru B. Wówczas $F(x)$ oznacza podzbiór zbioru B przyporządkowany przez funkcję F elementowi x ze zbioru A.

Przez *gałąź* (*jednoznaczną*) *funkcji* F rozumiemy każdą funkcję f jednoznaczną, określoną i ciągłą w zbiorze A i taką, że dla każdego $x \in A$ mamy $f(x) \in F(x)$, czyli dla każdego $x \in A$ liczba $f(x)$ jest elementem zbioru $F(x)$.

Weźmy teraz pod uwagę funkcję η jednoznaczną, ale wielokrotną odwzorowującą zbiór C na zbiór D. Wówczas przez *funkcję odwrotną* G do funkcji η rozumiemy taką funkcję wielowartościową określoną w zbiorze D, która każdemu $x \in D$ przyporządkowuje zbiór tych wszystkich $y \in C$, dla których $\eta(y)=x$. Gałęzią jednoznaczną g funkcji G będzie wówczas każda funkcja jednoznaczna, określona i ciągła w zbiorze D i taka, że dla każdego $x \in D$ jest $\eta(g(x))=x$.

Na przykład przez gałąź funkcji wielowartościowej Arcsin x odwrotnej do funkcji $x=\sin y$ rozumiemy każdą jednowartościową funkcję ciągłą $g(x)$, określoną na przedziale domkniętym $\langle -1, 1\rangle$ i taką, że dla każdego x jest $\sin(g(x))=x$.

Oznaczmy dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$ przez $\arcsin x$ taką liczbę zawartą między $-\frac{1}{2}\pi$ a $+\frac{1}{2}\pi$, że $\sin(\arcsin x)=x$. Tak określona funkcja jest ciągła oraz jest gałęzią funkcji wielowartościowej Arcsin x, przy czym gałąź ta pokrywa się z poprzednio określoną jednowartościową funkcją oznaczoną tym samym symbolem $\arcsin x$.

Czasem spośród wielu gałęzi funkcji wielowartościowej wyróżniamy (jak na przykładzie podanym) jedną, którą nazywamy *gałęzią główną*.

Podane pojęcia odgrywają istotną rolę, gdy się rozpatruje funkcje zmiennej zespolonej (patrz rozdział XVI).

§ 2.2. FUNKCJE UWIKŁANE JEDNEJ ZMIENNEJ

Niech $F(x, y)$ będzie funkcją ciągłą w obszarze płaskim D. Mówimy, że y jest *funkcją uwikłaną* x w zbiorze A, jeżeli liczbie x należącej do zbioru A przyporządkujemy te wszystkie liczby y, dla których zachodzi relacja

$$F(x, y)=0, \tag{2.2.1}$$

przy czym punkty (x, y) należą do zbioru D. Funkcja uwikłana jest więc określona *ex definitione* w takim zbiorze A liczb a, dla których równanie

$$F(a, y)=0 \tag{2.2.2}$$

ma przy niewiadomej y co najmniej jedno rozwiązanie (będące liczbą rzeczywistą). W szczególności zbiór A może być pusty, np. relacja $x^2+y^2+1=0$ dla żadnego $x=a$ nie ma rozwiązania rzeczywistego względem y, ponieważ lewa strona tego równania jest zawsze dodatnia.

Określona relacją (2.2.1) funkcja uwikłana może być jednowartościowa, jak np. funkcja y określona równaniem

$$4x-2y+3=0, \tag{*}$$

lub wielowartościowa np. dwuwartościowa, jak funkcja y określona równaniem

$$x^2-y^2-4=0. \tag{**}$$

Funkcja zdefiniowana równaniem (*) określona jest dla wszystkich x, natomiast funkcja określona równaniem (**) określona jest dla $x \leqslant -2$ lub $x \geqslant 2$.

Funkcja zdefiniowaną przez postać uwikłaną daje się często napisać w tzw. *postaci jawnej* $y=f(x)$, np. funkcja określona równaniem (*) daje się napisać jako funkcja jawna w następującej formie:

$$y=2x+\tfrac{3}{2},$$

a funkcja określona równaniem (**) jako

$$y=\pm\sqrt{x^2-4}.$$

Czasem funkcja uwikłana nie daje się „rozwikłać" za pomocą znanych funkcji, np. funkcja y określona wzorem

$$e^{x+y}-\sin xy-1=0. \tag{***}$$

Mimo tego nie ma jednak istotnej teoretycznej różnicy czy definiujemy funkcję w postaci jawnej czy też w postaci uwikłanej, gdyż np. funkcja odwrotna do funkcji $y=g(x)$ jest *ex definitione* funkcją $y=g^{-1}(x)$ daną przez postać uwikłaną

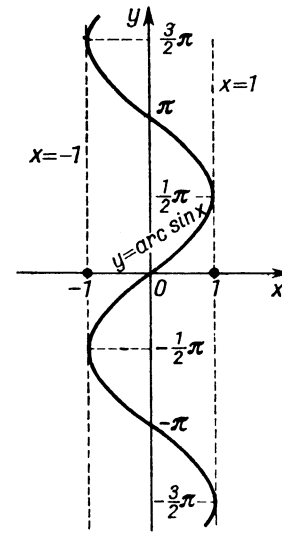
$$x-g(y)=0. \tag{2.2.3}$$

Różnica jest raczej metodyczna. Przy definicji funkcji w postaci jawnej na ogół przeprowadzamy najpierw dokładne badania zbioru, w którym jest funkcja określona, oraz własności jednowartościowości, natomiast przy definicji funkcji w postaci uwikłanej jesteśmy często pod tym względem mniej skrupulatni.

W każdym przypadku, jeżeli funkcja jednowartościowa $y=f(x)$ jest określona równaniem (2.2.1) w zbiorze A, to w tym zbiorze ma miejsce tożsamość (względem x):

$$F(x,f(x))=0. \tag{2.2.4}$$

Obecnie zajmiemy się twierdzeniem o istnieniu funkcji uwikłanej określonej równaniem typu (2.2.1). Aby uniknąć kłopotów związanych z ewentualną wieloznacznością funkcji uwikłanej, będziemy badali istnienie funkcji uwikłanej w *sensie lokalnym*, tzn. istnienie takiej funkcji jednoznacznej $y=f(x)$ (będącej ewentualnie gałęzią jednoznaczną funkcji wielowartościowej), która jest określona w pewnym otoczeniu punktu $x=x_0$, spełnia w tym otoczeniu warunek (2.2.4) oraz warunek początkowy $f(x_0)=y_0$. Ostatni warunek ogranicza właśnie często funkcję wieloznaczną do jej jednoznacznej gałęzi. Geometrycznie warunek ten oznacza, że wykres funkcji uwikłanej ma przechodzić przez punkt (x_0,y_0). Oczywiście jest to możliwe tylko wtedy, gdy liczby x_0 i y_0 są tak dobrane, że $F(x_0,y_0)=0$.



Rys. 2.1

Zauważmy, że np. dla funkcji wieloznacznej $y=\operatorname{Arcsin} x$ przez każdy punkt płaszczyzny (x_0,y_0), $-1<x_0<1$, taki że $\sin y_0=x_0$ (rys. 2.1), przechodzi dokładnie jedna krzywa, będąca wykresem gałęzi jednoznacznej $y=f(x)$ funkcji wieloznacznej $y=\operatorname{Arcsin} x$, natomiast gdy $x_0=-1$ albo gdy $x_0=1$, to przez odpowiedni punkt przechodzą dwie krzywe, będące wykresami gałęzi jednoznacznych funkcji wieloznacznej $y=\operatorname{Arcsin} x$.

Mamy następujące *twierdzenie o istnieniu funkcji uwikłanej*, określonej równaniem typu (2.2.1);

(2.2.5) *Jeżeli funkcja* $F(x, y)$ *spełnia warunki*:

1° $F(x_0, y_0)=0$,

2° *jest ciągła w otoczeniu punktu* (x_0, y_0),

3° *ma w otoczeniu punktu* (x_0, y_0) *ciągłą pochodną* F'_y *różną od zera w punkcie* (x_0, y_0), *to w pewnym otoczeniu punktu* $x=x_0$ *istnieje dokładnie jedna funkcja* $y=f(x)$ *ciągła, spełniająca warunki* $y_0=f(x_0)$ oraz $F(x, f(x))=0$ *dla każdego* x *z tego otoczenia.*

(2.2.6) *Jeżeli ponadto istnieje pochodna* F'_x *ciągła w otoczeniu punktu* (x_0, y_0), *to funkcja uwikłana* $y=f(x)$ *ma w pewnym otoczeniu punktu* $x=x_0$ *ciągłą pochodną daną wzorem*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

ZADANIE 2.1. Rozpatrzymy w otoczeniu punktu (0, 0) funkcję określoną równaniem (por. (***)):

$$e^{x+y}-\sin(xy)-1=0; \tag{1}$$

jak stwierdziliśmy, nie da się tej funkcji przedstawić w postaci jawnej.

Sprawdzamy, że w punkcie (0, 0) równanie (1) jest spełnione. Oznaczmy

$$F(x, y)=e^{x+y}-\sin(xy)-1. \tag{2}$$

Mamy

$$F'_x=e^{x+y}-y\cos xy, \quad \text{skąd} \quad F'_x(0,0)=1, \tag{3}$$

$$F'_y=e^{x+y}-x\cos xy, \quad \text{skąd} \quad F'_y(0,0)=1. \tag{4}$$

Ponieważ pochodna F'_y jest ciągła w otoczeniu punktu (0, 0), więc na podstawie twierdzeń (2.2.5) i (2.2.6) istnieje takie otoczenie $(-h, +h)$ punktu $x=0$, w którym jest określona dokładnie jedna funkcja $y=f(x)$ spełniająca tożsamościowo związek

$$e^{x+f(x)}-\sin(xf(x))-1=0 \tag{5}$$

oraz funkcja ta jest ciągła i różniczkowalna w tym otoczeniu, przy czym

$$f'(0)=-\frac{F'_x(0,0)}{F'_y(0,0)}=-1. \tag{6}$$

Przybliżone wartości funkcji $y=f(x)$ określonej związkiem (1) w dostatecznie małym otoczeniu zera znajdziemy, korzystając z rozwinięć w szereg Taylora funkcji e^u, gdzie $u=x+y$, oraz $\sin v$, gdzie $v=xy$; mamy mianowicie w przybliżeniu

$$e^{x+y}\approx 1+(x+y), \quad \sin xy\approx xy.$$

Podstawiając związki te do równości (1) otrzymujemy

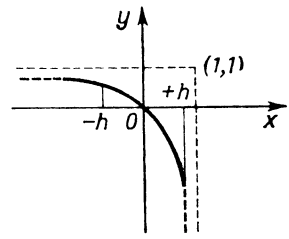
$$x+y-xy=0. \tag{7}$$

Wykresem funkcji $y=g(x)$ określonej z kolei równością (7), a będącej przybliżeniem naszej funkcji uwikłanej $y=f(x)$, jest więc hiperbola równoboczna określona równaniem (rys. 2.2):

$$(x-1)(y-1)=1. \tag{8}$$

Funkcję $g(x)$ określoną związkiem (7) lub (8) możemy łatwo napisać w postaci jawnej

$$g(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}.$$



Rys. 2.2

Obliczamy

$$g'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}, \quad \text{skąd} \quad g'(0)=-1.$$

Widzimy, że $g'(0)=f'(0)$. Biorąc pod uwagę, że pochodne $f'(x)$ i $g'(x)$ są ciągłe, stwierdzamy, że nie tylko funkcja $g(x)$ jest przybliżeniem w pewnym otoczeniu zera funkcji $f(x)$, ale także pochodna $g'(x)$ jest przybliżeniem pochodnej $f'(x)$, a w samym punkcie $x=0$ zarówno funkcje $f(x)$ i $g(x)$ jak i ich pochodne przyjmują te same wartości.

Uwaga. Różniczkując stronami tożsamość $F(x,f(x))=0$, na podstawie wzoru (1.9.4') otrzymujemy

$$F'_x(x,y)+F'_y(x,y)\frac{dy}{dx}=0;$$

stąd przy założeniu, że w otoczeniu punktu (x_0,y_0) pochodna cząstkowa $F'_y(x,y)$ jest różna od zera, otrzymujemy wzór podany w twierdzeniu (2.2.6). Kontynuując to postępowanie, w podobny sposób możemy obliczyć pochodne wyższych rzędów.

Wykorzystamy tę metodę w dalszych zadaniach (por. też § 2.4).

ZADANIE 2.2. Obliczyć pochodną y' ze związku $y^3-4xy+x^2=0$.

Rozwiązanie. Oznaczmy lewą stronę danego równania przez $F(x,y)$:

$$F(x,y)=y^3-4xy+x^2. \tag{1}$$

Obliczymy

$$F'_x=-4y+2x, \quad F'_y=3y^2-4x.$$

Warunek $F'_y\neq 0$ daje zastrzeżenie, że $3y^2-4x\neq 0$. Pochodną y' obliczamy na podstawie wzoru (2.2.6):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4y-2x}{3y^2-4x}, \quad \text{jeżeli} \quad 3y^2-4x\neq 0.$$

Obliczymy teraz tę samą pochodną, wykorzystując metodę podaną w uwadze. Każda funkcja uwikłana $y=f(x)$, wyznaczona równaniem (1), spełnia tożsamościowo równanie

$$(f(x))^3-4xf(x)+x^2=0. \tag{2}$$

Przy równiczkowaniu lewej strony tej tożsamości względem x musimy pamiętać, że pierwszy

wyraz $(f(x))^3$ jest funkcją złożoną $y=u^3$, gdzie $u=f(x)$; drugi wyraz $-4xf(x)$ różniczkujemy jako iloczyn dwu funkcji. Po zróżniczkowaniu stronami otrzymujemy

$$3(f(x))^2 f'(x)-4f(x)-4xf'(x)+2x=0,$$

lub prościej:

$$3y^2y'-4y-4xy'+2x=0, \quad \text{skąd} \quad (3y^2-4x)y'=4y-2x,$$

i wreszcie

$$y'=\frac{4y-2x}{3y^2-4x}, \quad \text{jeżeli} \quad 3y^2-4x\neq 0,$$

zgodnie z wynikiem poprzednim.

ZADANIE 2.3. Obliczyć pochodną y' ze związku $5x^2y^4-4y^2+x^2\sin y-10=0$.

Rozwiązanie. Różniczkując względem x dane równanie stronami i pamiętając, że y jest funkcją x, otrzymujemy

$$(10xy^4+20x^2y^3y')-8yy'+(2x\sin y+x^2\cos y\cdot y')=0,$$

skąd

$$(20x^2y^3-8y+x^2\cos y)y'=-10xy^4-2x\sin y.$$

Ostatecznie

$$y'=\frac{-10xy^4-2x\sin y}{20x^2y^3-8y+x^2\cos y}, \quad \text{jeżeli} \quad 20x^2y^3-8y+x^2\cos y\neq 0.$$

Czytelnik zechce obliczyć tę pochodną za pomocą wzoru (2.2.6) i porównać wyniki.

ZADANIE 2.4. Obliczyć pochodną y' ze związku

(1) $$a^y-x^2=0, \quad \text{gdzie} \quad a>0,\ a\neq 1.$$

Rozwiązanie. Różniczkując względem x stronami równanie (1), pamiętając, że y jest funkcją zmiennej x, otrzymujemy

$$a^y\ln a\frac{dy}{dx}-2x=0,$$

skąd

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{a^y\ln a}=\frac{2}{x\ln a}, \quad x\neq 0.$$

Czytelnik zechce obliczyć y z równania (1) jako jawną funkcję x, zróżniczkować i porównać z otrzymanym wynikiem.

ZADANIE 2.5. Obliczyć y'' ze związku

(1) $$y^3-2xy+x^4-12x+3y-17=0.$$

Rozwiązanie. Różniczkując stronami względem x równanie (1), otrzymujemy

$$3y^2y'-2y-2xy'+4x^3-12+3y'=0.$$

Po wyłączeniu y' poza nawias mamy

$$(3y^2-2x+3)y'-2y+4x^3-12=0, \tag{2}$$

skąd

$$y'=\frac{2y-4x^3+12}{3y^2-2x+3}, \quad \text{jeżeli} \quad 3y^2-2x+3\neq 0. \tag{3}$$

Aby obliczyć pochodną y'', różniczkujemy z kolei jeszcze raz równanie (2), otrzymując

$$(6yy'-2)y'+(3y^2-2x+3)y''-2y'+12x^2=0,$$

skąd

$$y''=\frac{2y'-12x^2-(6yy'-2)y'}{3y^2-2x+3}, \quad \text{jeżeli} \quad 3y^2-2x+3\neq 0,$$

przy czym zamiast y' należy podstawić (3).

ZADANIE 2.6. Ze związku

$$(s-t)st-3(t+1)=0$$

obliczyć pochodne ds/dt i d^2s/dt^2 dla $t=1$, $s=3$.

Rozwiązanie. Pisząc lewą stronę danego równania w postaci $F(t, s)=s^2t-st^2-3t-3$ obliczamy pochodną cząstkową

$$F'_s=2st-t^2=(2s-t)t, \quad \text{skąd} \quad F'_s(1, 3)=5\neq 0;$$

w dalszych rozważaniach przyjmujemy, że w otoczeniu punktu $(1, 3)$ jest $t\neq 0$ i $2s\neq t$.

Różniczkujemy równanie $F(t, s)=0$ względem t (pamiętając, że s jest funkcją t):

$$(2st-t^2)\frac{ds}{dt}+s^2-2st-3=0, \tag{1}$$

skąd

$$\frac{ds}{dt}=\frac{-s^2+2st+3}{(2s-t)t}. \tag{2}$$

Aby obliczyć drugą pochodną d^2s/dt^2, różniczkujemy równanie (1):

$$(2st-t^2)\frac{d^2s}{dt^2}+(2s-2t)\frac{ds}{dt}+2t\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+2s\frac{ds}{dt}-2t\frac{ds}{dt}-2s=0,$$

czyli

$$(2st-t^2)\frac{d^2s}{dt^2}+2t\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+4(s-t)\frac{ds}{dt}-2s=0,$$

skąd

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-2\frac{t\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+2(s-t)\frac{ds}{dt}-s}{(2s-t)t}. \tag{3}$$

Dla $t=1$, $s=3$ (jak łatwo sprawdzić, wartości te spełniają dane równanie) otrzymujemy

$$\frac{ds}{dt}=0, \quad \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{6}{5}.$$

Zadania

Obliczyć pochodne funkcji dy/dx (zad. 2.7 - 2.20):

2.7. $Ax+By+C=0$.

2.8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $a>0$, $b>0$.

2.9. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

2.10. $2y^2-4x^3y+5x^2-12=0$.

2.11. $\sin^2 x-x\cos y+1=0$,

2.12. $2\cos(x-2y)-2y+x=0$.

2.13. $x^2\ln y-y^2\ln x+1=0$.

2.14. $xy+\ln y+\ln x=0$.

2.15. $2y\sin x-2x\operatorname{arctg} y+3=0$.

2.16. $y+ye^{-x}-x=0$.

2.17. $y+x-e^{y/x}=0$.

2.18. $xe^{2y}-ye^{2x}=0$.

2.19. $y=1+y^x$.

2.20. $(x^2+y^2-ax)^2-b^2(x^2+y^2)=0$, $a>0$, $b>0$ (ślimak Pascala)

Obliczyć pochodne dy/dx i d^2y/dx^2 funkcji (zad. 2.21 - 2.27):

2.21. $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

2.22. $x^2+y^2+2x-4y-1=0$.

2.23. $e^{2x-3y}-10=0$.

2.24. $xe^y-y+1=0$.

2.25. $x-y+\ln y=0$.

2.26. $1+xy-\ln(e^{xy}+e^{-xy})=0$.

2.27. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\alpha\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $\alpha\neq 0$.

Obliczyć pochodne dx/dt i d^2x/dt^2 funkcji (w podanym punkcie) (zad. 2.28 - 2.32):

2.28. $\operatorname{tg}(x+t)-xt-1=0$, $(0, \frac{1}{4}\pi)$.

2.29. $2\sin x+\sin t-3xt+t-1=0$, $(0, \frac{1}{6}\pi)$.

2.30. $x^2-3xt+t^2-25=0$, $(0, 5)$.

2.31. $\frac{x}{t}-\frac{4}{x}-t+1=0$, $(1, 2)$.

2.32. $\frac{x+2t}{x-1}+3tx-2=0$, $(0, 2)$.

Obliczyć (zad. 2.33 - 2.35):

2.33. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}$ i $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}$, jeżeli $x^2-2xy+y^2+x+y-2=0$,

2.34. $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}$, jeżeli $e^{\varphi-2}+r\varphi-3r-1=0$.

2.35. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=\frac{1}{4}\pi}$, jeżeli $x\sin y+\cos 2y=\cos y$.

2.36. Znaleźć współczynnik kątowy stycznej do krzywej $x^2+y^2=10y$ w punkcie jej przecięcia z prostą $x=2$.

2.37. Znaleźć punkty, w których styczna do krzywej $x^2+y^2+2x-2y=2$ jest równoległa do osi a) Ox, b) Oy.

2.38. Funkcja $y(x)$ jest funkcją określoną równaniem $x^2+y^2+2axy=a$, $a>1$. Wykazać, że $\frac{d^2y}{dx^2}=0$; wyjaśnić otrzymany wynik.

§ 2.3. FUNKCJE UWIKŁANE WIELU ZMIENNYCH

Niech będzie dana funkcja $p+1$ zmiennych

(2.3.1) $$F(x_1, x_2, \ldots, x_p, u),$$

określona w pewnym obszarze W zawartym w przestrzeni euklidesowej $(p+1)$-wymiarowej $\mathscr{R}^{p+1}$, i niech punkt $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_p^{(0)}, u^{(0)})$ należy do obszaru W. Wówczas mamy następujące *twierdzenie o istnieniu funkcji uwikłanej wielu zmiennych* (por. twierdzenia (2.2.5) i (2.2.6)):

(2.3.2) *Jeżeli funkcja* $F(x_1, x_2, \ldots, x_p, u)$ *spełnia następujące warunki:*

1° $F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_p^{(0)}, u^{(0)})=0$,

2° *jest ciągła w pewnym otoczeniu punktu* $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_p^{(0)}, u^{(0)})$,

3° *ma ciągłą pochodną* F'_u *w otoczeniu punktu* P_0 *oraz pochodna ta w punkcie* P_0 *jest różna od zera,*

to w przestrzeni $\mathscr{R}^p$ *istnieje takie otoczenie punktu* $Q_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_p^{(0)})$, *w którym jest określona dokładnie jedna funkcja p zmiennych* $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, *ciągła i spełniająca w tym otoczeniu warunki:*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1, x_2, \ldots, x_p))=0, \quad f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_p^{(0)})=u^{(0)}.$$

(2.3.3) *Jeżeli ponadto istnieją w otoczeniu punktu* P_0 *pochodne ciągłe* $F'_{x_1}, F'_{x_2}, \ldots, F'_{x_p}, F'_u$ *(czyli funkcja* F *jest klasy* C^1 *w otoczeniu punktu* P_0*), to w pewnym otoczeniu punktu* Q_0 *funkcja* $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *ma wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu ciągłe (czyli*

jest klasy C^1), *przy czym pochodne te wyrażają się następującymi wzorami*:

$$f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = -\frac{F'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1, x_2, \ldots, x_p))}{F'_u(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1, x_2, \ldots, x_p))},$$

$$f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = -\frac{F'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1, x_2, \ldots, x_p))}{F'_u(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1, x_2, \ldots, x_p))},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f'_{x_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = -\frac{F'_{x_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1, x_2, \ldots, x_p))}{F'_u(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1, x_2, \ldots, x_p))}.$$

Uwaga. Podobnie jak w przypadku funkcji uwikłanej dwóch zmiennych, często (por. § 2.2) przy obliczaniu pochodnych cząstkowych funkcji uwikłanej $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ danej równaniem (2.3.1) zamiast stosowania wzoru (2.3.3) różniczkujemy stronami tożsamość

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p, f(x_1, x_2, \ldots, x_p)) = 0, \tag{2.3.4}$$

stosując reguły na obliczanie pochodnych cząstkowych funkcji złożonej, a następnie przy założeniu, że pochodna F'_u jest różna od zera, wyznaczamy $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \ldots, f'_{x_p}$.

Podobnie postępujemy przy obliczaniu pochodnych cząstkowych rzędu drugiego lub wyższych.

ZADANIE 2.39. Wyznaczyć punkty przestrzeni, przez które przechodzi gałąź jednoznaczna funkcji uwikłanej $z=f(x, y)$, określonej równaniem

$$x^2z + yz^2 + 1 = 0, \tag{1}$$

oraz wyznaczyć w tych punktach pochodne cząstkowe funkcji f rzędu pierwszego i drugiego.

Rozwiązanie. Oznaczymy lewą stronę równania (1) przez $F(x, y, z)$. Obliczamy pochodną

$$F'_z = x^2 + 2yz\,; \tag{2}$$

zgodnie z twierdzeniem (2.3.2) przez każdy punkt przestrzeni spełniający równanie (1) i nie leżący na powierzchni stożkowej $x^2+2yz=0$, czyli spełniający warunek $x^2+2yz\neq 0$, przechodzi gałąź jednoznaczna funkcji uwikłanej określonej równaniem (1).

Traktując równość (1) jako tożsamość, w której zmienna z jest funkcją zmiennych x i y, po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$2xz + x^2z'_x + 2yzz'_x = 0, \tag{4}$$

skąd znajdujemy

$$z'_x = \frac{-2xz}{x^2+2yz}, \quad \text{gdzie} \quad x^2+2yz\neq 0, \tag{5}$$

oraz

$$x^2z'_y + z^2 + 2yzz'_y = 0, \tag{6}$$

skąd obliczamy

$$z'_y=\frac{-z^2}{x^2+2yz}, \quad \text{gdzie} \quad x^2+2yz\neq 0. \tag{7}$$

Równie łatwo otrzymaljbyśmy wzory (5) i (7) na podstawie wzoru z twierdzenia (2.3.3).

Aby wyznaczyć pochodne rzędu drugiego, różniczkujemy tożsamość (4) względem x:

$$2z+2xz'_x+2xz'_x+x^2z''_{xx}+2yz'^2_x+2yzz''_{xx}=0, \tag{8}$$

skąd po redukcji i wykorzystaniu wzoru (5) otrzymujemy

$$z''_{xx}=\frac{6x^4z-8y^2z^3}{(x^2+2yz)^3}, \quad \text{gdzie} \quad x^2+2yz\neq 0, \tag{9}$$

oraz różniczkujemy tożsamość (6) względem y:

$$x^2z''_{yy}+2zz'_y+2zz'_y+2yz'^2_y+2yzz''_{yy}=0, \tag{10}$$

skąd po redukcji i wykorzystaniu wzoru (7) otrzymujemy

$$z''_{yy}=\frac{4x^2z^3+6yz^4}{(x^2+2yz)^3}, \quad \text{gdzie} \quad x^2+2yz\neq 0. \tag{11}$$

Dla obliczenia pochodnej mieszanej z''_{xy} (lub z''_{yx}) różniczkujemy względem y tożsamość (4) (lub względem x tożsamość (6)):

$$2xz'_y+x^2z''_{xy}+2zz'_x+2yz'_xz'_y+2yzz''_{xy}=0, \tag{12}$$

skąd po redukcji i wykorzystaniu związków (5) i (7) otrzymujemy

$$z''_{xy}=z''_{yx}=\frac{6x^3z^2+8xyz^3}{(x^2+2yz)^3}, \quad \text{gdzie} \quad x^2+2yz\neq 0. \tag{13}$$

ZADANIE 2.40. Równaniem

$$\ln(xyz)+xz=0, \quad \text{gdzie} \quad x>0,\ y>0,\ z>0, \tag{1}$$

jest określona funkcja uwikłana $z=f(x, y)$. Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego tej funkcji.

Rozwiązanie. Oznaczmy lewą stronę równania (1) przez $F(x, y, z)$. Obliczamy pochodną $F'_z=1/z+x$. Warunek $F'_z\neq 0$ jest spełniony, gdy $xz\neq -1$.

Różniczkując względem x równanie (1), traktując je jako tożsamość przy założeniu, że z jest odpowiednią funkcją zmiennych x i y, oraz uwzględniając, że $\ln(xyz)=\ln x+\ln y+\ln z$, otrzymujemy

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}z'_x+z+xz'_x=0, \tag{2}$$

skąd wyznaczamy pochodną

$$z'_x=-\frac{z}{x}. \tag{3}$$

Następnie różniczkując równanie (1) względem y, otrzymujemy

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}z'_y+xz'_y=0 \tag{4}$$

skąd wyznaczamy pochodną

$$z'_y=\frac{-z}{y(1+xz)}. \tag{5}$$

Chcąc otrzymać z''_{xx}, różniczkujemy względem x tożsamość

$$xz'_x+z=0, \tag{6}$$

którą otrzymujemy z tożsamości (2) przez podzielenie obu stron przez różne od zera wyrażenie $1+xz$. Otrzymujemy

$$z'_x+xz''_{xx}+z'_x=0, \tag{7}$$

skąd po uwzględnieniu wzoru (3) mamy

$$z''_{xx}=\frac{2z}{x^2}. \tag{8}$$

Chcąc znaleźć z''_{xy} różniczkujemy tożsamość (6) stronami względem y; mamy

$$xz''_{xy}+z'_y=0, \tag{9}$$

skąd po uwzględnieniu (5) otrzymujemy

$$z''_{xy}=\frac{z}{xy(1+xy)}=z''_{yx}. \tag{10}$$

I na koniec chcąc obliczyć z''_{yy}, różniczkujemy (4) stronami względem y:

$$-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}(z'_y)^2+\frac{1}{z}z''_{yy}+xz''_{yy}=0, \tag{11}$$

skąd po uwzględnieniu również wzoru (5) otrzymujemy

$$z''_{yy}=\frac{z(2+2xz+x^2z^2)}{y^2(1+xz)^3}. \tag{12}$$

We wszystkich otrzymanych pochodnych (3), (5), (8), (10) i (12) zakładamy oczywiście, że $xz\neq -1$.

Zadania

Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji uwikłanej $z=f(x,y)$ danej równaniami (zad. 2.41 - 2.50):

2.41. $z^3-3xyz-8=0$.

2.42. $x^2+\frac{1}{4}y^2+z^2-10=0$.

2.43. $e^{zy}+zx=0$.

2.44. $ye^z+ze^{3x}=0$.

2.45. $e^{3z}+xy+z=0$.

2.46. $e^z=\cos x\cos y$.

2.47. $\cos(x+y+z)+x+y+z=0$. **2.48.** $ax+by-cz=k\cos(ax+by-cz)$.

2.49. $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y+3=0$. **2.50.** $z^2=xy$.

2.51. $xyz=a^3$. Wykazać, że $xz'_x+yz'_y=-2z$.

2.52. $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$. Wykazać, że $z'_x+z'_y=1$.

2.53. $x^2+y^2+z^2=2z$. Znaleźć z''_{xx}.

2.54. $x^2+y^3+z^4=x+z$. Znaleźć z''_{xy}.

2.55. Funkcja $z(x,y)$ określona jest równaniem $x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+cz)$, gdzie φ – dowolna funkcja różniczkowalna i a, b, c dowolne stałe. Wykazać, że

$$(cy-bz)z'_x+(az-cx)z'_y=bx-ay.$$

2.56. Wykazać, że funkcja $z(x,y)$ określona równaniem $F(x/z, y/z)=0$, gdzie F jest dowolną funkcją różniczkowalną dwóch zmiennych, spełnia równanie

$$xz'_x+yz'_y=z.$$

§ 2.4. EKSTREMA FUNKCJI UWIKŁANEJ JEDNEJ LUB DWÓCH ZMIENNYCH

A. Ekstrema funkcji uwikłanej jednej zmiennej

Niech będzie dana funkcja uwikłana $y=f(x)$ jednej zmiennej x, określona równaniem

$$F(x,y)=0, \tag{2.4.1}$$

przy czym funkcja F jest klasy C^2 w pewnym obszarze D. Różniczkując stronami tożsamość

$$F(x,f(x))=0, \tag{2.4.2}$$

otrzymujemy

$$F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}=0, \tag{2.4.3}$$

skąd

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}, \quad \text{gdzie} \quad F'_y\neq 0. \tag{2.4.4}$$

Ponieważ warunkiem koniecznym istnienia ekstremum dla funkcji różniczkowalnej $f(x)$ jest $f'(x)=0$, czyli $F'_x(x,y)=0$, zatem możliwe punkty ekstremalne (x_e, y_e) wyznaczamy z układu równań

$$F(x,y)=0, \quad F'_x(x,y)=0. \tag{2.4.5}$$

Niech rozwiązaniem układu równań (2.4.5) będą punkty (x_e, y_e). Chcąc zbadać, czy w znalezionych punktach rzeczywiście istnieje ekstremum, obliczamy drugą pochodną. W tym celu różniczkujemy tożsamość (2.4.3):

$$F''_{xx}+2F''_{xy}\frac{dy}{dx}+F''_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+F'_y\frac{d^2y}{dx^2}=0, \tag{2.4.6}$$

skąd przy założeniu, że $dy/dx=0$, otrzymujemy

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F''_{xx}}{F'_y}, \quad \text{gdzie} \quad F'_y\neq 0. \tag{2.4.7}$$

Jeżeli

$$F'_y(x_e,y_e)\neq 0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x_e,y_e)}>0, \tag{2.4.8}$$

to funkcja $y=f(x)$ dla $x=x_e$ ma minimum lokalne równe y_e, a jeżeli jest

$$F'_y(x_e,y_e)\neq 0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x_e,y_e)}<0, \tag{2.4.9}$$

to funkcja $y=f(x)$ dla $x=x_e$ ma maksimum lokalne równe y_e.

Uwaga. Przy badaniu ekstremum funkcji uwikłanej danej równaniem (2.4.1) nie należy zapominać o sprawdzeniu warunków istnienia tej funkcji.

ZADANIE 2.57. Zbadać ekstrema funkcji uwikłanej $y=f(x)$ określonej równaniem

$$y^4-8xy-4y+8x^2=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Oznaczmy lewą stronę równania (1) przez $F(x,y)$. Obliczamy pochodne cząstkowe tej funkcji

$$F'_x(x,y)=-8y+16x=8(2x-y), \quad F'_y(x,y)=4y^3-8x-4=4(y^3-2x-1).$$

Zgodnie z podaną teorią, wszystkie możliwe punkty, w których funkcja uwikłana $y=f(x)$ może mieć ekstremum, znajdujemy rozwiązując układ równań

$$y^4-8xy-4y+8x^2=0, \quad 2x-y=0, \tag{2}$$

skąd

$$x=0,\ y=0 \quad \text{lub} \quad x=1,\ y=2.$$

A więc tylko w tych punktach $A(0,0)$ i $B(1,2)$ funkcja uwikłana może mieć ekstremum lokalne.

Znajdźmy wartości drugiej pochodnej funkcji $y=f(x)$ w tych punktach. Mamy $F''_{xx}=16$, zatem ze wzoru (2.4.7) znajdujemy

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4}{y^3-2x-1}, \quad \text{gdy} \quad y^3-2x-1\neq 0. \tag{3}$$

Ponieważ

$$F'_y(0,0)=-4\neq 0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(0,0)}=4>0, \tag{4}$$

więc dla $x=0$ gałąź funkcji uwikłanej $y=f_1(x)$ określonej równaniem (1) osiąga minimum równe 0; przechodząc do punktu $B(1,2)$ obliczamy

$$F'_y(1,2)=20\neq 0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(1,2)}=-\frac{4}{5}<0, \tag{5}$$

więc dla $x=1$ gałąź funkcji uwikłanej $y=f_2(x)$ określonej równaniem (1) osiąga maksimum równe 2.

Pokażemy teraz, że w punktach A i B mamy do czynienia z różnymi gałęziami jednoznacznymi $y=f_1(x)$ i $y=f_2(x)$ funkcji uwikłanej wielowartościowej określonej równaniem (1).

Przybliżenie pierwszej gałęzi $y=f_1(x)$ otrzymujemy pomijając we wzorze (1) wyraz z potęgą 4, to jest opuszczając y^4; w związku z tym, że badamy naszą gałąź w pobliżu punktu (0, 0), popełniamy przy tym mały błąd. Otrzymujemy wówczas postać uwikłaną

$$-8xy-4y+8x^2=0 \tag{6}$$

funkcji $y=g(x)$, której postać jawną znajdujemy bez trudności:

$$g(x)=\frac{2x^2}{2x+1}=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x+1}\right), \quad \text{skąd} \quad g(0)=0. \tag{7}$$

Ponieważ mamy

$$g(0)=f_1(0)=0, \tag{8}$$

więc funkcja $y=g(x)$ jest przybliżeniem gałęzi jednoznacznej $y=f_1(x)$ funkcji uwikłanej określonej równaniem (1), to znaczy funkcji jednoznacznej spełniającej w pewnym otoczeniu zera tożsamościowo równanie (1) oraz warunek $f_1(0)=0$.

Obliczmy teraz pochodną funkcji $g(x)$; mamy

$$g'(x)=1-\frac{1}{(2x+1)^2}, \quad \text{skąd} \quad g'(0)=0. \tag{9}$$

Widzimy więc, że wobec ciągłości funkcji $g(x)$ i $f_1(x)$ i ciągłości ich pochodnych oraz równości

$$g(0)=f_1(0)=0 \quad \text{oraz} \quad g'(0)=f_1'(0)=0, \tag{10}$$

funkcja $g(x)$ w otoczeniu punktu 0 aproksymuje funkcję $f_1(x)$ wraz z pierwszą pochodną.

Podstawmy jeszcze w równaniu (1) $x=1$. Otrzymamy wówczas

$$y^4-12y+8=0. \tag{11}$$

Jednym z pierwiastków tego równania jest (jak wiemy) $y_2=2$, a drugim pierwiastkiem tego równania jest $y_1\approx 0{,}69$. Ponieważ jednocześnie $g(1)=\frac{2}{3}\approx 0{,}66$, więc punkt (1; 0,69) różny od punktu (1, 2) należy do wykresu gałęzi $y=f_1(x)$.

Weźmy teraz pod uwagę drugą gałąź jednoznaczną $y=f_2(x)$ funkcji uwikłanej wieloznacznej określonej równaniem (1), a więc spełniającej w pewnym otoczeniu punktu $x=1$ tożsamościowo równanie (1) oraz czyniącej zadość warunkowi $f_2(1)=2$. Na podstawie twierdzenia (2.3.2) stwierdzamy, że gałąź ta istnieje.

Przybliżamy tę gałąź możliwie najlepiej wielomianem kwadratowym $h(x)$. Na podstawie wzoru Taylora dla funkcji jednej zmiennej mamy

$$h(x)=f_2(1)+f_2'(1)(x-1)+\tfrac{1}{2}f_2''(1)(x-1)^2. \tag{12}$$

Podstawiając do (12) wartości $f_2(1)=2$, $f_2'(1)=0$, $f_2''(1)=-\frac{4}{5}$, otrzymujemy

$$h(x)=2-\tfrac{2}{5}(x-1)^2, \quad \text{skąd} \quad h(0)=1{,}6. \tag{13}$$

Podstawmy teraz $x=0$ do równania (1). Otrzymujemy równanie

$$y^4-4y=0, \tag{14}$$

którego pierwiastkami są $y_1=0$ lub $y_2=\sqrt[3]{4}\approx 1{,}6$. Pierwszy pierwiastek jest rzędną punktu wykresu pierwszej gałęzi $y=f_1(x)$ odpowiadającej odciętej $x=0$, ponieważ $f_1(0)=0$. Drugi pierwiastek jest rzędną punktu wykresu drugiej gałęzi, czyli $f_2(0)=y_2$; widzimy że wartość $f_2(0)$ jest bliska liczbie $h(0)=1{,}6$.

W ten sposób wykazaliśmy, że punkty A i B są odpowiednio punktami dwóch różnych jednoznacznych gałęzi funkcji wieloznacznej uwikłanej (1) i że punkt A odpowiada minimum pierwszej gałęzi, a punkt B odpowiada maksimum drugiej gałęzi.

ZADANIE 2.58. Zbadać ekstrema funkcji uwikłanej określonej równaniem

$$x^2-2x-2y+y^2+1=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Oznaczmy lewą stronę równości (1) przez $F(x, y)$. Obliczamy pochodne cząstkowe

$$F_x'(x,y)=2x-2, \quad F_y'(x,y)=2y-2, \quad F_{xx}''(x,y)=2.$$

Punkty, w których funkcja uwikłana (1) może przyjmować ekstremum, otrzymujemy rozwiązując układ równań

$$x^2-2x-2y+y^2+1=0, \quad 2x-2=0. \tag{2}$$

Rozwiązaniem tego układu są punkty $A(1, 0)$ oraz $B(1, 2)$. Znajdujemy wartości drugiej pochodnej w tych punktach dwóch gałęzi funkcji uwikłanej:

$$f_1''(1)=-\frac{F_{xx}''(1,0)}{F_y'(1,0)}=1, \quad f_2''(1)=-\frac{F_{xx}''(1,2)}{F_y'(1,2)}=-1. \tag{3}$$

Ponieważ w punkcie A oraz w punkcie B pochodna F_y' jest różna od zera, więc przez każdy z tych punktów przechodzi wykres pewnej gałęzi jednoznacznej funkcji uwikłanej (1). W punkcie A pierwsza $f_1(x)$ z tych gałęzi osiąga minimum lokalne, a w punkcie B druga $f_2(x)$ z tych gałęzi — maksimum lokalne.

Funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ możemy *explicite* napisać za pomocą wzorów. Pisząc mianowicie równanie (1) w postaci

$$(y-1)^2+x^2-2x=0,$$

znajdujemy

$$f_1(x)=1-\sqrt{2x-x^2}, \quad \text{skąd} \quad f_1(1)=0,$$

oraz

$$f_2(x)=1+\sqrt{2x-x^2}, \quad \text{skąd} \quad f_2(1)=2.$$

Obie gałęzie są określone dla $0\leqslant x\leqslant 2$.

ZADANIE 2.59. Zbadać ekstrema funkcji uwikłanej określonej równaniem

$$x^2-2xy+2y^2+2x+1=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Oznaczmy lewą stronę równości (1) przez $F(x, y)$. Obliczamy pochodne cząstkowe

$$F'_x(x,y)=2x-2y+2, \quad F'_y(x,y)=4y-2x, \quad F''_{xx}=2.$$

Rozwiązanie układu równań

$$x^2-2xy+2y^2+2x+1=0, \quad 2x-2y+2=0 \tag{2}$$

daje nam wszystkie punkty, w których funkcja uwikłana (1) może osiągać ekstremum. Rozwiązaniami układu równań (2) są punkty $A(-3, -2)$ oraz $B(-1, 0)$. Obliczamy wartości drugiej pochodnej w tych punktach:

$$f_1''(-3)=-\frac{F''_{xx}(-3,-2)}{F'_y(-3,-2)}=1, \quad f_2''(-1)=-\frac{F''_{xx}(-1,0)}{F'_y(-1,0)}=-1. \tag{3}$$

Ponieważ pochodna F'_y zarówno w punkcie A jak i w punkcie B jest różna od zera, więc przez każdy z tych punktów przechodzi wykres pewnej gałęzi jednoznacznej $f_1(x)$ lub $f_2(x)$ funkcji uwikłanej określonej równaniem (1). W punkcie A gałąź jednoznaczna $f_1(x)$ osiąga minimum lokalne, a w punkcie B gałąź jednoznaczna $f_2(x)$ osiąga maksimum lokalne.

Zbadajmy teraz, czy gałęzie $f_1(x)$ i $f_2(x)$ są różne.

W tym celu napiszemy równanie (1) w postaci

$$2y^2-2xy+(x+1)^2=0,$$

skąd znajdujemy

$$f_1(x)=\tfrac{1}{2}[x-\sqrt{-x^2-4x-2}], \quad f_1(-3)=-2, \tag{4}$$

oraz

$$f_2(x)=\tfrac{1}{2}[x+\sqrt{-x^2-4x-2}], \quad f_2(-1)=0. \tag{5}$$

A więc na wykresie pierwszej gałęzi leży punkt A, a na wykresie drugiej gałęzi punkt B. Funkcje (4) i (5) są określone dla $-2-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant -2+\sqrt{2}$.

*B. Ekstrema funkcji uwikłanej dwóch zmiennych

Zajmiemy się teraz zagadnieniem szukania ekstremum funkcji uwikłanej $z=f(x, y)$ dwóch zmiennych, określonej równaniem

$$F(x,y,z)=0, \tag{2.4.10}$$

gdzie funkcja F jest klasy C^2 w badanym obszarze.

Na podstawie twierdzenia (1.16.5) oraz wzorów (2.3.3) rozwiązania układu równań

$$F(x,y,z)=0, \quad F'_x(x,y,z)=0, \quad F'_y(x,y,z)=0 \tag{2.4.11}$$

wyznaczają wszystkie możliwe punkty, w których funkcja uwikłana $z=f(x, y)$ może (ale nie musi) osiągnąć ekstremum lokalne (przy założeniu, że w tych punktach $F'_z(x, y, z)\neq 0$).

Aby rozstrzygnąć, czy w ten sposób znalezionych punktach funkcja $z=f(x,y)$ rzeczywiście ma ekstrema i jakie, stosujemy kolejno do każdego znalezionego punktu kryteria podane w twierdzeniu (1.16.6), obliczając przy tym potrzebne pochodne według reguł podanych w § 2.3.

ZADANIE 2.60. Zbadać ekstrema funkcji uwikłanej $z=f(x,y)$ określonej równaniem

$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Oznaczmy lewą stronę (1) przez $F(x,y,z)$. Obliczamy pochodne

$$F'_x=10x-2y-2z, \quad F'_y=10y-2x-2z, \quad F'_z=10z-2x-2y. \tag{2}$$

Aby wyznaczyć punkty, w których funkcja uwikłana $z=f(x,y)$ może przyjąć ekstremum, rozwiązujemy układ równań

$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0, \quad 10x-2y-2z=0, \quad 10y-2x-2z=0, \tag{3}$$

przy czym z otrzymanych rozwiązań odrzucamy te punkty, w których $F'_z(x,y,z)=0$. Pierwiastkami układu (3) są liczby $x=1, y=1, z=4$ oraz $x=-1, y=-1, z=-4$. Obliczamy wartość pochodnej F'_z w otrzymanych punktach; mamy

$$F'_z(1,1,4)=36\neq 0, \quad F'_z(-1,-1,-4)=-36\neq 0. \tag{4}$$

Z równości (4) wynika, że przez punkt $(1,1,4)$ przechodzi powierzchnia $z=f_1(x,y)$ określona pewną gałęzią jednoznaczną funkcji uwikłanej (1); analogicznie przez punkt $(-1,-1,-4)$ przechodzi powierzchnia pewnej gałęzi jednoznacznej $z=f_2(x,y)$ funkcji uwikłanej (1). Zbadajmy teraz

$$\delta=W(x,y)=(f''_{xy})^2-f''_{xx}f''_{yy}. \tag{5}$$

Zauważmy, że w otrzymanych punktach mamy $f'_x=0$, $f'_y=0$, w związku z tym w otrzymanych punktach wartości drugich pochodnych wyrażają się następująco:

$$f''_{xx}=-\frac{F''_{xx}}{F'_z}, \quad f''_{yy}=-\frac{F''_{yy}}{F'_z}, \quad f''_{xy}=-\frac{F''_{xy}}{F'_z}.$$

Równość (5) w tych punktach przyjmuje więc postać

$$\delta=W(x,y,z)=\frac{(F'_{xy})^2-F''_{xx}F''_{yy}}{F'^2_z}. \tag{6}$$

Obliczamy kolejno pochodne cząstkowe $F''_{xx}=10$, $F''_{yy}=10$, $F''_{xy}=-2$. Obliczając wartości wyrażenia δ w punktach $(1,1,4)$ oraz $(-1,-1,-4)$, otrzymujemy

$$\delta=W(1,1,4)=\frac{4-100}{36^2}=-\frac{96}{36^2}<0$$

oraz

$$\delta=W(-1,-1,-4)=\frac{4-100}{(-36)^2}=-\frac{96}{36^2}<0.$$

W obu punktach wyrażenie δ jest ujemne, a zatem w obu tych punktach istnieje ekstremum. Ponieważ

$$f''_{1xx}(1,1)=-\frac{F''_{xx}(1,1,4)}{F'_z(1,1,4)}=-\frac{10}{36}<0,$$

więc funkcja uwikłana $z=f_1(x,y)$ w punkcie $(1,1)$ osiąga maksimum równe $z=4$, oraz ponieważ

$$f''_{2xx}(-1,-1)=-\frac{F''_{xx}(-1,-1,-4)}{F'_z(-1,-1,-4)}=\frac{-10}{-36}>0,$$

więc funkcja uwikłana $z=f_2(x,y)$ w punkcie $(-1,-1)$ osiąga minimum równe $z=-4$.

Obie gałęzie $f_1(x,y)$ i $f_2(x,y)$ funkcji uwikłanej określonej równaniem (1) możemy wyrazić za pomocą funkcji elementarnych. W tym celu równanie (1) napiszmy w postaci

$$5z^2-2(x+y)z+(5x^2+5y^2-2xy-72)=0,$$

skąd, korzystając ze wzoru na pierwiastki równania kwadratowego, otrzymamy

$$f_1(x,y)=\tfrac{1}{5}[x+y+\sqrt{12(30+xy-2x^2-2y^2)}], \quad f_1(1,1)=4,$$

oraz

$$f_2(x,y)=\tfrac{1}{5}[x+y-\sqrt{12(30+xy-2x^2-2y^2)}], \quad f_2(-1,-1)=-4.$$

Zadania

Zbadać ekstrema funkcji uwikłanej jednej zmiennej określonej równaniem (zad. 2.61 - 2.63):

2.61. $x^2+2xy+y^2-4y-\frac{1}{4}=0$. **2.62.** $x^2+y^2-8x-4y+19=0$.

2.63. $x^5+y^4-4xy^2=0$.

Wyznaczyć maksima funkcji uwikłanej jednej zmiennej określonej równaniem (zad. 2.64 - 2.65):

2.64. $y^3+2xy+x^2=0$. **2.65.** $x^3+y^3-12xy=0$.

Zbadać ekstrema funkcji uwikłanej dwóch zmiennych określonej równaniem (zad. 2.66 - 2.70):

2.66. $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+2=0$.

2.67. $6x^2+6y^2+6z^2+4x-8y-8z+5=0$.

2.68. $z^2+xyz-xy^2-x^3=0$.

2.69. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$. **2.70.** $x^2+y^2-z^2=0$.

§ 2.5. PRZEKSZTAŁCANIE CIĄGŁE PRZESTRZENI EUKLIDESOWEJ W SIEBIE. JAKOBIANY

Niech będzie dane *przekształcenie* (*odwzorowanie*)

$$x=f(u,v), \quad y=g(u,v), \tag{2.5.1}$$

przy czym funkcje f i g są określone i ciągłe w pewnym obszarze płaskim W. Jeżeli punkt $P(u,v)$ należy do obszaru W, to punkt $Q(f(u,v),g(u,v))$ nazywamy *obrazem punktu* P otrzymanym przez *przekształcenie* (2.5.1), a zbiór Z wszystkich takich punktów Q, gdy P należy do W, nazywamy *obrazem obszaru* W.

Przekształcenie (2.5.1) przy zrobionych założeniach jest *ciągłe*, to znaczy jeżeli ciąg punktów P_n dąży do punktu P_0 (P_n i P_0 należą do W), to ciąg punktów Q_n, będących odpowiednio obrazami punktów P_n, dąży do punktu Q_0, który jest obrazem punktu P_0.

PRZYKŁAD. Weźmy dwa następujące ciągłe przekształcenia:

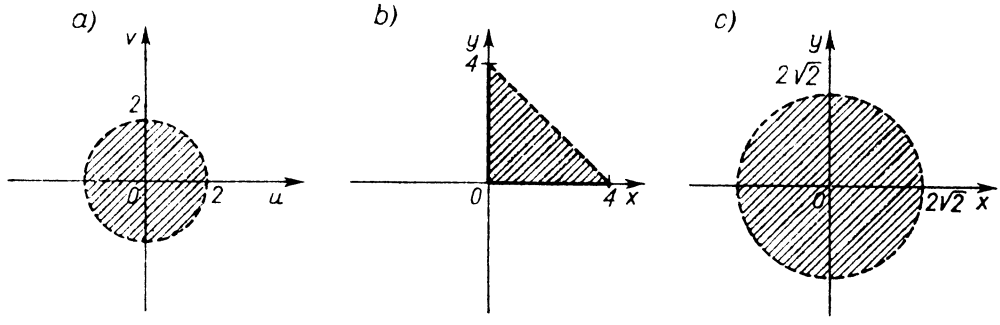
(1) $x=u^2, \quad y=v^2,$ (2) $x=u+v, \quad y=u-v,$

a jako obszar W koło (rys. 2.3a) określone nierównością

$$u^2+v^2<4. \tag{3}$$

Obrazem koła otrzymanym przez przekształcenie (1) jest trójkąt (rys. 2.3b) prostokątny (wnętrze plus 2 boki) określony nierównościami

$$0\leqslant x+y<4, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \tag{4}$$



Rys. 2.3

a obrazem tego samego koła uzyskanym przez przekształcenie (2) jest koło (rys. 2.3c) określone nierównością

$$x^2+y^2<8. \tag{5}$$

Przekształcenie (2.5.1) nazywamy *przekształceniem wzajemnie jednoznacznym* (lub *jednokrotnym*) w obszarze W, jeżeli różnym punktom P ze zbioru W odpowiadają różne ich obrazy Q.

Na przykład przekształcenie (1) nie jest w obszarze W wzajemnie jednoznaczne, ponieważ np. punkty $P_1(1,1)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(-1,1)$ i $P_4(-1,-1)$ należące do obszaru W

mają wspólny obraz $Q(1, 1)$, natomiast przekształcenie (2) jest wzajemnie jednoznaczne w obszarze W, ponieważ z równości (2) łatwo obliczamy

$$u=\tfrac{1}{2}(x+y), \quad v=\tfrac{1}{2}(x-y). \tag{6}$$

Ze wzorów (6) wynika, że przy odwzorowaniu (2) różnym punktom P odpowiadają różne ich obrazy Q (wzory (6) wyznaczają tzw. *przekształcenie odwrotne* do przekształcenia (2)).

Przekształcenie (2.5.1) nazywamy *klasy* C^1 w obszarze W, jeżeli funkcje f i g określające to przekształcenie obie są klasy C^1 w obszarze W.

Mamy następujące twierdzenie:

Jeżeli przekształcenie (2.5.1) *jest klasy* C^1 *w obszarze* W, *a w punkcie* $P_0\ (u_0, v_0)$ *należącym do obszaru* W *wartość wyznacznika funkcyjnego, zwanego jakobianem* [1]:

$$\frac{D(f,g)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{vmatrix}, \tag{2.5.2}$$

jest różna od zera:

$$\left.\frac{D(f,g)}{D(u,v)}\right|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}} \neq 0, \tag{2.5.3}$$

to istnieje otoczenie U *punktu* $Q_0\ (x_0, y_0)$, *gdzie* $x_0=f(u_0, v_0)$, $y_0=g(u_0, v_0)$, *w którym są określone takie jednowartościowe funkcje*

$$u=h(x, y), \quad v=k(x, y), \tag{2.5.4}$$

klasy C^1, *że w otoczeniu* U *punktu* Q_0 *spełnione są tożsamości*

$$x\equiv f(h(x, y), k(x, y)) \quad \text{oraz} \quad y\equiv g(h(x, y), k(x, y)), \tag{2.5.5}$$

przy czym $h(x_0, y_0)=u_0$, $k(x_0, y_0)=v_0$.

Przekształcenie (2.5.4) nazywamy *przekształceniem odwrotnym* do przekształcenia (2.5.1).

Przekształcenie (2.5.1) nazywamy *homeomorfizmem* w obszarze W, jeżeli jest ciągłe, wzajemnie jednoznaczne i przekształcenie odwrotne do niego też jest ciągłe w obszarze Z, który jest obrazem obszaru W.

Przykładem homeomorfizmu jest przekształcenie (2) w kole (3). Natomiast przekształcenie (1) jest również homeomorfizmem w obszarze

$$u^2+v^2<4, \quad u\geqslant 0, \quad v\geqslant 0, \tag{7}$$

czyli w pierwszej ćwiartce koła (3). Obrazem homeomorficznym tej ćwiartki jest trójkąt (4).

Specjalnym, ważnym przypadkiem przekształcenia płaskiego jest przekształcenie

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta, \tag{2.5.6}$$

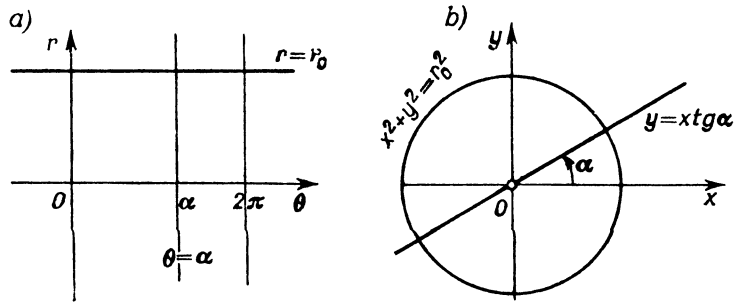
które odwzorowuje płaszczyznę $Or\theta$ w płaszczyznę Oxy.

---

[1] Jakobian funkcji f i g względem zmiennych x i y oznacza się czasem symbolem $\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$.

Przekształcenie (2.5.6) odpowiada *zamianie współrzędnych prostokątnych na współrzędne biegunowe.*

Przy przekształceniu (2.5.6) obrazem prostej $\theta=\alpha$ jest prosta $y=x\operatorname{tg}\alpha$ przy $\alpha\neq\frac{1}{2}\pi+k\pi$, a prosta $x=0$ przy $\alpha=\frac{1}{2}\pi+k\pi$ (k – całkowite), natomiast obrazem prostej $r=r_0$ jest okrąg $x^2+y^2=r_0^2$ (rys. 2.4).



Rys. 2.4

Przekształcenie (2.5.6) nie jest wzajemnie jednoznaczne (jednokrotne) na całej płaszczyźnie $Or\theta$, bo np. obrazem całej osi $O\theta$ ($r=0$) jest jeden punkt (0, 0), a gdy we wzorach (2.5.6) zmienimy θ na $\theta+2k\pi$, to obraz się nie zmieni.

Przekształcenie (2.5.6) jest homeomorfizmem w pasie określonym nierównościami

$$r>0, \quad 0<\theta<2\pi. \tag{2.5.7}$$

Obrazem homeomorficznym pasa (2.5.7) jest obszar, jaki otrzymamy, jeżeli z płaszczyzny Oxy usuniemy dodatnią półoś Ox. W tym zbiorze przekształcenie odwrotne do (2.5.6) jest określone wzorami

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{2.5.8}$$

przy czym θ jest tak dobrane, aby była spełniona nierówność (2.5.7) oraz aby zgadzały się znaki przy wzorach (2.5.6).

Obliczamy jakobian przekształcenia (2.5.6):

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r. \tag{2.5.9}$$

Jakobian przekształcenia (2.5.6) równa się więc zeru wyłącznie na osi $O\theta$, a pomimo to przekształcenie (2.5.6) na półpłaszczyźnie $r>0$ nie jest jednokrotne. Nie jest to sprzeczne z twierdzeniem na str. 79, którego teza ma charakter lokalny.

Wprowadzone poprzednio pojęcia rozszerza się w sposób naturalny na przypadek *przekształcenia przestrzennego*:

$$x=f(u,v,w), \quad y=g(u,v,w), \quad z=h(u,v,w), \tag{2.5.10}$$

w którym funkcje f, g i h są określone i ciągłe w pewnym obszarze przestrzennym W.

Zachodzi twierdzenie:

Jeżeli przekształcenie (2.5.10) *jest klasy* C^1 *w obszarze* W, *a w punkcie* $P_0\,(u_0, v_0, w_0)$, *należącym do obszaru* W, *wartość jakobianu*

$$\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} f'_u & f'_v & f'_w \\ g'_u & g'_v & g'_w \\ h'_u & h'_v & h'_w \end{vmatrix} \tag{2.5.11}$$

jest liczbą różną od zera, to istnieje otoczenie U *punktu* $Q_0\,(x_0, y_0, z_0)$, *gdzie* $x_0 = f(u_0, v_0, w_0)$, $y_0 = g\,(u_0, v_0, w_0)$, $z_0 = h\,(u_0, v_0, w_0)$, *w którym są określone takie jednowartościowe funkcje*

$$u = p(x,y,z), \quad v = q(x,y,z), \quad w = r(x,y,z) \tag{2.5.12}$$

klasy C^1, *że w otoczeniu* U *zachodzą tożsamości*

$$\begin{aligned} x &\equiv f\big(p(x,y,z), q(x,y,z), r(x,y,z)\big), \\ y &\equiv g\big(p(x,y,z), q(x,y,z), r(x,y,z)\big), \\ z &\equiv h\big(p(x,y,z), q(x,y,z), r(x,y,z)\big), \end{aligned} \tag{2.5.13}$$

przy czym $p(x_0, y_0, z_0) = u_0$, $q(x_0, y_0, z_0) = v_0$, $r(x_0, y_0, z_0) = w_0$.

Przekształcenie (2.5.12) nazywamy *przekształceniem odwrotnym do przekształcenia* (2.5.10).

Przekształcenie (2.5.10) nazywa się *homeomorfizmem* w obszarze W, jeżeli jest ciągłe, wzajemnie jednoznaczne (jednokrotne) i przekształcenie odwrotne do niego też jest ciągłe na obrazie obszaru W.

Szczególnie ważnym przypadkiem przekształcenia przestrzennego jest przekształcenie

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi, \tag{2.5.14}$$

które odwzorowuje przestrzeń $Or\varphi\theta$ w przestrzeń $Oxyz$; przekształcenie to jest uogólnieniem przekształcenia (2.5.6) na przypadek przestrzenny. Odpowiada ono *zamianie współrzędnych prostokątnych na współrzędne sferyczne* (*kuliste*, *biegunowe przestrzenne*).

Przekształcenie (2.5.14) jest jednokrotne w zbiorze W określonym nierównościami

$$r > 0, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad 0 < \theta < 2\pi. \tag{2.5.15}$$

Przy przekształceniu (2.5.14) obrazem płaszczyzny $\theta = \alpha$ jest płaszczyzna $y = x\operatorname{tg}\alpha$, gdy $\alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, lub płaszczyzna $x = 0$, gdy $\alpha = \frac{1}{2}\pi + k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą; obrazem płaszczyzny $r = r_0$ jest powierzchnia kuli $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$, a obrazem płaszczyzny $\varphi = \beta$, gdzie $0 < \beta < \pi$, $\beta \neq \frac{1}{2}\pi$, jest powierzchnia stożka $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2\beta$.

Jakobian przekształcenia (2.5.14) jest następujący:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi. \tag{2.5.16}$$

Czasem rozpatrujemy złożenie dwóch przekształceń

$$x=f(u,v), \quad y=g(u,v), \tag{2.5.17}$$

$$u=p(s,t), \quad v=q(s,t), \tag{2.5.18}$$

przy czym obszary ich określoności są tak dobrane, że złożenie ma sens. Jeżeli występujące funkcje są klasy C^1, to dla jakobianów zachodzi następujący wzór:

$$\frac{D(x,y)}{D(s,t)}=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\cdot\frac{D(u,v)}{D(s,t)}, \tag{2.5.19}$$

wynikający z twierdzenia o pochodnych cząstkowych funkcji złożonych (por. §§ 1.9 i 1.12); wyznaczniki stojące po prawej stronie wzoru mnożymy według zwykłych reguł mnożenia macierzy.

ZADANIE 2.71. Wyznaczyć jakobian przekształcenia

$$x=u, \quad y=uv. \tag{1}$$

Znaleźć przekształcenie odwrotne. Znaleźć obraz kwadratu domkniętego $D=\{(u,v): 1\leqslant u\leqslant 2, 2\leqslant v\leqslant 3\}$ otrzymany za pomocą przekształcenia (1).

Rozwiązanie. Obliczamy jakobian przekształcenia (1), korzystając ze wzoru (2.5.2):

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ v & u\end{vmatrix}=u;$$

jakobian jest różny od zera, gdy $u\neq 0$.

Łatwo otrzymujemy, że przekształcenie odwrotne ma postać

$$u=x, \quad v=\frac{y}{x}, \quad \text{przy czym} \quad x\neq 0. \tag{2}$$

Badamy, na co przechodzi brzeg obszaru D przy przekształceniu (1). Prosta $u=1$ przechodzi w prostą $x=1$, podobnie prosta $u=2$ przechodzi w prostą $x=2$, co jest widoczne bezpośrednio z postaci przekształcenia (1). Natomiast prosta $v=2$ przechodzi w prostą $y=2x$, a prosta $v=3$ w prostą $y=3x$. Ostatnie spostrzeżenie otrzymujemy podstawiając wartość $v=3$ do drugiego równania przekształcenia (1) i zastępując w nim zmienną u przez zmienną x.

A zatem obrazem zbioru D, otrzymanym za pomocą przekształcenia (1), jest trapez domknięty

$$\Delta=\{(x,y): 1\leqslant x\leqslant 2,\ 2x\leqslant y\leqslant 3x\}.$$

ZADANIE 2.72. Dane jest przekształcenie

$$x=\frac{u}{u^2+v^2}, \quad y=\frac{v}{u^2+v^2}, \quad \text{gdzie} \quad (u,v)\neq(0,0). \tag{1}$$

Obliczyć jakobian przekształcenia (1), znaleźć przekształcenie odwrotne do danego, a następnie znaleźć zbiór D, którego obrazem otrzymanym za pomocą przekształcenia (1) jest kwadrat $\Delta=\{(x,y): \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1, \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\}$.

Rozwiązanie. Obliczamy jakobian przekształcenia (1):

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2} & \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2}\\ \frac{-2uv}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^2}\end{vmatrix}=\frac{-(u^2-v^2)^2-4u^2v^2}{(u^2+v^2)^4}=-\frac{1}{(u^2+v^2)^2}; \tag{2}$$

jakobian ten, określony dla wszystkich punktów $(u,v)\neq(0,0)$, jest zawsze różny od zera.

Za pomocą elementarnych przekształceń łatwo otrzymujemy, że wzory

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \text{gdzie}\quad (x,y)\neq(0,0), \tag{3}$$

określają przekształcenie odwrotne do przekształcenia (1).

Aby znaleźć brzeg poszukiwanego zbioru D, tzn. zbioru, który przy przekształceniu (1) przechodzi w kwadrat Δ, poszukujemy krzywych, które przechodzą w brzeg kwadratu Δ.

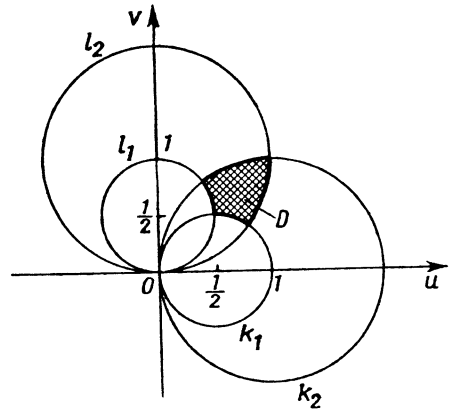
Rozważmy prostą o równaniu $x=1$. Podstawiając tę wartość do pierwszego równania (1) otrzymujemy $1=\frac{u}{u^2+v^2}$, skąd po przekształceniach otrzymujemy

$$k_1\colon\ (u-\tfrac{1}{2})^2+v^2=\tfrac{1}{4}; \tag{4}$$

jest to równanie okręgu o środku w punkcie $(\frac{1}{2},0)$ i promieniu $r=\frac{1}{2}$. Podobnie podstawiając $x=\frac{1}{2}$ do pierwszego równania (1), otrzymujemy

$$k_2\colon\ (u-1)^2+v^2=1; \tag{5}$$

równanie to jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(1,0)$ i promieniu $r=1$.



Rys. 2.5

Analogiczne rozważania dotyczące drugiego równania (1) prowadzą nas do równań okręgów

$$l_1\colon\ (v-\tfrac{1}{2})^2+u^2=\tfrac{1}{4}\quad\text{oraz}\quad l_2\colon\ (v-1)^2+u^2=1, \tag{6}$$

które przechodzą w proste odpowiednio o równaniach $y=\frac{1}{2}$ oraz $y=1$.

Na rysunku 2.5 obszar zakreskowany oznacza zbiór D, który przy przekształceniu (1) przechodzi w kwadrat Δ.

Zadania

Obliczyć jakobiany przekształceń. Znaleźć przekształcenie odwrotne do tych przekształceń oraz znaleźć obrazy Δ zbiorów D otrzymanych za pomocą tych przekształceń (zad. 2.73 - 2.76):

2.73. $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$; $D=\{(u,v)\colon 1\leqslant u\leqslant 2,\ -u\leqslant v\leqslant 4-u\}$.

2.74. $x=u$, $y=v\sqrt{u}$; $D=\{(u,v)\colon 0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant\sqrt{u}\}$.

2.75. $x=u$, $y=u-v$; $D=\{(u,v)\colon 0\leqslant u\leqslant 1,\ x-1\leqslant v\leqslant x\}$.

2.76. $x=2u+3v$, $y=u-v$; $D=\{(u,v)\colon u^2+v^2\leqslant 1\}$.

2.77. Obrazem zbioru D jest wnętrze elipsy $26x^2-94xy+101y^2-25=0$. Wyznaczyć jakobian przekształcenia oraz przekształcenie odwrotne do przekształcenia $x=\sqrt[3]{uv^2}$, $y=\sqrt[3]{u^2v}$. Znaleźć obrazy prostych $u=a$ i $v=b$.

2.78. Wykazać, że przekształcenie (2.5.14) odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie wnętrze prostopadłościanu $\{(r,\varphi,\theta)\colon 0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi\}$, na wnętrze półkuli $\{(x,y,z)\colon 0\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2,\ 0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$.

2.79. Obliczyć jakobian przekształcenia $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$. Przekształcenie to określa zmianę współrzędnych prostokątnych na tzw. *współrzędne walcowe* (*cylindryczne*).

2.80. Zbadać jednokrotność przekształcenia $x=u+v-w+3$, $y=2u-v+w+2$, $z=u+2v+w+1$.

§ 2.6. UKŁADY FUNKCJI UWIKŁANYCH

Niech będzie danych m funkcji $F_1, F_2, \ldots, F_m$ określonych w przestrzeni $\mathcal{R}^{n+m}$, których zmienne oznaczamy literami $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$. Niech funkcje te będą klasy C^1 w pewnym obszarze W. Rozpatrzmy układ równań

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)=0 \quad (i=1,2,\ldots,m). \tag{2.6.1}$$

Przypuśćmy dalej, że punkt $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)})$ spełnia ten układ równań. Załóżmy również, że jakobian

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} \tag{2.6.2}$$

w punkcie P_0 jest różny od zera. Wówczas mamy twierdzenie:

(2.6.3) *Istnieje otoczenie U punktu $Q_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ w przestrzeni $\mathcal{R}^n$, w którym są określone funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_n$ takie, że są spełnione następujące warunki:*

1° *jeżeli w równości* (2.6.1) *podstawimy $y_i=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i=1,2,\ldots,m)$, to równości te będą tożsamościowo spełnione względem zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$;*

2° $f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})=y_i^{(0)}$ *dla* $i=1,2,\ldots,m$;

3° *funkcje f_i $(i=1,2,\ldots,m)$ są klasy C^1.*

Pochodne $\partial f_i/\partial x_j$ funkcji $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ znajdujemy różniczkując układ (2.6.1) względem x_j, stosując wzory na pochodne cząstkowe funkcji złożonej, przy czym zamiast y_i podstawiamy funkcje $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Otrzymujemy wówczas układ n równań liniowych względem pochodnych $\partial f_i/\partial x_j$, z którego możemy te pochodne obliczyć, ponieważ wyznacznik charakterystyczny tego układu równań (por. I, § 9.4) jest równy jakobianowi (2.6.2), a jakobian ten w pewnym otoczeniu punktu P_0 jest różny od zera.

ZADANIE 2.81. Wyznaczyć punkty, w otoczeniu których układ równań

$$x+y^2+2z-1=0, \quad 2x-3y+z=0 \tag{1}$$

wyznacza zmienne y i z jako funkcje zmiennej x. Obliczyć pochodne rzędu pierwszego i drugiego tych funkcji.

Rozwiązanie. Oznaczmy lewą stronę równania pierwszego (1) przez $F(x, y, z)$ a lewą stronę drugiego równania (1) przez $G(x, y, z)$. Obliczmy jakobian tych funkcji względem y i z:

$$\frac{D(F, G)}{D(y, z)}=\begin{vmatrix} 2y & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=2(y+3). \tag{2}$$

Widzimy, że jakobian (2) wtedy i tylko wtedy jest różny od zera, gdy $y\neq -3$. A więc przez każdy punkt (x_0, y_0, z_0) przestrzeni $\mathscr{R}^3$, spełniający równania (1) oraz taki, że $y_0\neq -3$, przechodzi krzywa wyznaczona równaniami

$$y=y(x), \quad z=z(x), \tag{3}$$

gdzie $y(x)$ oraz $z(x)$ są odpowiednio jednoznacznymi gałęziami funkcji uwikłanych (na ogół wieloznacznych) określonych przez układ równań (1).

Chcąc obliczyć pierwsze pochodne, różniczkujemy stronami równania (1) traktując je jako tożsamości przy $y=y(x)$ oraz $z=z(x)$; mamy

$$1+2yy'+2z'=0, \quad 2-3y'+z'=0, \tag{4}$$

skąd po rozwiązaniu otrzymujemy

$$y'=\frac{3}{2(y+3)}, \quad z'=\frac{-(4y+3)}{2(y+3)}. \tag{5}$$

Chcąc znaleźć drugie pochodne, różniczkujemy stronami równania (4); mamy

$$2yy''+2(y')^2+2z''=0, \quad -3y''+z''=0. \tag{6}$$

Rozwiązując równania (6) przy wykorzystaniu wzorów (5) po redukcji, otrzymujemy

$$y''=\frac{-9}{4(y+3)^3}, \quad z''=\frac{-27}{4(y+3)^3}. \tag{7}$$

Biorąc w szczególności punkt $(-3, -2, 0)$, w którym układ (1) jest spełniony, otrzymujemy

$$y'(-3)=\tfrac{3}{2}, \quad z'(-3)=\tfrac{5}{2}, \quad y''(-3)=-\tfrac{9}{4}, \quad z''(-3)=-\tfrac{27}{4}.$$

ZADANIE 2.82. Wyznaczyć punkty, w otoczeniu których układ równań

$$2x-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\sin y\cos y+z+6=0, \quad x^2+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\sin y\cos y+z=0 \tag{1}$$

wyznacza zmienne y i z jako funkcje zmiennej x. Obliczyć w tych punktach pochodne dy/dx i dz/dx.

Rozwiązanie. Oznaczając podobnie jak w zadaniu poprzednim odpowiednio lewe strony równań (1) przez F i G, obliczamy jakobian

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2y & 1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2y & 1 \end{vmatrix}=-1. \tag{2}$$

Widzimy, że jakobian (2) jest zawsze różny od zera, a zatem przez każdy punkt $P(x,y,z)$ spełniający równania (1) przechodzi krzywa $y=y(x)$, $z=z(x)$, gdzie $y(x)$ i $z(x)$ są jednoznacznymi gałęziami odpowiednich funkcji uwikłanych, określonych układem równań (1).

Chcąc teraz znaleźć pochodne, różniczkujemy stronami równania (1), traktując je jako tożsamości przy $y=y(x)$, $z=z(x)$; mamy

$$2-\tfrac{1}{2}y'+\tfrac{1}{2}(\cos 2y)\,y'+z'=0, \quad 2x+\tfrac{1}{2}y'+\tfrac{1}{2}(\cos 2y)\,y'+z'=0. \tag{3}$$

Z równań (3) łatwo obliczamy pochodne

$$\frac{dy}{dx}=2(1-x), \quad \frac{dz}{dx}=-2(x\sin^2 y+\cos^2 y).$$

Zadania

W podanych zadaniach znaleźć zbiory punktów, w których podane równania wyznaczają układy funkcji uwikłanych $y(x)$ i $z(x)$, oraz wyznaczyć pochodne tych funkcji dy/dx i dz/dx; wyznaczyć wartość jakobianu funkcji $y(x)$, $z(x)$ oraz podać warunek na to, aby jakobian ten był różny od zera (zad. 2.83 - 2.87):

2.83. $z^2+y^2-2z=0$, $xy+zx+2=0$.

2.84. $e^x+e^y-e^z=0$, $x+y-z=0$.

2.85. $\ln x+\ln y+\ln z=0$, $x+y-z=0$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

2.86. $\ln xy+z=0$, $y^2+z^2=0$, $x>0$, $y>0$.

2.87. $x^2+2z^2-y+1=0$, $-x+y^2-z+2=0$.

§ 2.7. EKSTREMA WARUNKOWE

Niech funkcje f i g zmiennych x i y będą określone i ciągłe w pewnym obszarze płaskim D. Mówimy, że funkcja $z=f(x,y)$ osiąga w punkcie $P_0(x_0,y_0)$ należącym do obszaru D *maksimum warunkowe* (*minimum warunkowe*), przy *warunku*

$$g(x,y)=0, \tag{2.7.1}$$

jeżeli punkt P_0 spełnia równanie (2.7.1) oraz istnieje takie otoczenie U punktu P_0, że dla każdego punktu $P(x, y)$ należącego do U spełniającego warunek (2.7.1) zachodzi nierówność $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (nierówność $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

Mamy następujące *twierdzenie o istnieniu ekstremów warunkowych* (które mają charakter ekstremów lokalnych):

(2.7.2) *Jeżeli funkcje f i g są klasy C^1 w obszarze D, to warunkiem koniecznym istnienia w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ ekstremum funkcji $f(x, y)$ przy warunku* (2.7.1) *jest spełnienie równości*

$$\frac{D(f, g)}{D(x, y)} = 0 \tag{2.7.3}$$

w punkcie P_0, to znaczy dla $x = x_0, y = y_0$.

Z twierdzenia tego wynika, że *przy zrobionych założeniach wszystkie możliwe ekstrema znajdujemy rozwiązując układ równań*

$$g(x, y) = 0, \quad \frac{D(f, g)}{D(x, y)} = 0. \tag{2.7.4}$$

Praktycznie często stosujemy tzw. *metodę Lagrange'a czynnika nieoznaczonego*. Polega ona na wprowadzeniu pomocniczej *funkcji Lagrange'a*

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y), \tag{2.7.5}$$

znalezieniu dla niej warunków koniecznych na istnienie ekstremum tej funkcji rozpatrywanej jako funkcja dwóch zmiennych, to znaczy wypisaniu równań $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, a następnie wyrugowaniu z tego układu równań czynnika nieoznaczonego λ. Otrzymujemy wówczas warunek (2.7.3), do którego dołączamy warunek (2.7.1).

Pojęcie ekstremum warunkowego rozszerza się w sposób naturalny na funkcję większej ilości zmiennych przy warunku polegającym na spełnieniu układu równań postaci (2.7.1). W tak ogólnym przypadku możemy również stosować metodę Lagrange'a przy odpowiedniej modyfikacji.

ZADANIE 2.88. Wyznaczyć ekstrema funkcji $z = xy$ przy warunku

$$x^2 + y^2 = 2. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Oznaczmy $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$. Stosownie do metody Lagrange'a tworzymy funkcję pomocniczą

$$F(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2), \tag{2}$$

a następnie obliczamy pochodne cząstkowe tej funkcji

$$F'_x(x, y) = y + 2\lambda x, \quad F'_y(x, y) = x + 2\lambda y. \tag{3}$$

Na podstawie warunku koniecznego $F'_x(x, y) = 0$, $F'_y(x, y) = 0$ dla istnienia ekstremum funkcji $F(x, y)$, mamy następujący układ równań:

$$y + 2\lambda x = 0, \quad x + 2\lambda y = 0, \tag{4}$$

skąd po wyrugowaniu czynnika nieoznaczonego λ mamy

$$y^2-x^2=0. \tag{5}$$

Dołączamy do tego warunek (1), czyli

$$x^2+y^2-2=0. \tag{6}$$

Na podstawie metody Lagrange'a wszystkie możliwe punkty ekstremalne funkcji $z=xy$ przy warunku (1) znajdują się wśród rozwiązań układu równań (5) i (6). Rozwiązania tego układu są następujące:

$$(1,1),\quad (1,-1),\quad (-1,1),\quad (-1,-1). \tag{7}$$

Chcemy teraz zbadać, w których z podanych punktów funkcja $z=xy$ przy warunku (1) rzeczywiście przyjmuje ekstremum. Weźmy najpierw pod uwagę punkt (1, 1). W otoczeniu tego punktu równanie (6) określa nam funkcję uwikłaną $y(x)=\sqrt{2-x^2}$, czyli w otoczeniu tego punktu funkcja $z=xy$ przy warunku (6) zachowuje się identycznie jak funkcja jednej zmiennej

$$G(x)=F(x, y(x))=x\sqrt{2-x^2}, \tag{8}$$

a ta funkcja, jak łatwo sprawdzić, w punkcie $x=1$ ma maksimum. W ten sposób wykazaliśmy, że funkcja $z=xy$ przy warunku (6) w punkcie (1, 1) ma maksimum.

Podobnie możemy wykazać, że funkcja $z=xy$ przy warunku (6) w punkcie (1, -1) ma minimum, w punkcie (-1, 1) ma również minimum, a w punkcie (-1, -1) ma maksimum.

ZADANIE 2.89. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x, y)=x^2+y^2$ przy warunku

$$x^3+y^3-16=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Szukamy rozwiązań układu (2.7.4), tzn. w naszym przypadku rozwiązań układu równań

$$x^3+y^3=16 \quad \text{oraz} \quad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Układ ten ma trzy rozwiązania:

$$\begin{array}{lll} x_1=2, & x_2=0, & x_3=\sqrt[3]{16}, \\ y_1=2, & y_2=\sqrt[3]{16}, & y_3=0, \end{array} \tag{3}$$

które wyznaczają odpowiednio trzy punkty na płaszczyźnie:

$$A(2,2),\quad B(0,\sqrt[3]{16}),\quad C(\sqrt[3]{16},0).$$

Chcemy się teraz przekonać, czy funkcja x^2+y^2 przy warunku (1) ma w punktach A, B i C ekstrema. W tym celu różniczkujemy równanie (1) jako tożsamość wyznaczającą y jako funkcję uwikłaną x. Otrzymujemy wtedy

$$3x^2+3y^2y'=0, \tag{4}$$

skąd wyznaczamy pochodną funkcji $y=y(x)$ odpowiadającą punktom A i B. Otrzymujemy odpowiednio $y'_1=y'(2)=-1$, $y'_2=y'(0)=0$.

W punkcie C nie są spełnione założenia istnienia funkcji uwikłanej $y=y(x)$. Tożsamość (4) powtórnie różniczkujemy i otrzymujemy

$$6x+6y(y')^2+3y^2y''=0, \tag{5}$$

skąd obliczamy $y_1''=y''(2)=-2$, $y_2''=y''(0)=0$.

Oznaczając teraz

$$z=x^2+y^2, \tag{6}$$

gdzie y jest funkcją uwikłaną wyznaczoną równaniem (1), otrzymujemy przez kolejne różniczkowania

$$z'=2x+2yy', \quad z''=2+2(y')^2+2yy'', \tag{7}$$

skąd wyznaczamy kolejno

$$z'(2)=0, \quad z'(0)=0, \quad z''(2)=-4, \quad z''(0)=2.$$

Widzimy stąd, że funkcja (6) przy warunku (1) ma w punkcie $A(2,2)$ maksimum lokalne równe 8, natomiast w punkcie $B(0, \sqrt[3]{16})$ minimum lokalne równe $4\sqrt[3]{4}\approx 6{,}35$. Ze względu na to, że zarówno funkcja (6) jest symetryczna względem x i y jak i funkcja określająca warunek (1), wnioskujemy, że funkcja (6) w punkcie $C(\sqrt[3]{16}, 0)$ ma podobnie jak w punkcie B minimum lokalne równe $4\sqrt[3]{4}$. W otoczeniu punktu C równanie (1) wyznacza lokalnie x jako funkcję y.

Zadania

Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji $f(x,y)$ przy danym warunku $g(x,y)=0$ (zad. 2.90 - 2.99):

2.90. $f(x,y)=x^2+xy+y^2$, $g(x,y)=x+y-1$.

2.91. $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y)=xy-1$.

2.92. $f(x,y)=x^3+y^3$, $g(x,y)=x+y-2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

2.93. $f(x,y)=x+y$, $g(x,y)=e^{x+y}-xy-1$.

2.94. $f(x,y)=xy$, $g(x,y)=x^2+y^2-8$.

2.95. $f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $g(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-1$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

2.96. $f(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$, $g(x,y)=x+y-3$, $x\neq 0$, $y\neq 0$.

2.97. $f(x,y)=\cos^2 x+\cos^2 y$, $g(x,y)=x-y+\frac{1}{4}\pi$.

2.98. $f(x,y)=a\sin^2 x+b\sin^2 y$, $g(x,y)=x-y+\frac{1}{4}\pi$.

2.99. $f(x,y)=5x+3y$, $g(x,y)=4\sin x-3\cos y$.

§ 2.8. FUNKCJE JEDNORODNE

Funkcja $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ p zmiennych nazywa się *funkcją jednorodną stopnia k* (k – dowolna liczba rzeczywista), jeżeli wraz z punktem $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ do pola funkcji f należy też punkt $P_t(tx_1, tx_2, \ldots, tx_p)$, przy każdym $t>0$, oraz ma miejsce następująca zależność dla takich punktów:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_p)=t^k f(x_1, x_2, \ldots, x_p). \tag{2.8.1}$$

Mamy następujące *twierdzenie Eulera*:

Funkcja $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ p zmiennych klasy C^1 w obszarze W jest funkcją jednorodną stopnia k wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $P(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ należącego do obszaru W ma miejsce związek, zwany wzorem Eulera:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+x_p\frac{\partial f}{\partial x_p}=kf(x_1, x_2, \ldots, x_p). \tag{2.8.2}$$

ZADANIE 2.100. Stosując definicję funkcji jednorodnej wykazać, że

$$f(x, y, z)=xyz+xy^2+yz^2. \tag{1}$$

jest funkcją jednorodną stopnia trzeciego.

Rozwiązanie. Mamy

$$f(tx, ty, tz)=txtytz+txt^2y^2+tyt^2z^2=t^3(xyz+xy^2+yz^2)=t^3f(x, y, z).$$

Zatem funkcja (1) jest funkcją jednorodną stopnia trzeciego.

Obliczamy

$$f'_x=yz+y^2, \quad f'_y=xz+2xy+z^2, \quad f'_z=xy+2yz,$$

skąd otrzymujemy

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=x(yz+y^2)+y(xz+2xy+z^2)+z(xy+2yz)=$$
$$=3(xyz+xy^2+yz^2)=3f(x, y, z).$$

ZADANIE 2.101. Stosując twierdzenie Eulera wykazać, że funkcja

$$u=xy+y^2\sin\frac{x}{y} \tag{1}$$

jest funkcją jednorodną stopnia drugiego.

Rozwiązanie. Obliczmy pochodne cząstkowe

$$u'_x=y+y\cos\frac{x}{y}, \quad u'_y=x+2y\sin\frac{x}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot y^2\cos\frac{x}{y}=x+2y\sin\frac{x}{y}-x\cos\frac{x}{y}.$$

Podstawiając obliczone pochodne u'_x, u'_y do wzoru (2.8.2), otrzymujemy następującą równość:

$$x\left(y+y\cos\frac{x}{y}\right)+y\left(x+2y\sin\frac{x}{y}-x\cos\frac{x}{y}\right)=2\left(xy-y^2\sin\frac{x}{y}\right)=2u.$$

Z równości tej oraz z twierdzenia Eulera wynika, że funkcja (1) jest funkcją jednorodną stopnia drugiego.

Zadania

Posługując się twierdzeniem Eulera sprawdzić, że następujące funkcje są jednorodne określić ich stopień (zad. 2.102 - 2.104):

2.102. $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x+y+z}}$.

2.103. $2x^3y+xy^2z+4xyz^2$.

2.104. $x^3y\sin\dfrac{x}{y}+xy^3\cos\dfrac{x}{y}$.

Stosując definicję funkcji jednorodnej sprawdzić, czy następujące funkcje są jednorodne, jeśli tak, znaleźć ich stopień (zad. 2 105 - 2.112):

2.105. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}$.

2.106. $\dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{3x-y}$

2.107. $\ln\dfrac{x}{y}$.

2.108. $x^\pi\sin\dfrac{y}{x}+4y^\pi\cos\dfrac{x}{y}$.

2.109. $\dfrac{2x}{1+xy}$.

2.110. $\dfrac{3xy-4y^2}{6x^5+4x^2y^3-xy^4}$.

2.111. $x\sqrt{y}+2y\sqrt{x}$.

2.112. $3x^{\sqrt{2}}\ln\dfrac{y}{x}$.

2.113. Sprawdzić, że każda z powyższych funkcji, która jest jednorodna, da się przedstawić w postaci iloczynu funkcji jednego argumentu $u=y/x$ przez y^k, gdzie k jest stopniem jednorodności.

Rozdział III

ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO DO KRZYWEJ PŁASKIEJ

§ 3.1. STYCZNA I NORMALNA DO KRZYWEJ PŁASKIEJ

Jeżeli $y=f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją różniczkowalną dla $x \in (a, b)$, jest równaniem krzywej, to w każdym jej punkcie $M(x_0, y_0)$ istnieje do niej *styczna*, której równanie ma postać

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0), \tag{3.1.1}$$

a *równanie normalnej* [1] ma postać

$$(x-x_0)+f'(x_0)(y-y_0)=0. \tag{3.1.2}$$

Jeżeli krzywa dana jest równaniem $F(x, y)=0$, a w leżącym na niej punkcie $M(x_0, y_0)$, tzn. spełniającym warunek $F(x_0, y_0)=0$, istnieją pochodne $F'_x(x_0, y_0)$ i $F'_y(x_0, y_0)$, z których przynajmniej jedna jest różna od zera, przy czym istnieje takie otoczenie punktu $M(x_0, y_0)$, w którym obie pochodne są ciągłe, to krzywa ta ma *styczną* w punkcie $M(x_0, y_0)$ daną równaniem

$$F'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0)(y-y_0)=0 \tag{3.1.3}$$

oraz *normalną* wyznaczoną równaniem

$$F'_y(x_0, y_0)(x-x_0)-F'_x(x_0, y_0)(y-y_0)=0. \tag{3.1.4}$$

ZADANIE 3.1. Znaleźć równania stycznej oraz normalnej do krzywej $y=x^3-x$ w punkcie $M(1, 0)$.

Rozwiązanie. Przede wszystkim sprawdzamy, czy punkt M leży na krzywej; mamy $0=1-1$. Następnie obliczamy wartość pochodnej w punkcie M; mamy

$$y'=3x^2-1, \quad \text{skąd} \quad f'(1)=3-1=2.$$

A więc równanie stycznej jest

$$y=2(x-1), \quad \text{czyli} \quad y=2x-2,$$

a równanie normalnej jest

$$(x-1)+2y=0, \quad \text{czyli} \quad y=-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}.$$

---

[1] *Normalną do krzywej* w leżącym na krzywej punkcie M nazywamy prostą przechodzącą przez punkt M i prostopadłą do stycznej w tym punkcie.

ZADANIE 3.2. Znaleźć równania stycznej oraz normalnej do krzywej $x^2+y^3=0$ w punkcie $M(1,-1)$.

Rozwiązanie. Sprawdzamy, czy punkt M leży na krzywej; mamy $1^2+(-1)^3=0$. Oznaczmy $F(x,y)\equiv x^2+y^3$. Obliczamy wartości pochodnych cząstkowych w punkcie M; mamy

$$F'_x(x,y)=2x, \text{ skąd } F'_x(1,-1)=2 \quad \text{oraz} \quad F'_y(x,y)=3y^2, \text{ skąd } F'_y(1,-1)=3.$$

Równaniem stycznej jest więc

$$2(x-1)+3(y+1)=0, \quad \text{czyli} \quad 2x+3y+1=0,$$

a równaniem normalnej jest

$$3(x-1)-2(y+1)=0, \quad \text{czyli} \quad 3x-2y-5=0.$$

ZADANIE 3.3. Znaleźć równania stycznej oraz normalnej do cykloidy danej równaniami parametrycznymi

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t), \quad a>0,$$

w punkcie $t=\frac{1}{3}\pi$.

Rozwiązanie. Obliczamy różniczki

$$dx=a(1-\cos t)\,dt, \quad dy=a\sin t\,dt,$$

a stąd

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1-\cos t} \quad (\cos t\neq 1).$$

Dla $t=\frac{1}{3}\pi$ mamy

$$x_0=a(\tfrac{1}{3}\pi-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}), \quad y_0=\tfrac{1}{2}a, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_0,y_0)}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}.$$

Równanie stycznej jest

$$y-\tfrac{1}{2}a=\sqrt{3}(x-a(\tfrac{1}{3}\pi-\tfrac{1}{2}\sqrt{3})), \quad \text{czyli} \quad y=\sqrt{3}x+(2-\tfrac{1}{3}\pi\sqrt{3})a,$$

a równanie normalnej przybiera postać

$$x-a(\tfrac{1}{3}\pi-\tfrac{1}{2}\sqrt{3})+\sqrt{3}(y-\tfrac{1}{2}a)=0, \quad \text{czyli} \quad x+\sqrt{3}y-\tfrac{1}{3}\pi a=0.$$

Zadania

Znaleźć równania stycznej oraz normalnej do krzywej w danym punkcie M (zad. 3.4 - 3.7):

3.4. $y=\sqrt{2x^3+x^2+1}$, $M(1,2)$. **3.5.** $y=x^3-2x+1$, $M(1,0)$.

3.6. $x^2-2xy+y^2-x+1=0$, $M(2,1)$. **3.7.** $x^2y^3-y^2-4=0$, $M(1,2)$.

3.8. Znaleźć równania stycznej i normalnej do linii $x=3t^2$, $y=3t-t^3$ w punkcie dla $t=\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

3.9. Znaleźć równanie stycznej do paraboli Neila $x^3 - py^2 = 0$ w punkcie (p, p).

3.10. Znaleźć równanie stycznej do cisoidy $y^2(2r-x) - x^3 = 0$ w punkcie (r, r).

3.11. Znaleźć równanie stycznej do liścia Kartezjusza $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ w punkcie $(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a)$.

3.12. Znaleźć równanie stycznej do krzywej $y = a^x$ w punkcie $(1, a)$.

3.13. Znaleźć równanie stycznych do krzywej $x^3 + y^3 + 2x - 6 = 0$ w punktach krzywej, w których rzędna równa jest -3 lub 3.

3.14. Znaleźć równanie stycznej do linii łańcuchowej $y = \frac{1}{2}m(e^{x/m} + e^{-x/m})$ w punkcie, którego odcięta równa się m.

3.15. Wykazać, że odcinek stycznej do asteroidy $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ zawarty między osiami współrzędnych ma stałą długość a.

3.16. Znaleźć równanie normalnej do krzywej $y = a \ln \cos(x/a)$ w punkcie $x = 2\pi a$.

3.17. Znaleźć równania stycznej i normalnej do rozwijającej okręgu (por. § 3.3) $x = r(\cos t + t \sin t)$, $y = r(\sin t - t \cos t)$, $r > 0$, w punkcie dla $t = \frac{1}{4}\pi$.

3.18. Znaleźć równania stycznej i normalnej do spiralnej logarytmicznej $r = e^{\theta}$ w punkcie $\theta = k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Wskazówka. Podstawić $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

§ 3.2. KRZYWIZNA I PROMIEŃ KRZYWIZNY

Krzywizną średnią $k(\overset{\frown}{MM_1})$ *łuku* $\overset{\frown}{MM_1}$ nazywamy stosunek bezwzględnej wartości miary łukowej kąta φ, zawartego między stycznymi wykreślonymi w punktach M i M_1, do długości $|\overset{\frown}{MM_1}|$ łuku $\overset{\frown}{MM_1}$:

$$k(\overset{\frown}{MM_1}) = \frac{|\varphi|}{|\overset{\frown}{MM_1}|}. \tag{3.2.1}$$

Krzywizną $k(M)$ *w punkcie* M danej krzywej nazywamy granicę krzywizny średniej łuku $\overset{\frown}{MM_1}$ tej krzywej, gdy punkt M_1 dąży po tej krzywej do punktu M:

$$k(M) = \lim_{M_1 \to M} k(\overset{\frown}{MM_1}). \tag{3.2.2}$$

Środkiem krzywizny łuku $\overset{\frown}{MM_1}$ *w punkcie* M nazywamy graniczne położenie S punktu P przecięcia normalnych wykreślonych w punktach M i M_1, gdy punkt M_1 dąży po łuku do punktu M (por. też § 3.3).

Promieniem krzywizny łuku w punkcie M nazywamy długość odcinka normalnej w punkcie M, zawartego pomiędzy środkiem krzywizny S a punktem M (patrz rys. 3.1).

Łatwo wykazać, że *krzywizna w punkcie* M *równa się odwrotności promienia krzywizny w tym punkcie.*

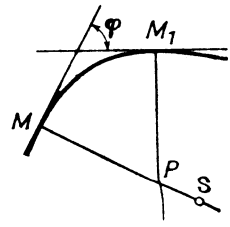
Okrąg, którego środek jest środkiem krzywizny, a promień równa się promieniowi krzywizny, nosi nazwę *okręgu ściśle stycznego do krzywej* lub *okręgu krzywiznowego* w danym punkcie.

Jeżeli równanie krzywej jest postaci $y=f(x)$ i funkcja $f(x)$ ma drugą pochodną, to *promień krzywizny* R_M w punkcie $M(x, y)$ tej krzywej wyraża się wzorem

$$R_M=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}, \quad \text{gdzie} \quad \frac{d^2y}{dx^2}\neq 0, \tag{3.2.3}$$

a *krzywizna* k_M wyraża się wzorem

$$k_M=\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{3.2.4}$$



Rys. 3.1

Ze wzorów powyższych widać, że *jeżeli funkcja* $y=f(x)$ *ma ekstremum w punkcie* $x=x_0$, *a więc jeżeli* $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=0$, *to krzywizna równa się bezwzględnej wartości drugiej pochodnej w tym punkcie*:

$$k_M=\left|\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x_0, y_0)}\right|. \tag{3.2.5}$$

Dla punktu przegięcia druga pochodna jest równa zeru, więc krzywizna w tym punkcie jest równa zeru.

Jeżeli krzywa dana jest równaniami parametrycznymi $x=x(t)$, $y=y(t)$ i funkcje $x(t)$ i $y(t)$ mają drugie pochodne, to *promień krzywizny* wyraża się wzorem

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-x''y'|}, \quad \text{gdzie} \quad x'y''-x''y'\neq 0, \tag{3.2.6}$$

a *krzywizna* wyraża się wzorem

$$k=\frac{|x'y''-x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}, \tag{3.2.7}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$x'=\frac{dx}{dt}, \quad y'=\frac{dy}{dt}, \quad x''=\frac{d^2x}{dt^2}, \quad y''=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

ZADANIE 3.19. Obliczyć promień krzywizny paraboli $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ w punkcie $x=x_0$.

Rozwiązanie. Z równania paraboli obliczamy pochodne

$$y'=2ax+b, \quad y''=2a,$$

a więc

$$R=\frac{(1+(2ax_0+b)^2)^{3/2}}{2|a|}.$$

W wierzchołku paraboli, tj. w punkcie o odciętej $x=-\frac{b}{2a}$, mamy $y'=0$, a więc promień krzywizny R_w paraboli $y=ax^2+bx+c$ w wierzchołku jest równy $R_w=\frac{1}{2|a|}$.

ZADANIE 3.20. Określić, w którym punkcie linii $y=\ln x$ krzywizna osiąga ekstremum.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$, i obliczamy pochodne funkcji $y=\ln x$; mamy

$$y'=\frac{1}{x}, \qquad y''=-\frac{1}{x^2}.$$

Ponieważ

$$(1+y'^2)^{3/2}=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}=\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{3/2}=\frac{(x^2+1)^{3/2}}{x^3},$$

więc krzywizna k wyraża się wzorem

$$k=\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}. \tag{1}$$

Aby znaleźć ekstremum tej funkcji, obliczamy jej pochodną

$$\frac{dk}{dx}=\frac{(1+x^2)^{3/2}\cdot 1-x\cdot\frac{3}{2}(1+x^2)^{1/2}\cdot 2x}{(1+x^2)^3}=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{5/2}}.$$

Przyrównując obliczoną pochodną do zera otrzymujemy

$$1-2x^2=0, \qquad \text{skąd} \qquad x=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

(pierwiastka $x=-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ nie bierzemy pod uwagę, ponieważ założyliśmy, że $x>0$). Zatem ekstremum zachodzić może tylko w punkcie $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ponieważ poza tym dla $0<x<\frac{1}{2}\sqrt{2}$ mamy $dk/dx>0$, a dla $x>\frac{1}{2}\sqrt{2}$ mamy $dk/dx<0$, przeto w punkcie $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ krzywizna k linii $y=\ln x$ osiąga maksimum. Podstawiając do (1) wartość $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ otrzymujemy $k_{\max}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

ZADANIE 3.21. Obliczyć najmniejszy i największy promień krzywizny kardioidy $r=a(1+\cos\theta)$, $a>0$.

Rozwiązanie. Przechodząc do współrzędnych prostokątnych, otrzymujemy

$$x=a\cos\theta(1+\cos\theta), \qquad y=a\sin\theta(1+\cos\theta).$$

Obliczamy

$$x'=-a(\sin\theta+\sin 2\theta), \qquad y'=a(\cos\theta+\cos 2\theta),$$

$$x''=-a(\cos\theta+2\cos 2\theta), \qquad y''=-a(\sin\theta+2\sin 2\theta).$$

Ponieważ

$$x'^2+y'^2=a^2(\sin^2\theta+2\sin\theta\sin 2\theta+\sin^2 2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)=$$

$$=a^2(2+2\cos(2\theta-\theta))=2a^2(1+\cos\theta)=4a^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

skąd

$$(x'^2+y'^2)^{3/2}=8a^3\cos^3\tfrac{1}{2}\theta,$$

oraz

$$x'y''-x''y'=a^2(\sin^2\theta+3\sin\theta\sin 2\theta+2\sin^2 2\theta+\cos^2\theta+3\cos\theta\cos 2\theta+2\cos^2 2\theta)=$$
$$=a^2(3+3\cos(2\theta-\theta))=3a^2(1+\cos\theta)=6a^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

zatem

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-x''y'|}=\tfrac{4}{3}a\cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

Promień krzywizny osiąga minimum, gdy $\theta=\pi$; jest wówczas $R_{\min}=0$, tzn. gdy $\theta\to\pi$, wówczas $R\to 0$. Promień krzywizny osiąga maksimum dla $\theta=0$ i wtedy $R_{\max}=\frac{4}{3}a$.

Zadania

3.22. Obliczyć promień krzywizny krzywej $y=x^3-2x$ w punkcie $A(1,-1)$.

3.23. Obliczyć promień krzywizny paraboli $y^2=2px$, $p>0$, w jej wierzchołku.

3.24. Obliczyć promień krzywizny paraboli $y=x^2$ w punkcie $x=2$.

3.25. Obliczyć promień krzywizny paraboli $y^2=4\sqrt{2}x$ w punkcie $x=\sqrt{2}$.

3.26. Obliczyć krzywiznę paraboli półsześciennej $y^2=x^3$ w punkcie $x=\frac{4}{3}$.

3.27. Obliczyć krzywiznę elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$, w punkcie $x=0$ i w punkcie $x=a$.

3.28. Określić punkty, w których hiperbola $xy=1$ ma największą krzywiznę.

Obliczyć promień krzywizny krzywej (zad. 3.29 - 3.38):

3.29. $3a^2y=x^3$, $x=1$.

3.30. $y=x^4-4x^3-18x^2$, $x=0$.

3.31. Hiperboli $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2=1$ w punkcie $x=9$.

3.32. $y^2(x-4m)=mx(x-3m)$ w punktach przecięcia z osią Ox.

3.33. $y=\operatorname{tg}x$, $x=\frac{1}{4}\pi$.

3.34. $y=a\ln\cos(x/a)$, $x\neq a(\frac{1}{2}\pi+k\pi)$.

3.35. $y=3\sin 2x$, $x=\frac{1}{4}\pi$.

3.36. $y=4\cos\frac{1}{2}x$, $x=\frac{1}{2}\pi$.

3.37. $y=2e^{3x}$, $x=0$.

3.38. $y=xe^{-x}$, $x=-1$.

3.39. Obliczyć promień krzywizny linii łańcuchowej $y=\frac{1}{2}c(e^{x/c}+e^{-x/c})$ w jej wierzchołku (tj. w punkcie o odciętej równej zeru).

3.40. Obliczyć krzywiznę sinusoidy $y=\sin x$ w punkcie $x=\frac{1}{2}\pi$.

3.41. Obliczyć promień krzywizny w punkcie odpowiadającym wartości parametru $t=t_0$ ewolwenty okręgu $x=r(\cos t+t\sin t)$, $y=r(\sin t-t\cos t)$, $r>0$.

Obliczyć promień krzywizny krzywej (zad. 3.42 i 3.43):

3.42. $x=t^2$, $y=t^3$, $t=1$.

3.43. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t=\frac{1}{3}\pi$.

3.44. Obliczyć ekstremalne wartości promienia krzywizny linii $r=a\cos^3\frac{1}{3}\theta$, $a>0$, w przedziale $0\leqslant\theta\leqslant 3\pi$.

3.45. Obliczyć promień krzywizny linii krzywej $r=2a\cos\theta$, $a>0$, w punkcie $\theta=\theta_0$.

3.46. Obliczyć promień krzywizny spiralnej Archimedesa $r=a\theta$, $a>0$, w punkcie $\theta=\theta_0$.

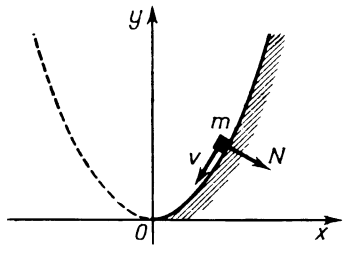
Wskazówka (do zad. 3.44 - 3.46). Podstawić $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

3.47. Obliczyć promień krzywizny krzywej $r^2=a^2\cos 2\varphi$ dla $\varphi=0$.

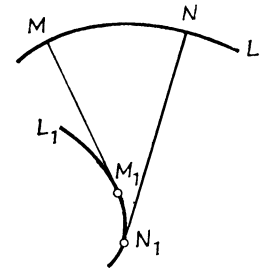
3.48. Pewien przedmiot o masie m zsuwa się po torze w kształcie paraboli o równaniu $y=\frac{1}{2}x^2$. W punkcie $A(1,\frac{1}{2})$ prędkość przedmiotu wynosi v. Wyznaczyć siłę nacisku na tor w punkcie A wywołaną wyłącznie zmianą kierunku ruchu przedmiotu (rys. 3.2).

Uwaga. Szukana siła wyraża się wzorem $N=\dfrac{mv^2}{\rho}$, gdzie ρ jest promieniem krzywizny.

3.49. Pewien przedmiot porusza się po torze w kształcie elipsy. Równania tego ruchu są następujące: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, gdzie t oznacza czas, a, b stałe ($a\neq b$). Wyznaczyć przyśpieszenie normalne $p_n=\dfrac{v^2}{\rho}$, gdzie v jest to prędkość liniowa, a ρ promień krzywizny w momencie $t=0$.



Rys. 3.2



Rys. 3.3

§ 3.3. EWOLUTA I EWOLWENTA

Jeżeli krzywa ma równanie $y=f(x)$, gdzie $f(x)$ jest klasy C^2, to *środek krzywizny* w punkcie (x,y) (por. § 3.2) ma współrzędne

$$\xi=x-y'\frac{1+y'^2}{y''},\qquad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{3.3.1}$$

Jeżeli krzywa wyrażona jest równaniami parametrycznymi $x=g(t)$, $y=h(t)$, to *środek krzywizny* w punkcie t ma współrzędne

$$\xi=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},\qquad \eta=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}, \tag{3.3.2}$$

gdzie $x'y''-x'y''\neq 0$, przy czym

$$x'=\frac{dx}{dt},\quad y'=\frac{dy}{dt},\quad x''=\frac{d^2x}{dt^2},\quad y''=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Jeśli promień krzywizny krzywej L zmienia się w sposób ciągły, to miejsce geometryczne środków krzywizny krzywej L nazywamy *ewolutą* albo *rozwiniętą* krzywej L, a sama krzywa L nazywa się *ewolwentą* (lub *rozwijającą*) swej *ewoluty*.

Aby znaleźć równanie ewoluty krzywej danej równaniem $y=f(x)$, należy w równaniach (3.3.1) wyrazić y, y' i y'' przez x i wówczas równania te stają się równaniami ewoluty w postaci parametrycznej z parametrem x. Po wyrugowaniu parametru x otrzymamy równanie ewoluty w postaci $F(\xi,\eta)=0$. Podobnie otrzymamy równanie ewoluty z układu równań (3.3.2) po wyrugowaniu parametru t.

Dowodzi się, że

Normalna do danej linii jest styczną do jej ewoluty (rozwiniętej) (rys. 3.3).

Długość łuku $\overset{\frown}{N_1M_1}$ *ewoluty (rozwiniętej) L równa się bezwzględnej wartości różnicy promieni krzywizny w punktach N i M ewolwenty (rozwijającej) L, odpowiadających końcom łuku* $\overset{\frown}{N_1M_1}$ (rys. 3.3):

$$\overset{\frown}{N_1M_1}=|N_1N-M_1M|. \tag{3.3.3}$$

ZADANIE 3.50. Znaleźć równanie okręgu krzywiznowego cisoidy

$$y^2=\frac{x^3}{2a-x}, \quad a>0, \tag{1}$$

w punkcie $x=\frac{2}{3}a$.

Rozwiązanie. Odcięte punktów cisoidy spełniają nierówność $0<x<2a$. Piszemy równanie cisoidy w postaci

$$(2a-x)y^2=x^3 \tag{2}$$

i różniczkujemy stronami:

$$(2a-x)\cdot 2yy'-y^2=3x^2. \tag{3}$$

Różniczkując po raz drugi mamy $(2a-x)\cdot 2yy''+(2a-x)\cdot 2y'^2-2yy'-2yy'=6x$, skąd

$$(2a-x)yy''+(2a-x)y'^2-2yy'=3x. \tag{4}$$

Podstawiając $x=\frac{2}{3}a$ do równania (2), otrzymujemy

$$y=\tfrac{1}{3}\sqrt{2}a \quad \text{lub} \quad y=-\tfrac{1}{3}\sqrt{2}a.$$

Z równania (3) otrzymujemy odpowiednio wartości pochodnej

$$y'=\frac{7}{4\sqrt{2}} \quad \text{lub} \quad y'=-\frac{7}{4\sqrt{2}}.$$

Wreszcie z równania (4) otrzymujemy

$$y''=\frac{81}{32\sqrt{2}a} \quad \text{lub} \quad y''=-\frac{81}{32\sqrt{2}a}.$$

Obliczamy promień krzywizny w punkcie $x=\frac{2}{3}a$:

$$R=\frac{(\sqrt{1+y'^2})^3}{|y''|}=\frac{9}{4}a.$$

Obliczamy ze wzorów (3.3.1) współrzędne środka krzywizny. Mamy

1° $\xi=-\frac{13}{12}a$, $\eta=\frac{4}{3}\sqrt{2}a$; zatem równaniem okręgu krzywiznowego jest

$$(x+\tfrac{13}{12}a)^2+(y-\tfrac{4}{3}\sqrt{2}a)^2=\tfrac{81}{16}a^2.$$

Podobnie

2° $\xi=-\frac{13}{12}a, \eta=-\frac{4}{3}\sqrt{2}a$,

$$(x+\tfrac{13}{12}a)^2+(y+\tfrac{4}{3}\sqrt{2}a)^2=\tfrac{81}{16}a^2.$$

ZADANIE 3.51. Napisać równanie okręgu krzywiznowego paraboli

$$y=\frac{x^2}{2p}-p, \quad p>0, \tag{1}$$

w punkcie $x=p$, i równanie ewoluty tej krzywej.

Rozwiązanie. Obliczamy pierwszą i drugą pochodną:

$$y'=\frac{x}{p}, \quad y''=\frac{1}{p}.$$

Stąd promień krzywizny

$$R=\frac{\sqrt{(p^2+x^2)^3}}{p^2}$$

i współrzędne środka krzywizny

$$\xi=-\frac{x^3}{p^2}, \quad \eta=\frac{3x^2}{2p}.$$

Po wyrugowaniu parametru x otrzymujemy równanie ewoluty danej paraboli

$$\eta^3=\tfrac{27}{8}p\xi^2;$$

jest to tzw. *parabola półsześcienna.*

Przy $x=p$ mamy $R=2\sqrt{2}p$, $\xi=-p$, $\eta=\frac{3}{2}p$. Łatwo sprawdzić, że współrzędne (ξ, η) środka krzywizny spełniają równanie ewoluty. Okrąg krzywiznowy ma równanie

$$(x+p)^2+(y-\tfrac{3}{2}p)^2=8p^2.$$

ZADANIE 3.52. Znaleźć równanie ewoluty asteroidy

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}, \quad a>0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Różniczkując stronami równanie asteroidy otrzymujemy

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3}+\tfrac{2}{3}y^{-1/3}y'=0.$$

Stąd obliczamy pierwszą pochodną

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}. \tag{2}$$

Aby znaleźć drugą pochodną, różniczkujemy pierwszą pochodną:

$$y'' = -\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2/3}\frac{xy'-y}{x^2} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{2/3}}{y^{2/3}}\cdot\frac{-x^{2/3}y^{1/3}-y}{x^2} = \frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}} = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{x^4y}\right)^{1/3} \tag{3}$$

Podstawiając wartości y' ze wzoru (2) i wartości y'' ze wzoru (3) do pierwszego ze wzorów (3.3.1) otrzymujemy

$$\xi = x - \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}}{\frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}}}\left(-\frac{y}{x}\right)^{1/3} = x + \left(\frac{a}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}\frac{3x^{4/3}y^{1/3}}{a^{2/3}}$$

i po uproszczeniu

$$\xi = x + 3x^{1/3}y^{2/3}. \tag{4}$$

Porównując wzór na współrzędną η ze wzorem na ξ, możemy z obliczonej wartości ξ wywnioskować, że

$$\eta = y + 3x^{2/3}y^{1/3}. \tag{5}$$

Z równań (4), (5) i równania asteroidy (1) należy teraz wyrugować x oraz y. Dodając, a następnie odejmując równania (4) i (5) stronami otrzymujemy

$$\xi+\eta = (x^{1/3}+y^{1/3})^3, \quad \xi-\eta = (x^{1/3}-y^{1/3})^3. \tag{6}$$

Podnosimy obie strony równań (6) do potęgi $\frac{2}{3}$ i dodajemy stronami:

$$(\xi+\eta)^{2/3}+(\xi-\eta)^{2/3} = 2a^{2/3}. \tag{7}$$

Jest to równanie poszukiwanej ewoluty asteroidy.

Zastosujmy wzory na obrót osi współrzędnych o kąt $\frac{1}{4}\pi$:

$$X = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\xi + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\eta, \quad \text{czyli} \quad X = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(\xi+\eta),$$

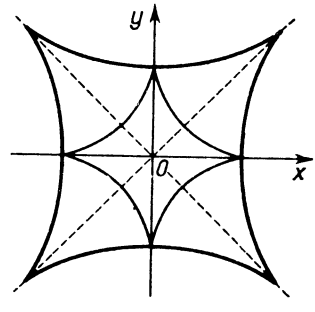
$$Y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\xi + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\eta, \quad \text{czyli} \quad Y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(\xi-\eta).$$

Stąd otrzymujemy

$$\xi+\eta = X\sqrt{2}, \quad \xi-\eta = -Y\sqrt{2}.$$

Po podstawieniu do równania (8) ostatecznie otrzymujemy

$$X^{2/3}+Y^{2/3} = (2a)^{2/3}.$$



Rys. 3.4

Rysunek 3.4 ilustruje otrzymany wynik: ewolutą asteroidy jest również asteroida.

ZADANIE 3.53. Znaleźć równanie ewoluty linii

$$x = r(\cos t + t\sin t), \quad y = r(\sin t - t\cos t), \quad r>0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Obliczamy kolejno

$$x' = rt\cos t, \quad y' = rt\sin t,$$

$$x'' = r(\cos t - t\sin t), \quad y'' = r(\sin t + t\cos t),$$

$$x'^2 + y'^2 = r^2t^2, \quad x'y'' - x''y' = r^2t^2.$$

Po podstawieniu do wzorów (3.3.2) otrzymujemy

$$\xi = r\cos t, \quad \eta = r\sin t. \tag{2}$$

Rugując parametr t z równań (2) otrzymujemy równanie ewoluty

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2. \tag{3}$$

Ewolutą danej linii jest okrąg; a więc dana linia jest ewolwentą okręgu.

ZADANIE 3.54. Znaleźć równanie ewoluty spiralnej logarytmicznej

$$r = ae^{\theta}, \quad a > 0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Przechodzimy do układu współrzędnych prostokątnych; mamy

$$x = ae^{\theta}\cos\theta, \quad y = ae^{\theta}\sin\theta. \tag{2}$$

Obliczamy kolejno

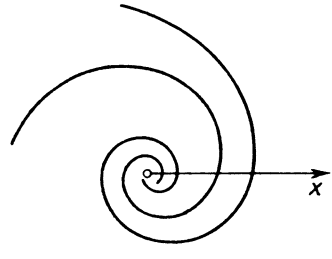
$$x' = ae^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta), \quad y' = ae^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta),$$

$$x'' = -2ae^{\theta}\sin\theta, \quad y'' = 2ae^{\theta}\cos\theta,$$

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2e^{2\theta}, \quad x'y'' - x''y' = 2a^2e^{2\theta}.$$

Na podstawie wzorów (3.3.2) stwierdzamy, że ewolutą spiralnej logarytmicznej (2) (lub (1)) jest krzywa o równaniach

$$\xi = -ae^{\theta}\sin\theta, \quad \eta = ae^{\theta}\cos\theta. \tag{3}$$



Rys. 3.5

Obróćmy prostokątny układ współrzędnych o kąt $\frac{1}{2}\pi$ według wzorów $X = \eta$, $Y = -\eta$. Otrzymamy równania ewoluty w postaci

$$X = ae^{\theta}\cos\theta, \quad Y = ae^{\theta}\sin\theta. \tag{4}$$

Widzimy, że ewolutą danej spiralnej logarytmicznej jest taka sama spiralna logarytmiczna, ale obrócona o kąt $-\frac{1}{2}\pi$ (rys. 3.5).

Zadania

3.55. Znaleźć równanie koła krzywiznowego paraboli $y^2=12x$ w punkcie $P(3,-6)$ tej linii.

3.56. Znaleźć równania kół krzywiznowych krzywych $y=\cos x$ i $y=\dfrac{1}{\cos x}$ w punkcie $x=0$.

3.57. Znaleźć równanie koła krzywiznowego kardioidy $x=a\cos\theta(1+\cos\theta)$, $y=a\sin\theta(1+\cos\theta)$, $a>0$, w punkcie $\theta=\frac{1}{2}\pi$.

Znaleźć równania ewolut następujących linii (zad. 3.58 - 3.67):

3.58. Paraboli $y^2=2px$, $p>0$.

3.59. Elipsy $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$.

3.60. Hiperboli $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$, $b>0$.

3.61. Hiperboli $xy=a^2$, $a>0$.

3.62. $x=3t^2$, $y=3t-t^3$.

3.63. Linii łańcuchowej $y=a\cosh(x/a)$.

3.64. $y=a\ln\cos(x/a)$.

3.65. Cykloidy $x=r(t-\sin t)$, $y=r(1-\cos t)$, $r>0$.

3.66. Traktrysy $x=a(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}t)$, $y=a\sin t$, $a>0$.

3.67. Hipocykloidy $x=a(2\cos t+\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

§ 3.4. PŁASZCZYZNA STYCZNA DO POWIERZCHNI

Niech funkcja $F(x, y, z)$ trzech zmiennych x, y, z będzie klasy C^1 w obszarze przestrzennym W. Rozpatrzmy równanie

$$F(x, y, z)=0. \tag{3.4.1}$$

Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ jest klasy C^1 w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ oraz nie wszystkie jej pochodne cząstkowe są równe zeru w punkcie P_0, tzn.

$$F'^2_x(x_0, y_0, z_0)+F'^2_y(x_0, y_0, z_0)+F'^2_z(x_0, y_0, z_0)>0,$$

to wówczas w punkcie P_0 istnieje *płaszczyzna styczna do powierzchni* $F(x, y, z)=0$ i jej równanie jest następujące:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0, \tag{3.4.2}$$

gdzie (x, y, z) jest dowolnym punktem płaszczyzny stycznej, a (x_0, y_0, z_0) punktem styczności.

W szczególności jeżeli równanie powierzchni jest dane za pomocą funkcji jawnej

$$z=f(x, y), \tag{3.4.3}$$

gdzie f jest klasy C^1, to wówczas *równanie płaszczyzny stycznej* do powierzchni (3.4.3) jest następujące:

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0). \tag{3.4.4}$$

ZADANIE 3.68. Znaleźć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$2^{x/z}+2^{y/z}-8=0 \tag{1}$$

w punkcie $A(2, 2, 1)$.

Rozwiązanie. Sprawdzamy, że współrzędne punktu A spełniają równanie (1); mamy $2^2+2^2-8=0$.

Oznaczmy lewą stronę równania (1) przez $F(x, y, z)$. Obliczamy pochodne cząstkowe

$$\begin{gathered} F'_x(x, y, z)=\frac{1}{z}2^{x/2}\ln 2, \quad F'_y(x, y, z)=\frac{1}{z}2^{y/z}\ln 2, \\ F'_z(x, y, z)=-\frac{1}{z^2}\ln 2\,(x\cdot 2^{x/z}+y\cdot 2^{y/z}). \end{gathered} \tag{2}$$

Obliczamy wartości wyznaczonych pochodnych w punkcie $A(2, 2, 1)$. Mamy następujące równości:

$$F'_x(2, 2, 1)=4\ln 2, \quad F'_y(2, 2, 1)=4\ln 2, \quad F'_z(2, 2, 1)=-16\ln 2. \tag{3}$$

Obliczone wartości (3) podstawiamy do wzoru (3.4.2). Otrzymujemy następujące równanie:

$$4\ln 2(x-2)+4\ln 2(y-2)-16\ln 2(z-1)=0, \tag{4}$$

skąd

$$x+y-4z=0. \tag{5}$$

Równanie (5) jest szukanym równaniem płaszczyzny stycznej poprowadzonej w punkcie $A(2, 2, 1)$ do powierzchni danej równaniem (1).

ZADANIE 3.69. Znaleźć płaszczyznę styczną do powierzchni

$$z=x^2+y^2, \tag{1}$$

w punkcie $A(1, 2, 5)$.

Rozwiązanie. Sprawdzamy, że punkt A leży na powierzchni (1); mamy $5=1+4$. Obliczamy pochodne cząstkowe $z'_x=2x$, $z'_y=2y$. Wartości pochodnych cząstkowych z'_x, z'_y w punkcie $A(1, 2, 5)$ są $z'_x=2$, $z'_y=4$. Podstawiamy wyznaczone wartości do równania (3.4.4); mamy

$$z-5=2(x-1)+4(y-2), \quad \text{skąd} \quad 2x+4y-z-5=0.$$

ZADANIE 3.70. Znaleźć płaszczyznę styczną do powierzchni o równaniu

$$x^2+y^2-z^2=0 \tag{1}$$

w punkcie $A(0, 0, 0)$.

Rozwiązanie. Sprawdzamy, że współrzędne punktu A spełniają równanie (1). Oznaczmy lewą stronę równości (1) przez $F(x, y, z)$. Obliczamy pochodne cząstkowe $F'_x(x, y, z)=2x$, $F'_y(x, y, z)=2y$, $F'_z(x, y, z)=-2z$. W punkcie $A(0, 0, 0)$ pochodne F'_x, F'_y, F'_z są jednocześnie równe zeru, zatem w tym punkcie równanie płaszczyzny stycznej traci sens.

Zauważmy, że równanie (1) określa powierzchnię stożkową, a punkt $A(0, 0, 0)$ jest ostrzem tej powierzchni, zatem istotnie płaszczyzna styczna w tym punkcie nie istnieje. W naszym przypadku nie są również spełnione założenia twierdzenia (2.3.2) o istnieniu funkcji uwikłanej, ponieważ $F'_x(0, 0, 0)=F'_y(0, 0\ 0)=F'_z(0, 0, 0)=0$.

Zadania

Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do następujących powierzchni w danych punktach (zad. 3.71 - 3.74):

3.71. $x^3+y^3+z^3-36=0$, $A(2, 1, 3)$.

3.72. $(x^2+y^2+z^2)^2-x^2+y^2-z^2-8=0$, $A(1, 1, 1)$.

3.73. $z=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}-7$, $A(2, 4, -3)$. **3.74.** $y+\ln\frac{x}{z}-z=0$, $A(1, 1, 1)$.

3.75. Wykazać, że powierzchnie dane równaniami $x+2y-\ln z+4=0$, $x^2-xy-8x+$ $+z+5=0$ w punkcie $A(2, -3, 1)$ mają wspólną płaszczyznę styczną, tzn. że są styczne.

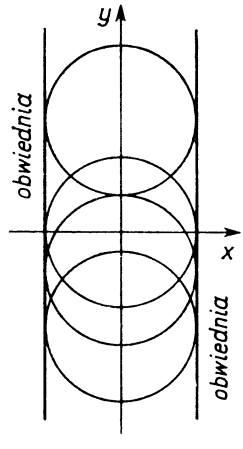
§ 3.5. OBWIEDNIA RODZINY LINII

Rozważmy jednoparametrową rodzinę linii o równaniu

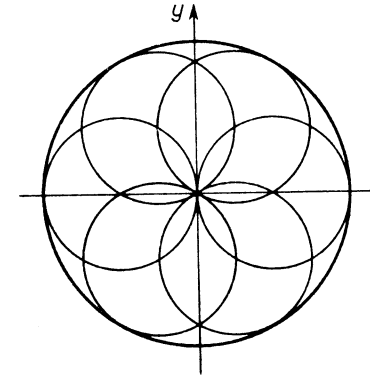
(3.5.1) $$F(x, y, C)=0,$$

w którym C jest parametrem rodziny.

Obwiednią rodziny linii nazywamy linię styczną do każdej linii tej rodziny, przy czym każdy punkt obwiedni jest jej punktem styczności z pewną linią danej rodziny; w przypadku gdyby część (łuk) obwiedni pokrywała się z łukiem pewnej linii danej rodziny, łuku tego nie będziemy traktować jako należącego do obwiedni.



Rys. 3.6



Rys. 3.7

Tak np. dla rodziny okręgów o środkach leżących na osi Oy o promieniach równych R, tzn. danych równaniem

$$x^2+(y-C)^2=R^2,$$

obwiednia składa się z dwóch prostych o równaniach $x=-R$, $x=R$ (rys. 3.6).

Obwiednią rodziny okręgów o stałym promieniu R przechodzących przez stały punkt np. O jest okrąg o środku w O i promieniu równym $2R$ (rys. 3.7).

Dowodzi się, że równanie obwiedni jednoparametrowej rodziny otrzymuje się przez wyrugowanie parametru C z układu dwóch równań

$$\begin{cases} F(x, y, C)=0, \\ F'_C(x, y, C)=0. \end{cases} \tag{3.5.2}$$

Okazuje się jednak, że nie wszystkie punkty (x, y) spełniające układ równań (3.5.2) zaliczyć należy – zgodnie z przyjętą definicją – do obwiedni; takimi punktami mogą np. być punkty osobliwe, tzn. punkty dla których jednocześnie $F'_x(x, y, C)=0$, $F'_y(x, y, C)=0$.

ZADANIE 3.76. Znaleźć równanie obwiedni rodziny linii

$$F(x, y, C)=x+Cy+C^2=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Zgodnie ze wzorem (3.5.2) różniczkujemy równanie (1) względem C i otrzymujemy

$$y+2C=0. \tag{2}$$

Rugując parametr C z równań (1), (2) dostajemy równanie obwiedni rodziny linii prostych (1)

$$y^2-4x=0.$$

Jest to parabola.

Zadania

Znaleźć równanie obwiedni rodziny krzywych:

3.77. $y=ax^2-a^2$. **3.78.** $(x-a)^2+(y-a)^2=1$.

3.79. $x^2+ay^2=a^3$. **3.80.** $y=mx+m^2$.

3.81. $\frac{x}{3-a}+\frac{y}{a}=1$. **3.82.** $y=a^2x^2-a^4$. **3.83.** $y=ax^3-a^4$.

3.84. $x^2+y^2-2ay+a^2=1$. **3.85.** $cx^2-c^2y^2=1$.

3.86. $y=\ln Cx-c^2$.

W zadaniach 3.78, 3.80 - 3.82, 3.84 naszkicować rodzinę linii i obwiednię.

§ 3.6. LINIE W PRZESTRZENI

Niech w przestrzeni trójwymiarowej dana będzie linia L układem równań

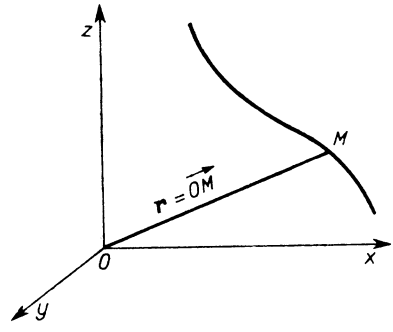
$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{3.6.1}$$

przy czym o funkcjach $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, zakładamy, że są klasy C^1 oraz że dla każdego t mamy $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2>0$.

Równania (3.6.1) linii w przestrzeni można również zapisać za pomocą jednego równania wektorowego postaci

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},$$

w którym $\boldsymbol{r}$ jest promieniem wodzącym punktu linii (rys. 3.8).



Rys. 3.8

Definicja *stycznej do linii przestrzennej* (3.6.1) jest analogiczna do definicji stycznej do linii płaskiej (por. § 3.1). Równania kierunkowe stycznej do linii (3.6.1) w punkcie $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ są

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}, \tag{3.6.2}$$

przy dodatkowej umowie, że jeśli jeden albo dwa mianowniki są równe zeru, to należy przyjąć, że odpowiednie liczniki także są równe zeru.

Płaszczyzną normalną do linii w punkcie M_0 nazywamy płaszczyznę przechodzącą przez ten punkt i prostopadłą do stycznej w tym punkcie; jej równanie jest następujące:

$$x'(t_0)[x-x(t_0)]+y'(t_0)[y-y(t_0)]+z'(t_0)[z-z(t_0)]=0. \tag{3.6.3}$$

Każdą prostą przechodzącą przez punkt M_0 i leżącą w płaszczyźnie normalnej do linii L w punkcie M_0 nazywamy *normalną* do L w punkcie M_0.

ZADANIE 3.87. Napisać równanie stycznej oraz płaszczyzny normalnej do linii L: $x=t^2$, $y=5t$, $z=t^3$ w punkcie odpowiadającym wartości parametru $t=2$.

Rozwiązanie. Współrzędnymi punktu styczności są (4, 10, 8); obliczamy pochodne funkcji określających linię L

$$x'(t)=2t, \quad y'(t)=5, \quad z'(t)=3t^2.$$

Stosujemy wzór (3.6.2), podstawiając $t_0=2$ i otrzymujemy równania kierunkowe stycznej

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y-10}{5}=\frac{z-8}{12}.$$

Następnie stosując wzór (3.6.3), otrzymujemy równanie płaszczyzny normalnej

$$4(x-4)+5(y-10)+12(z-8)=0,$$

a po uproszczeniach

$$4x+5y+12z-162=0.$$

Zadania

Napisać równania stycznych do następujących krzywych w podanych punktach:

3.88. $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t^2$ przy $t=1$.

3.89. $x=\dfrac{1}{\cos t}$, $y=\operatorname{tg} t$, $z=at$ przy $t=\frac{1}{4}\pi$.

3.90. $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ przy $t=0$.

3.91. $x=r(t-\sin t)$, $y=r(1-\cos t)$, $z=4r\sin\frac{1}{2}t$ przy $t=\frac{1}{2}\pi$.

3.92. Napisać równanie płaszczyzny normalnej do linii śrubowej

$$x=2\cos t, \quad y=2\sin t, \quad z=4t \quad \text{w punkcie } t=0.$$

3.93. Napisać równanie płaszczyzny normalnej do następującej linii

$$x=t, \quad y=t^2, \quad z=t^3 \quad \text{przy} \quad t=1.$$

3.94. Napisać równania prostej stycznej i płaszczyzny normalnej do linii $x^2=8z$, $y^2=2z$ w punkcie $(4, -2, ?)$.

3.95. Wykazać, że wszystkie płaszczyzny normalne do linii

$$x=2r\sin^2 t, \quad y=r\sin 2t, \quad z=2r\cos t$$

przechodzą przez początek układu.

* * *

Płaszczyzną styczną do linii w danym punkcie nazywamy każdą z płaszczyzn przesuniętych przez styczną do linii w tym punkcie; jej równanie jest więc następujące:

$$A[x-x(t_0)]+B[y-y(t_0)]+C[z-z(t_0)]=0, \tag{3.6.4}$$

przy założeniu, że wektory $[A, B, C]$ i $[x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)]$ są prostopadłe, tzn. stałe A, B, C spełniają następujące związki:

$$A^2+B^2+C^2>0, \tag{3.6.5}$$

$$Ax'(t_0)+By'(t_0)+Cz'(t_0)=0.$$

Spośród płaszczyzn stycznych do linii o równaniach (3.6.1) wyróżnimy dwie. Omówimy je kolejno.

Płaszczyzną ściśle styczną do linii L w punkcie $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ nazywamy płaszczyznę graniczną, do której dąży płaszczyzna styczna do tej linii w punkcie M_0 i przechodzącą przez punkt sąsiedni $M(x(t), y(t), z(t))$ linii, gdy punkt M dąży po linii L do M_0.

Przy założeniach, że funkcje występujące w równaniu (3.6.1) są klasy C^2 oraz że w pewnym otoczeniu punktu t_0 zachodzi $[x''(t)]^2+[y''(t)]^2+[z''(t)]^2>0$, płaszczyzna ściśle

styczna istnieje i ma równanie

$$\begin{vmatrix} x-x(t_0) & y-y(t_0) & z-z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.6.6}$$

Jeżeli linia L jest prostą, to płaszczyzną styczną jest dowolna płaszczyzna przechodząca przez prostą L, więc płaszczyzna ściśle styczna jest nieokreślona. Jeśli linia L leży w płaszczyźnie P, spełnia podane warunki i nie jest prostą, to jej płaszczyzną ściśle styczną jest płaszczyzna P.

ZADANIE 3.96. Napisać równanie płaszczyzny ściśle stycznej do linii

$$x=t^2, \quad y=5t, \quad z=t^3$$

w punkcie odpowiadającym wartości parametru $t=2$.

Rozwiązanie. Współrzędnymi punktu styczności są (4, 10, 8). Obliczamy pochodne

$$x'=2t, \quad y'=5, \quad z'=3t^2,$$

$$x''=2, \quad y''=0, \quad z''=6t.$$

Podstawiamy $t=2$ i stosujemy równanie (3.6.6)

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-10 & z-8 \\ 4 & 5 & 12 \\ 2 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Po rozwinięciu wyznacznika (najwygodniej według elementów drugiej kolumny, por. cz. I, § 9.1) otrzymujemy równanie szukanej płaszczyzny ściśle stycznej

$$30x-12y-5z+40=0.$$

Zadania

3.97. Napisać równanie płaszczyzny ściśle stycznej do linii

$$x=\cos^3 t, \quad y=\sin^3 t, \quad z=\cos 2t$$

w dowolnym jej punkcie.

Napisać równanie płaszczyzny ściśle stycznej do następujących linii w podanych punktach:

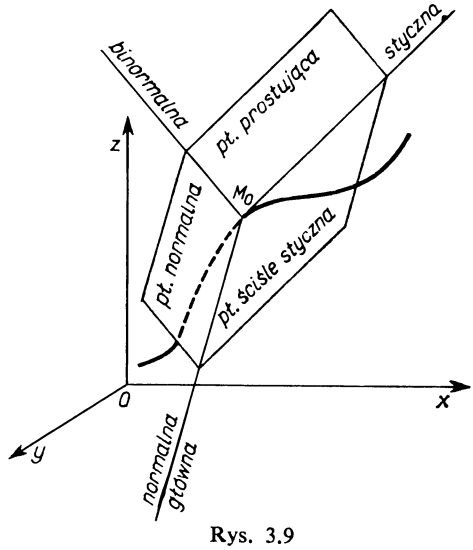
3.98. $x=t\cos t$, $y=-t\sin t$, $z=kt$ w początku układu.

3.99. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $z=e^t$ przy $t=0$.

3.100. Wykazać, że jeśli wszystkie płaszczyzny ściśle styczne pewnej linii przechodzą przez stały punkt, to linia ta jest płaska.

3.101. Wykazać, że linia $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=2t$ leży na powierzchni $x^2+y^2-e^z=0$ oraz że płaszczyzna ściśle styczna do niej jest płaszczyzną styczną do danej powierzchni.

Normalną główną do linii L (3.6.1) w danym punkcie nazywamy krawędź przecięcia płaszczyzny normalnej (3.6.3) i płaszczyzny ściśle stycznej do tej linii w danym punkcie (3.6.6); normalna główna jest więc normalną do linii w danym punkcie położoną w płaszczyźnie ściśle stycznej (rys. 3.9).



Rys. 3.9

Binormalną (*dwunormalną*) do linii L (3.6.1) w punkcie M_0 nazywamy tę prostą normalną do L w punkcie M_0, która jest prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej (rys. 3.9) do L w punkcie M_0.

ZADANIE 3.102. Napisać równanie binormalnej do linii $x=t^2$, $y=5t$, $z=t^3$ w punkcie odpowiadającym wartości parametru $t=2$.

Rozwiązanie. W zad. 3.96 znaleziono równanie płaszczyzny ściśle stycznej do rozważanej linii w punkcie dla $t=2$:

$$30x-12y-5z+40=0. \tag{1}$$

Ponieważ binormalna jest prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej (1) i przechodzi przez punkt (4, 10, 8), więc jej równaniami kierunkowymi są

$$\frac{x-4}{30}=\frac{y-10}{-12}=\frac{z-8}{-5}.$$

Zadania

Napisać równania normalnej głównej i binormalnej następujących linii w podanych punktach:

3.103. $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ przy $t=1$.

3.104. $x=t$, $y=t^2$, $z=e^t$ przy $t=0$.

3.105. $x=y^2$, $z=x^2$ w punkcie (?, 1, ?).

Drugą z wyróżnionych płaszczyzn stycznych do linii (3.6.1) w danym punkcie jest płaszczyzna prostująca.

Płaszczyzną prostującą (*rektyfikacyjną*) do linii L (3.6.1) w punkcie M_0 nazywamy płaszczyznę przesuniętą przez styczną i binormalną do tej linii w tym punkcie; płaszczyzna prostująca jest więc prostopadła do normalnej głównej w punkcie styczności (rys. 3.9).

ZADANIE 3.106. Znaleźć równania normalnej głównej i równanie płaszczyzny prostującej do linii $x=t^2$, $y=5t$, $z=t^3$ w punkcie odpowiadającym wartości parametru $t=2$.

Rozwiązanie. Ponieważ normalna główna jest krawędzią przecięcia płaszczyzny normalnej (3.6.3) i płaszczyzny ściśle stycznej do tej linii w danym punkcie, skorzystamy więc z zad. 3.87, w którym znaleziono równanie płaszczyzny normalnej do danej linii w punkcie (4, 10, 8):

$$4x+5y+12z-162=0$$

oraz skorzystamy z równania płaszczyzny ściśle stycznej do tej samej linii w tymże punkcie (zad. 3.96):

$$30x-12y-5z+40=0.$$

Wobec tego normalna główna określona jest układem równań

$$\begin{aligned} 4x+\ 5y+12z-162&=0,\\ 30x-12y-\ 5z+\ 40&=0, \end{aligned} \tag{1}$$

z których obliczamy jej współczynniki kierunkowe a, b, c:

$$a=\begin{vmatrix} 5 & 12\\ -12 & -5\end{vmatrix}=119,\quad b=\begin{vmatrix} 12 & 4\\ -5 & 30\end{vmatrix}=380,\quad c=\begin{vmatrix} 4 & 5\\ 30 & -12\end{vmatrix}=-198. \tag{2}$$

Możemy więc teraz zapisać równania normalnej głównej (1) w postaci kierunkowej:

$$\frac{x-4}{119}=\frac{y-10}{380}=\frac{z-8}{-198}. \tag{3}$$

Ponieważ szukana płaszczyzna prostująca jest prostopadła do normalnej głównej (3) o współczynnikach kierunkowych (2) i przechodzi przez punkt (4, 10, 8), więc jej równaniem jest

$$119(x-4)+380(y-10)-198(z-8)=0.$$

We wszystkich punktach krzywej, w których istnieją rozważane trzy płaszczyzny wzajemnie do siebie prostopadłe: płaszczyzna ściśle styczna, płaszczyzna normalna i płaszczyzna prostująca (do tego wystarczy, aby iloczyn wektorowy $\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)$ nie był wektorem zerowym) tworzą one trójścian zwany *trójścianem Freneta* (rys. 3.9).

Zadania

3.107. Napisać równania stycznej, binormalnej, normalnej głównej oraz równania płaszczyzn normalnej, ściśle stycznej i prostującej dla linii śrubowej $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$.

3.108. Napisać równania krawędzi i płaszczyzn trójścianu Freneta dla krzywej $\boldsymbol{r}(t)=t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j}+t^4\boldsymbol{k}$ w punkcie odpowiadającym wartości parametru $t=1$.

§ 3.7. KRZYWIZNA I SKRĘCENIE KRZYWEJ PRZESTRZENNEJ

Osią krzywizny linii przestrzennej L w (danym) punkcie M nazywamy graniczną prostą, do której dąży krawędź przecięcia płaszczyzny normalnej do linii w punkcie M z płaszczyzną normalną w punkcie pobliskim M', gdy ten punkt dąży po linii L do danego punktu M.

Środkiem krzywizny linii przestrzennej w (danym) punkcie M nazywamy punkt, w którym oś krzywizny przebija płaszczyznę ściśle styczną do L w punkcie M (danej linii).

Promieniem krzywizny linii przestrzennej L w danym punkcie M nazywamy odległość tego punktu od środka krzywizny linii L w tymże punkcie M.

Długość promienia krzywizny linii

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

określonej funkcjami klasy C^2, dla której wyznaczniki drugiego stopnia macierzy

$$\begin{bmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix} \tag{3.7.1}$$

nie wszystkie jednocześnie się zerują, oblicza się według wzoru

$$R=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{3.7.2}$$

w którym A, B, C są następującymi podwyznacznikami macierzy (3.7.1)

$$A=\begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}. \tag{3.7.3}$$

Krzywizną linii przestrzennej w danym punkcie nazywamy odwrotność promienia krzywizny w tym punkcie:

$$k=\frac{1}{R}. \tag{3.7.4}$$

Skręceniem (*torsją* lub *drugą krzywizną*) krzywej przestrzennej L nazywamy granicę, do której dąży stosunek kąta $\Delta\varphi$ pomiędzy binormalnymi w punktach M i M' krzywej L do długości łuku MM', gdy punkt M' dąży po krzywej do punktu M:

$$\tau=\lim_{M'\to M}\frac{\Delta\varphi}{|\overset{\frown}{MM'}|}.$$

Można wykazać, że skręcenie krzywej przestrzennej określonej funkcjami klasy C^3 w punkcie $M(x(t), y(t), z(t))$ oblicza się według wzoru

$$\tau=\frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \\ x'''(t) & y'''(t) & z'''(t) \end{vmatrix}}{A^2+B^2+C^2}, \tag{3.7.5}$$

w którym A, B, C określone są wzorami (3.7.3).

Zauważmy, że skręcenie może być dowolną liczbą rzeczywistą.

ZADANIE 3.109. Obliczyć krzywiznę i skręcenie linii śrubowej $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ w dowolnym jej punkcie $(a>0,\ b>0)$.

Rozwiązanie. Do obliczenia krzywizny wystarczy obliczyć pierwsze i drugie pochodne:

$$x'=-a\sin t, \qquad y'=a\cos t, \qquad z'=b,$$

$$x''=-a\cos t, \qquad y''=-a\sin t, \qquad z''=0.$$

Stąd

$$x'^2+y'^2+z'^2=a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2=a^2+b^2.$$

Następnie zgodnie ze wzorem (3.7.2) obliczamy A, B, C określone wzorami (3.7.3):

$$A=\begin{vmatrix} a\cos t & b \\ -a\sin t & 0 \end{vmatrix}=ab\sin t, \qquad B=\begin{vmatrix} b & -a\sin t \\ 0 & -a\cos t \end{vmatrix}=-ab\cos t,$$

$$C=\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t \\ -a\cos t & -a\sin t \end{vmatrix}=a^2.$$

A więc

$$A^2+B^2+C^2=a^2b^2\sin^2 t+a^2b^2\cos^2 t+a^4=a^2(b^2+a^2). \tag{1}$$

Krzywizna linii śrubowej w dowolnym jej punkcie wyraża się wzorem

$$k=\frac{\sqrt{a^2(a^2+b^2)}}{(a^2+b^2)^{3/2}}=\frac{a}{a^2+b^2}. \tag{2}$$

Do obliczenia skręcenia należy jeszcze obliczyć trzecie pochodne

$$x'''=a\sin t, \qquad y'''=-a\cos t, \qquad z'''=0.$$

Następnie obliczamy wartość wyznacznika występującego w liczniku wzoru (3.7.5):

$$\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}=b(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)=a^2b.$$

Mianownik wzoru na skręcenie został obliczony w (1). Tak więc skręcenie linii śrubowej w dowolnym jej punkcie jest równe

$$\tau=\frac{a^2b}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{b}{a^2+b^2}. \tag{3}$$

Ze wzoru (2) wnioskujemy, że krzywizna linii śrubowej w dowolnym jej punkcie jest stała, a ze wzoru (3) — że skręcenie linii śrubowej w dowolnym jej punkcie jest stałe.

Zadania

Obliczyć krzywiznę i skręcenie następujących krzywych przestrzennych w dowolnych ich punktach:

3.110. $x=e^t$, $y=e^{-t}$, $z=t\sqrt{2}$.

3.111. $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $z=\cos 2t$.

3.112. $x=a\cosh t$, $y=a\sinh t$, $z=at$.

3.113. $x=2t$, $y=\ln t$, $z=t^2$.

3.114. Obliczyć krzywiznę tzw. *śrubowej stożkowej*

$$x=t\cos t, \quad y=t\sin t, \quad z=at$$

w początku układu.

3.115. Znaleźć punkty na linii $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $z=\cos 2t$, w których krzywizna osiąga najmniejsze wartości.

3.116. W jakich punktach promień krzywizny linii

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t), \quad z=4a\cos\tfrac{1}{2}t$$

osiąga minimum?

3.117. Wykazać, że linia określona równaniami

$$x=\frac{1+t}{1-t}, \quad y=\frac{1}{1-t^2}, \quad z=\frac{t}{1+t}$$

jest płaska i znaleźć równanie płaszczyzny, w której się zawiera.

Rozdział IV

CAŁKI PODWÓJNE

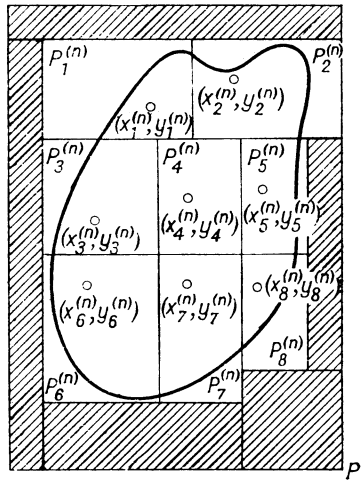
§ 4.1. CAŁKA PODWÓJNA, INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA

Niech D będzie obszarem regularnym lub domkniętym obszarem regularnym, a $f(x, y)$ funkcją ograniczoną w D. Niech P będzie prostokątem (o bokach równoległych do osi współrzędnych) zawierającym D. Oznaczmy przez π_n podział prostokąta P na $\bar{m}_n$ prostokątów częściowych (o bokach równoległych do osi współrzędnych), z których m_n: $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$, ..., $P_{m_n}^{(n)}$ zawierają punkty obszaru D (rys. 4.1; na tym rysunku $\bar{m}_n = 13$, $m_n = 8$). Zawsze oczywiście jest $m_n \leqslant \bar{m}_n$. Niech $\sigma_i^{(n)}$ oznacza pole prostokąta $P_i^{(n)}$; $A_i^{(n)}(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})$ dowolny punkt obszaru D należący do prostokąta $P_i^{(n)}$; δ_n najdłuższy z boków prostokątów $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$, ..., $P_{m_n}^{(n)}$, a S_n sumę określoną wzorem

$$S_n = \sum_{i=1}^{m_n} f(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})\,\sigma_i^{(n)}. \tag{4.1.1}$$

Jeżeli dla każdego ciągu podziałów π_n takiego, że $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, ciąg (4.1.1) jest zbieżny do tej samej liczby bez względu na wybór punktów $A_i^{(n)}$, to mówimy, że funkcja $f(x, y)$ jest *całkowalna w obszarze D*, a wspólną granicę ciągów (4.1.1) nazywamy *całką podwójną funkcji* $f(x, y)$ w obszarze D i oznaczamy symbolem

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma \quad \text{lub} \quad \iint_D f(x, y)\,dx\,dy. \tag{4.1.2}$$



Rys. 4.1

Można wykazać, że *funkcja ciągła w obszarze D jest całkowalna w D*. Można nawet wykazać, że *funkcja $f(x, y)$ ciągła w D z wyjątkiem punktów leżących na skończonej ilości linii o równaniach $y = \varphi(x)$ lub $x = \psi(y)$ jest całkowalna w D.*

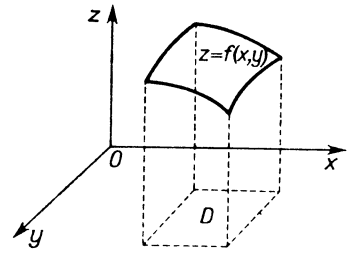
Uwaga. Jeżeli D jest obszarem regularnym, a $\bar{D}$ jego domknięciem (por. § 1.2), a $f(x, y)$ funkcją ograniczoną i całkowalną w $\bar{D}$, to

$$\iint_{\bar{D}} f(x, y)\,d\sigma = \iint_D f(x, y)\,d\sigma, \tag{4.1.3}$$

a więc krótko: *opuszczenie brzegu w obszarze całkowania nie zmienia wartości całki.*

Jeżeli $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą przyjmującą wartości nieujemne (tzn. $f(x, y) \geqslant 0$), to w interpretacji geometrycznej całka podwójna $\iint_D f(x, y)\,d\sigma$ jest objętością bryły ograniczo-

nej obszarem D leżącym w płaszczyźnie Oxy, powierzchnią $z=f(x,y)$ oraz powierzchniami walcowymi, jakie otrzymamy, jeżeli przez każdy punkt brzegu obszaru D poprowadzimy tworzącą równoległą do osi Oz (aż do przecięcia z powierzchnią $z=f(x,y)$). Gdy obszar D jest jednospójny, mamy jedną powierzchnię walcową (rys. 4.2).



Rys. 4.2

W szczególności, jeżeli $f(x,y)\equiv 1$, to otrzymujemy

$$|D|=\iint_D dxdy, \tag{4.1.4}$$

gdzie $|D|$ oznacza pole obszaru D.

§ 4.2. WŁASNOŚCI CAŁEK PODWÓJNYCH

Zakładamy, że zbiory występujące we wzorach są obszarami regularnymi (domkniętymi lub nie), a funkcje określone w nich ograniczone i ciągłe. Wówczas

$$\iint_D Kf(x,y)\,d\sigma=K\iint_D f(x,y)\,d\sigma, \quad \text{gdzie} \quad K \text{ — stała}, \tag{4.2.1}$$

$$\iint_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,d\sigma=\iint_D f(x,y)\,d\sigma+\iint_D g(x,y)\,d\sigma. \tag{4.2.2}$$

Jeżeli obszary D_1 i D_2 nie mają punktów wewnętrznych wspólnych, to

$$\iint_{D_1+D_2} f(x,y)\,d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\,d\sigma. \tag{4.2.3}$$

Jeżeli m oznacza kres dolny funkcji $f(x,y)$ w obszarze D, M oznacza kres górny $f(x,y)$ w obszarze D, a $|D|$ jest to pole obszaru D, to

$$m|D|\leqslant\iint_D f(x,y)\,d\sigma\leqslant M|D|. \tag{4.2.4}$$

Jeżeli $f(x,y)\leqslant g(x,y)$ w obszarze D, to

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma\leqslant\iint_D g(x,y)\,d\sigma. \tag{4.2.5}$$

Jeżeli $f(x,y)>0$, a obszar D_1 jest zawarty w obszarze D_2, to

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma\leqslant\iint_{D_2} f(x,y)\,d\sigma. \tag{4.2.6}$$

§ 4.3. ZAMIANA CAŁKI PODWÓJNEJ NA ITEROWANĄ

Będziemy stale zakładali, że występujące funkcje są ograniczone i ciągłe w rozpatrywanych obszarach. Wówczas:

Jeżeli obszar D jest obszarem normalnym względem osi Ox (por. § 1.5) danym nierównościami $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, to

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b \Big(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \Big)\,dx. \tag{4.3.1}$$

Jeżeli obszar D jest obszarem normalnym względem osi Oy danym nierównościami $\alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, to

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d \Big(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx \Big)\,dy. \tag{4.3.2}$$

Całki określone wzorami (4.3.1) i (4.3.2) nazywamy *całkami iterowanymi.*

Z własności tych bezpośrednio wynika:

Jeżeli D jest prostokątem danym nierównościami $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, to

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy \Big]\,dx = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\,dx \Big]\,dy, \tag{4.3.3}$$

a jeżeli ponadto funkcja $f(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y)$, to całka podwójna równa się iloczynowi całek pojedynczych:

$$\iint_D \varphi(x)\psi(y)\,d\sigma = \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_c^d \psi(y)\,dy. \tag{4.3.4}$$

§ 4.4. ZAMIANA ZMIENNYCH W CAŁCE PODWÓJNEJ

Niech przekształcenie (patrz § 1.5):

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \psi(u,v) \tag{4.4.1}$$

odwzorowuje obszar regularny domknięty Δ (w płaszczyźnie zmiennych u i v) na obszar regularny domknięty D (w płaszczyźnie zmiennych x i y);

Jeżeli w przekształceniu (4.4.1):

1° *funkcje φ i ψ są ciągłe wraz z pierwszymi pochodnymi w obszarze Δ;*

2° *funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w obszarze D;*

3° *odwzorowanie wnętrza obszaru Δ w obszar D jest wzajemnie jednoznaczne;*

4° *wewnątrz obszaru D jakobian*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

to ma miejsce wzór

$$(4.4.2)\qquad \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\right| du dv.$$

W szczególności przy wprowadzeniu *współrzędnych biegunowych* (por. § 2.5):

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi$$

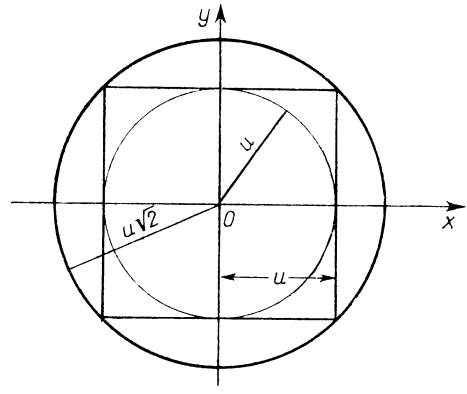
mamy

$$(4.4.3)\qquad \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta (f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi))\,\rho\,d\rho d\varphi;$$

jest to *wzór na zamianę współrzędnych prostokątnych na współrzędne biegunowe w całce podwójnej.*

§ 4.5. CAŁKA NIEWŁAŚCIWA $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

Całki tej nie da się obliczyć w ten sposób, w jaki obliczaliśmy całki niewłaściwe w części I, § 21.2, ponieważ funkcji $F(x)=\int e^{-x^2}\,dx$ nie da się wyrazić przez znane nam funkcje elementarne. Całka ta natomiast daje się łatwo obliczyć przez zastosowanie właściwości całek podwójnych.



Rys. 4.3

Niech k_1 oznacza koło o środku w początku układu i promieniu u, niech k_2 oznacza koło o środku w początku układu i promieniu $u\sqrt{2}$ oraz niech k oznacza kwadrat o środku w początku układu i bokach równoległych do osi współrzędnych, równych $2u$ (rys. 4.3). W takim razie biorąc pod uwagę, że $e^{-(x^2+y^2)}>0$, na podstawie własności całek podwójnych, otrzymujemy

$$\iint_{k_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leqslant \iint_{k} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leqslant \iint_{k_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

W całkach skrajnych wprowadzamy współrzędne biegunowe $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, a całkę środkową zmieniamy na iloczyn całek pojedynczych (por. § 4.3). Wówczas otrzy-

mujemy

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant u\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho d\varphi \leqslant \int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx \int_{-u}^{u} e^{-y^2}\,dy \leqslant \iint\limits_{\substack{0\leqslant\rho\leqslant u\sqrt{2}\\ 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi}} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho d\varphi .$$

Całki skrajne zamieniamy na iloczyn całek pojedynczych, a wyrażenie środkowe upraszczamy biorąc pod uwagę, że $\int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx = \int_{-u}^{u} e^{-y^2}\,dy$; mamy

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{u} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho \leqslant \Big(\int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx\Big)^2 \leqslant \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{u\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho\,d\rho .$$

Wobec tego, że $\int e^{-\rho^2}\rho\,d\rho = -\frac{1}{2}e^{-\rho^2}$ oraz że $\int_{-u}^{u} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{u} e^{-x^2}\,dx$ (ponieważ e^{-x^2} jest funkcją parzystą), otrzymujemy

$$\pi(1-e^{-u^2}) \leqslant 4\Big(\int_0^{u} e^{-x^2}\,dx\Big)^2 \leqslant \pi(1-e^{-2u^2}),$$

czyli

$$\tfrac{1}{4}\pi(1-e^{-u^2}) \leqslant \Big(\int_0^{u} e^{-x^2}\,dx\Big)^2 \leqslant \tfrac{1}{4}\pi(1-e^{-2u^2}).$$

Ponieważ mamy do czynienia z wyrażeniami dodatnimi, możemy nierówność stronami pierwiastkować, zatem

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{1-e^{-u^2}} \leqslant \int_0^{u} e^{-x^2}\,dx \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{1-e^{-2u^2}}.$$

Przechodząc do granicy przy u dążącym do nieskończoności i stosując twierdzenie o trzech funkcjach otrzymujemy

$$\lim_{u\to\infty} \int_0^{u} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

ponieważ $\lim\limits_{u\to\infty}\sqrt{1-e^{-u^2}} = \lim\limits_{u\to\infty}\sqrt{1-e^{-2u^2}} = 1$. Ostatecznie mamy więc

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{4.5.1}$$

Całka ta nazywa się *całką Poissona, całką Laplace'a* lub *całką Gaussa.*

Wobec parzystości funkcji e^{-x^2} mamy także

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{4.5.2}$$

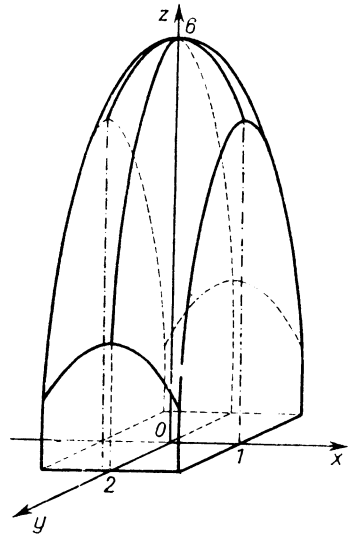
§ 4.6. OBLICZANIE CAŁKI PODWÓJNEJ. OBJĘTOŚĆ BRYŁY

ZADANIE 4.1. Prostopadłościan, którego dolną podstawą jest prostokąt D położony w płaszczyźnie Oxy i ograniczony prostymi $x=1$, $y=2$, $x=-1$ i $y=-2$, został ścięty od góry powierzchnią $z=6-x^2-y^2$. Obliczyć objętość powstałej bryły (rys. 4.4).

Rozwiązanie. Zauważmy, że w podanych warunkach funkcja z przybiera wartości tylko dodatnie. Wtedy poszukiwana objętość V, zgodnie z interpretacją całki podwójnej jako objętości, wynosi

$$V=\iint_D (6-x^2-y^2)\,dxdy.$$

Kolejność całkowania jest w tym zadaniu obojętna.



Rys. 4.4

Całkując najpierw względem x, a poten względem y, otrzymujemy

$$V=\int_{y=-2}^{y=2}\left(\int_{x=-1}^{x=1}(6-x^2-y^2)\,dx\right)dy=\int_{-2}^{2}\left[6x-\tfrac{1}{3}x^3-y^2x\right]_{x=-1}^{x=+1}dy=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[(6-\tfrac{1}{3}-y^2)-(-6+\tfrac{1}{3}+y^2)\right]dy=\int_{-2}^{2}(\tfrac{34}{3}-2y^2)\,dy=\left[\tfrac{34}{3}y-\tfrac{2}{3}y^3\right]_{-2}^{+2}=$$

$$=(\tfrac{68}{3}-\tfrac{16}{3})-(-\tfrac{68}{3}+\tfrac{16}{3})=\tfrac{104}{3}.$$

Ponieważ obszarem całkowania jest tutaj prostokąt o bokach równoległych do osi współrzędnych, więc zmieniając porządek całkowania (tzn. całkując najpierw względem y, a potem względem x) przestawimy jedynie granice całkowania.

Objętość V wyrazi się teraz tak

$$V=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2}^{2}(6-x^2-y^2)\,dy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left[6y-x^2y-\tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=-2}^{y=+2}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[(12-2x^2-\tfrac{8}{3})-(-12+2x^2+\tfrac{8}{3})\right]dx=\int_{-1}^{1}(\tfrac{56}{3}-4x^2)\,dx=\left[\tfrac{56}{3}x-\tfrac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{+1}=\tfrac{104}{3}.$$

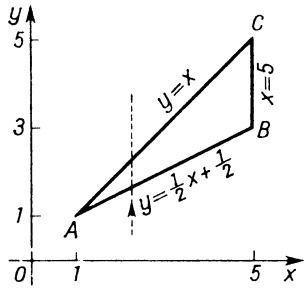
Wynik w obu przypadkach otrzymaliśmy oczywiście taki sam.

ZADANIE 4.2. Obliczyć całkę podwójną

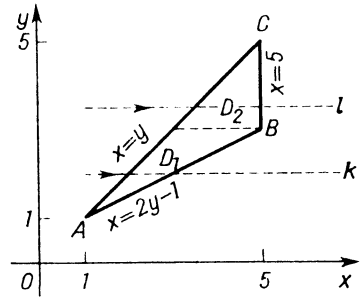
$$\iint_D (2x+y-1)\,d\sigma,$$

gdzie obszarem całkowania D jest obszar trójkąta o wierzchołkach $A(1, 1)$, $B(5, 3)$, $C(5, 5)$.

Rozwiązanie. Obszar całkowania jest trójkątem. Porządek całkowania względem zmiennej x i zmiennej y jest dowolny, musimy jednak pamiętać, że pierwsze całkowanie odbywa się w granicach zmiennych, a drugie całkowanie odbywa się w granicach stałych. Wyjaśnimy to szczegółowo, rozwiązując zadanie dwoma sposobami.



Rys. 4.5



Rys. 4.6

I sposób. Najpierw całkujemy względem zmiennej y, a następnie względem zmiennej x.

Chcąc znaleźć zmienne granice pierwszej całki musimy znaleźć równania linii ograniczających obszar D (rys. 4.5). Równanie prostej AB (jako prostej przechodzącej przez dwa dane punkty) jest $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. Prosta BC ma równanie $x=5$, a prosta CA ma równanie $y=x$.

Przy pierwszym całkowaniu względem zmiennej y prosta równoległa do osi Oy, przechodząca przez obszar całkowania w kierunku dodatnim osi Oy, przecina zawsze najpierw prostą $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, a potem prostą $y=x$. Granice zmienne całkowania przy pierwszym całkowaniu względem zmiennej y wyrażą się wzorami:

$$\text{granica dolna: } y=\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}, \quad \text{granica górna: } y=x.$$

Granice drugiego całkowania względem zmiennej x są stałe. Ustalamy je z łatwością, znajdując odcięte punktów: skrajnego lewego punktu obszaru D (jest nim punkt A o odciętej $x=1$) i skrajnego prawego punktu obszaru D (jest nim dowolny punkt odcinka BC o odciętej $x=5$). W ten sposób otrzymujemy

$$\iint_D (2x+y+1)\,d\sigma=\int_{x=1}^{x=5}\Big(\int_{y=\frac{1}{2}(x+1)}^{y=x}(2x+y+1)\,dy\Big)dx=\int_1^5 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{x}(2x+y+1)\,dy.$$

Obliczamy najpierw pierwszą całkę:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{x}(2x+y+1)\,dy&=\left[2xy+\tfrac{1}{2}y^2+y\right]_{y=\frac{1}{2}(x+1)}^{y=x}=\\&=2x^2+\tfrac{1}{2}x^2+x-2x\cdot\tfrac{1}{2}(x+1)-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}(x+1)\right)^2-\tfrac{1}{2}(x+1)=\\&=\tfrac{1}{8}(16x^2+4x^2+8x-8x^2-8x-x^2-2x-1-4x-4)=\tfrac{1}{8}(11x^2-6x-5).\end{aligned}$$

A więc mamy

$$\iint_D (2x+y+1)\,d\sigma = \tfrac{1}{8}\int_1^5 (11x^2-6x-5)\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{8}\left[\tfrac{11}{3}x^3-3x^2-5x\right]_1^5 = \tfrac{1}{8}\left[\tfrac{11\cdot 125}{3}-75-25-\tfrac{11}{3}+3+5\right] =$$

$$= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{11\cdot 124}{3}-92\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{11\cdot 31}{3}-23\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{272}{3} = \tfrac{136}{3}.$$

II sposób. Jeżeli będziemy całkowali najpierw względem zmiennej x, to zmienne granice otrzymamy przecinając obszar całkowania D prostymi równoległymi do osi Ox od lewej strony do prawej i zapisując w postaci $x=f(y)$ równania przeciętych linii ograniczających obszar D.

Każda z prostych równoległych do osi Ox, przechodząca przez obszar całkowania (trójkąt ABC), przecina bądź najpierw prostą $x=y$, potem prostą $x=2y-1$ (jak prosta k na rysunku 4.6), bądź najpierw prostą $x=y$, potem prostą $x=5$ (jak prosta l na tym samym rysunku). Wobec powyższego należy podzielić obszar całkowania na dwa obszary D_1 i D_2, jak na rysunku 4.6.

Granice całkowania względem zmiennej y dla obszaru D_1 otrzymujemy znajdując najmniejszą i największą rzędną punktów tego obszaru; będzie to rzędna punktu A, tzn. $y=1$, oraz rzędna np. punktu B, tzn. $y=3$. Podobnie granicami całkowania względem zmiennej y obszaru D_2 będą $y=3$ (rzędna np. punktu B) oraz $y=5$ (rzędna punktu C). W ten sposób całka wyrazi się w postaci sumy dwóch całek:

$$\iint_D (2x+y+1)\,d\sigma = \iint_{D_1} (2x+y+1)\,d\sigma + \iint_{D_2} (2x+y+1)\,d\sigma =$$

$$= \int_{y=1}^{y=3}\left(\int_{x=y}^{x=2y-1} (2x+y+1)\,dx\right)dy + \int_{y=3}^{y=5}\left(\int_{x=y}^{x=5} (2x+y+1)\,dx\right)dy.$$

Otrzymujemy kolejno:

$$\iint_D (2x+y+1)\,d\sigma =$$

$$= \int_1^3 \left[x^2+xy+x\right]_{x=y}^{x=2y-1}dx + \int_3^5 \left[x^2+xy+x\right]_{x=y}^{x=5}dx =$$

$$= \int_1^3 \left((2y-1)^2+y(2y-1)+(2y-1)-y^2-y^2-y\right)dy + \int_3^5 (25+5y+5-y^2-y^2-y)\,dy =$$

$$= \int_1^3 (4y^2-4y+1+2y^2-y+2y-1-2y^2-y)\,dy + \int_3^5 (-2y^2+4y+30)\,dy =$$

$$= \int_1^3 (4y^2-4y)\,dy + 2\int_3^5 (-y^2+2y+15)\,dy =$$

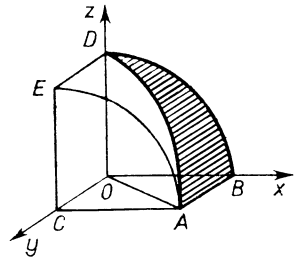
$$= 4\left[\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{2}y^2\right]_1^3 + 2\left[-\tfrac{1}{3}y^3+y^2+15y\right]_3^5 =$$

$$= 4\left(9-\tfrac{9}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\right)+2\left(-\tfrac{125}{3}+25+75+9-9-45\right) =$$

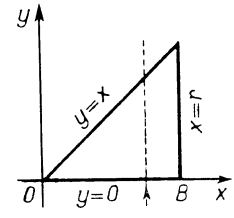
$$= 4\left(5-\tfrac{1}{3}\right)+2\left(-\tfrac{125}{3}+55\right) = \tfrac{136}{3}.$$

W każdym z dwóch sposobów rozwiązania otrzymaliśmy wynik jednakowy, prostszy jednak okazał się w tym przypadku sposób pierwszy, w którym obszaru całkowania D nie byliśmy zmuszeni dzielić na dwa obszary.

ZADANIE 4.3. Dany jest walec obrotowy o promieniu r i osi obrotu Oy. Obliczyć objętość części walca wznoszącej się nad trójkątem OAB (patrz rys. 4.7), który jest połową kwadratu $OBAC$ o boku r, leżącego w płaszczyźnie Oxy.



Rys. 4.7



Rys. 4.8

Rozwiązanie. Równanie powierzchni walca obrotowego jest następujące:

$$x^2+z^2=r^2\,;$$

stąd otrzymujemy

$$z=\sqrt{r^2-x^2} \qquad (0\leqslant x\leqslant r)\,.$$

Poszukiwana objętość wyrazi się wzorem

$$V=\iint\limits_D z\,d\sigma=\iint\limits_D \sqrt{r^2-x^2}\,d\sigma$$

Obszarem całkowania jest trójkąt OAB. Wykonajmy oddzielny rysunek 4.8 dla ustalenia granic całkowania. Przy wyborze kolejności całkowania kierujemy się albo łatwością ustalenia zmiennych granic, albo łatwością obliczenia całki. W tym zadaniu funkcja podcałkowa nie zawiera zmiennej y, całkowanie względem y będzie więc znacznie łatwiejsze niż względem x. Zmiennymi granicami całkowania (kierunek równoległy do osi Oy) w tym przypadku będą $y=0$ i $y=x$. Granicami całkowania względem x będą: najmniejsza odcięta obszaru, tj. $x=0$ (odcięta punktu O), oraz największa odcięta tego obszaru, tj. $x=r$ (odcięta punktów B lub A). W ten sposób otrzymujemy

$$V=\int_0^r\Big(\int_0^x \sqrt{r^2-x^2}\,dy\Big)dx=\int_0^r\Big(\sqrt{r^2-x^2}\int_0^x dy\Big)dx=\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,[y]_0^x\,dx=$$

$$=\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx\,.$$

Całkę tę obliczymy podstawiając $r^2-x^2=t$; stąd różniczkując otrzymujemy $-2x\,dx=dt$, czyli $x\,dx=-\frac{1}{2}\,dt$. Należy przy tym pamiętać, że przy przejściu od zmiennej x do zmiennej t zmienia się granice całkowania, przy czym dla $x=0$ jest $t=r^2$, dla $x=r$, jest $t=0$,

Mamy więc

$$V=\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx=-\tfrac{1}{2}\int_{r^2}^0\sqrt{t}\,dt=-\tfrac{1}{2}\left[\frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_{r^2}^0=\tfrac{1}{3}r^3.$$

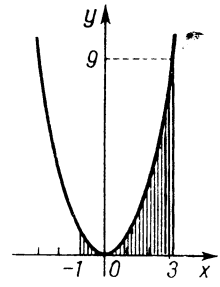
Objętość części walca wznoszącej się nad całym kwadratem $OBAC$ jest ćwiartką objętości walca obrotowego o promieniu r i wysokości $h=r$, wynosi więc $\frac{1}{4}\pi r^3$ i — co ciekawe — nie jest podwojoną objętością części walca wznoszącej się nad połową kwadratu.

Warto podkreślić niewystępowanie liczby π w otrzymanym wyniku.

ZADANIE 4.4. Obliczyć całkę podwójną

$$\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{10+2x+y}}$$

rozciągniętą na obszar D ograniczony łukiem paraboli $y=x^2$, odcinkiem osi Ox, odcinkiem prostej $x=-1$, odcinkiem prostej $x=3$ (rys. 4.9).



Rys. 4.9

Rozwiązanie. Jeżeli całkować będziemy najpierw względem zmiennej y, to na podstawie rysunku po wyznaczeniu granic całkowania całka podwójna wyrazi się tak

$$\iint_D \frac{d\sigma}{\sqrt{10+2x+y}}=\int_{-1}^3\left(\int_0^{x^2}\frac{dy}{\sqrt{10+2x+y}}\right)dx=\int_{-1}^3 2\left[\sqrt{10+2x+y}\right]_0^{x^2}dx=$$

$$=2\int_{-1}^3\left(\sqrt{10+2x+x^2}-\sqrt{10+2x}\right)dx=$$

$$=2\int_{-1}^3\sqrt{x^2+2x+10}\,dx-2\sqrt{2}\int_{-1}^3\sqrt{x+5}\,dx.$$

Obliczamy każdą z tych całek z osobna. Pierwszą całkę przekształcamy

$$\int\sqrt{x^2+2x+10}\,dx=\int\sqrt{(x+1)^2+9}\,dx$$

i stosując wzór

$$\int\sqrt{u^2+k}\,du=\tfrac{1}{2}u\sqrt{u^2+k}+\tfrac{1}{2}k\ln\left|u+\sqrt{u^2+k}\right|$$

(por. I, wzór (17.2.9)) otrzymujemy

$$\int_{-1}^3\sqrt{(x+1)^2+9}\,dx=\left[\tfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{(x+1)^2+9}+\tfrac{9}{2}\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+9}\right|\right]_{-1}^3=$$

$$=\left(\tfrac{4}{2}\sqrt{4^2+9}+\tfrac{9}{2}\ln\left|4+\sqrt{16+9}\right|\right)-\left(0+\tfrac{9}{2}\ln\sqrt{9}\right)=$$

$$=10+\tfrac{9}{2}\ln 9-\tfrac{9}{2}\ln 3=10+\tfrac{9}{2}\ln\tfrac{9}{3}=10+\tfrac{9}{2}\ln 3.$$

Obliczmy teraz drugą całkę:

$$\int_{-1}^{3}\sqrt{x+5}\,dx=\int_{-1}^{3}(x+5)^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{(x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{3}=$$

$$=\tfrac{2}{3}\left((3+5)^{\frac{3}{2}}-(-1+5)^{\frac{3}{2}}\right)=\tfrac{2}{3}\left(\sqrt{8^3}-(\sqrt{4})^3\right)=$$

$$=\tfrac{2}{3}\left(8\sqrt{8}-2^3\right)=\tfrac{2}{3}\left(8\cdot 2\sqrt{2}-8\right)=\tfrac{16}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

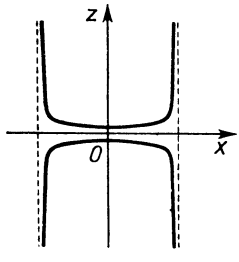
A więc ostatecznie

$$\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{10+2x+y}}=2\left(10+\tfrac{9}{2}\ln 3\right)-2\sqrt{2}\cdot\tfrac{16}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)=$$

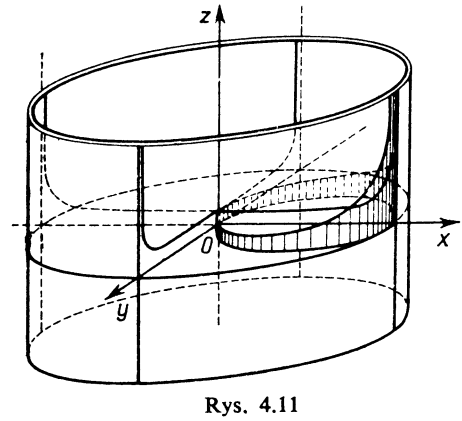
$$=20+9\ln 3-\tfrac{128}{3}+\tfrac{32}{3}\sqrt{2}=9\ln 3-\tfrac{4}{3}\left(17-8\sqrt{2}\right).$$

ZADANIE 4.5. Obliczyć objętość obszaru ograniczonego powierzchnią $z^2(a^2-x^2-y^2)=1$ i walcem o tworzącej równoległej do osi Oz, którego przekrój płaszczyzną Oxy jest okręgiem $x^2+y^2-ax=0$ $(a>0)$.

Rozwiązanie. Chcemy wykreślić najpierw powierzchnię $z^2(a^2-x^2-y^2)=1$. W tym celu zauważmy, że jest to powierzchnia obrotowa, jaką otrzymamy obracając krzywą $z^2(a^2-x^2)=1$ dookoła osi Oz. Wykreślmy linie $z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (południk powierzchni obrotowej). Krzywa jest symetryczna względem osi Oz, przecina ją w punktach $z=1/a$ oraz $z=-1/a$ i ma dwie asymptoty równoległe do osi Oz, o równaniach $x=-a$ oraz $x=+a$ (rys. 4.10).



Rys. 4.10



Rys. 4.11

Równanie powierzchni przedstawimy w formie rozwiązanej względem z; mamy

$$z=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

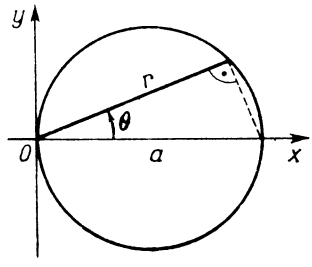
Objętość, wobec symetrii bryły względem płaszczyzny Oxy (rys. 4.11), wyraża się wzorem

$$V=2\iint_D z\,d\sigma=2\iint_D\frac{d\sigma}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}.$$

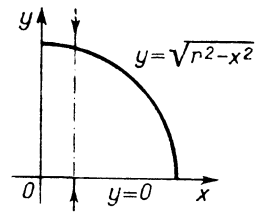
Ponieważ funkcja podcałkowa jest postaci $f(x^2+y^2)$ i obszar D jest kołem, więc wprowadzamy współrzędne biegunowe $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$. Przy tej zamianie zmiennych $d\sigma$ przechodzi na $r\,dr d\theta$. Mamy więc

$$V=2\iint_D \frac{r\,dr d\theta}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Wyraźmy równanie okręgu $x^2+y^2-ax=0$ w układzie biegunowym, tzn. $r^2-ar\cos\theta=0$, czyli po uproszczeniu: $r=a\cos\theta$.



Rys. 4.12



Rys. 4.13

Chcąc wyznaczyć granice całek zauważmy, że θ zmienia się w przedziale $(-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi)$ i że dla określonego θ z tego przedziału r zmienia się od 0 do $a\cos\theta$ (rys. 4.12). Zamieniamy całkę podwójną na całkę iterowaną, przy czym całkujemy najpierw względem r, a następnie względem θ. W ten sposób otrzymujemy

$$V=2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\int_0^{a\cos\theta}\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\right)d\theta=-2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left[\sqrt{a^2-r^2}\right]_{r=0}^{r=a\cos\theta}d\theta=$$

$$=-2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(\sqrt{a^2-a^2\cos^2\theta}-\sqrt{a^2}\right)d\theta=-2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(a\sqrt{1-\cos^2\theta}-a\right)d\theta=$$

$$=-2a\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left(|\sin\theta|-1\right)d\theta=-2a\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}|\sin\theta|\,d\theta+2a\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}d\theta=$$

$$=-2a\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0}(-\sin\theta)\,d\theta-2a\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\sin\theta\,d\theta+2a\left[\theta\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}=$$

$$=-2a\left[\cos\theta\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{0}+2a\left[\cos\theta\right]_{0}^{\frac{1}{2}\pi}+2a\pi=-2a-2a+2a\pi$$

i ostatecznie mamy $V=2a(\pi-2)$.

ZADANIE 4.6. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, powierzchnią walcową $x^2+y^2=R^2$ (gdzie $R>0$) oraz powierzchnią $pz=xy$ (gdzie $p>0$), dla $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. Jaka jest średnia wartość funkcji $z=xy/p$ w tym obszarze?

Rozwiązanie. Poszukiwana objętość wyraża się całką podwójną

$$V=\iint_D \frac{xy\,d\sigma}{p},$$

gdzie obszar D jest ćwiartką koła (rys. 4.13). Ze względu na funkcję podcałkową i na obszar D widoczne jest, że kolejność całkowania jest tutaj obojętna. Jeżeli więc całkować będziemy najpierw względem y, to zmiennymi granicami całkowania, jak widać z rysunku, są $y=0$ i $y=\sqrt{R^2-x^2}$, a stałymi granicami całkowania względem x będą $x=0$ i $x=R$. Otrzymujemy więc

$$V=\int_0^R\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{xy\,dy}{p}\right)dx=\frac{1}{p}\int_0^R\left(x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}y\,dy\right)dx=\frac{1}{p}\int_0^R x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dx=$$

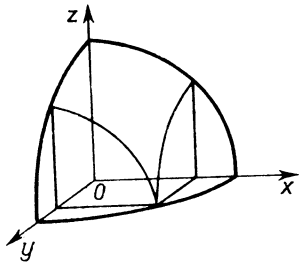
$$=\frac{1}{2p}\int_0^R x(R^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2p}\left[\tfrac{1}{2}R^2x^2-\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^R=\frac{1}{2p}\left(\tfrac{1}{2}R^4-\tfrac{1}{4}R^4\right)=\frac{R^4}{8p}.$$

Całkę tę można również obliczyć wprowadzając współrzędne biegunowe.

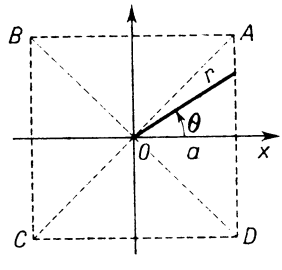
Średnią wartość μ funkcji otrzymujemy dzieląc obliczoną objętość V przez pole obszaru D, tj. przez $\frac{1}{4}\pi R^2$; mamy więc

$$\mu=\frac{R^4}{8p}:\frac{\pi R^2}{4}=\frac{R^2}{2\pi p}.$$

ZADANIE 4.7. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami $z=0$, $x=a$, $y=a$, $x=-a$, $y=-a$ oraz powierzchnią kuli $x^2+y^2+z^2=2a^2$, gdzie $a>0$, $z\geqslant 0$ (rys. 4.14).



Rys. 4.14



Rys. 4.15

Rozwiązanie. Poszukiwana objętość wyraża się całką

$$V=\iint_D\sqrt{2a^2-(x^2+y^2)}\,d\sigma,$$

gdzie obszar całkowania D jest wnętrzem kwadratu o wierzchołkach: $A(a, a)$, $B(-a, a)$, $C(-a, -a)$, $D(a, -a)$. Wobec symetrii bryły względem płaszczyzn Oxz i Oyz można ograniczyć się do obliczenia $\frac{1}{4}V$, rozciągając całkowanie na trójkąt prostokątny DOA (rys. 4.15).

Przechodząc do współrzędnych biegunowych otrzymujemy

$$\tfrac{1}{4}V=\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}\left(\int_0^{a/\cos\theta}\sqrt{2a^2-r^2}\,r\,dr\right)d\theta=\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}\left[-\tfrac{1}{3}(2a-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a/\cos\theta}d\theta.$$

Podstawiamy granice i korzystamy z przekształcenia $2-\frac{1}{\cos^2\theta}=1-\operatorname{tg}^2\theta$. Otrzymujemy

$$(1)\quad \tfrac{1}{4}V=\tfrac{1}{3}a^3\int\limits_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}(2\sqrt{2}-(1-\operatorname{tg}^2\theta)^{\frac{3}{2}})\,d\theta=\tfrac{1}{3}a^3\Big(\pi\sqrt{2}-\int\limits_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}(1-\operatorname{tg}^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta\Big)=\tfrac{1}{3}a^3(\pi\sqrt{2}-I),$$

gdzie

$$(2)\qquad I=\int\limits_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}(1-\operatorname{tg}^2\theta)^{\frac{3}{2}}\,d\theta.$$

Aby obliczyć tę całkę, podstawiamy $\operatorname{tg}\theta=u$, czyli $\theta=\operatorname{arctg}u$, skąd $d\theta=\frac{du}{1+u^2}$; otrzymujemy

$$I=\int\limits_{-1}^{1}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{du}{1+u^2}.$$

Dalej podstawiamy $u=\sin\varphi$, skąd $du=\cos\varphi\,d\varphi$; otrzymujemy

$$I=\int\limits_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}\frac{\cos^4\varphi\,d\varphi}{1+\sin^2\varphi}.$$

Przekształcamy funkcję podcałkową

$$\frac{\cos^4\varphi}{1+\sin^2\varphi}=\frac{(1-\sin^2\varphi)^2}{\sin^2\varphi+1}=\frac{\sin^4\varphi-2\sin^2\varphi+1}{\sin^2\varphi+1}=\sin^2\varphi-3+\frac{4}{\sin^2\varphi+1}$$

a więc

$$(3)\qquad I=\int\limits_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}(\sin^2\varphi-3)\,d\varphi+4\int\limits_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi+1}=I_1+4I_2.$$

Obliczamy kolejno potrzebne całki I_1 i I_2. Mamy

$$I_1=\int\limits_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}(\sin^2\varphi-3)\,d\varphi=\Big[\tfrac{1}{2}\varphi-\tfrac{1}{4}\cos 2\varphi-3\varphi\Big]_{-\frac{1}{4}\pi}^{+\frac{1}{4}\pi}=$$

$$=\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{4}(-1)-\tfrac{3}{2}\pi+\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{4}(-1)-\tfrac{3}{2}\pi=-\tfrac{5}{2}\pi.$$

Zauważmy, że całka

$$I_2=\int\limits_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi}\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi+1}$$

jest typu $\int R(\sin^2 x,\cos^2 x,\sin x\cos x)\,dx$ (por. I, § 18.2), dokonujemy więc podstawienie

$$\operatorname{tg}\varphi=t,\qquad d\varphi=\frac{dt}{1+t^2},\qquad \sin^2\varphi=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

Dla $\varphi=-\frac{1}{2}\pi$ jest $t=-\infty$, a dla $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ jest $t=+\infty$, mamy więc (por. I, § 21.1):

$$I_2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{t^2}{1+t^2}+1\right)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{2t^2+1}=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\lim_{\substack{r\to-\infty\\ s\to+\infty}}\left[\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right]_r^s=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Wracając do (3) mamy

$$I=-\tfrac{5}{2}\pi+2\pi\sqrt{2}=\pi(2\sqrt{2}-\tfrac{5}{2}),$$

a na podstawie (1) otrzymujemy

$$\tfrac{1}{4}V=\tfrac{1}{3}a^3(\pi\sqrt{2}-\pi(2\sqrt{2}-\tfrac{5}{2}))=\tfrac{1}{3}\pi a^3(\tfrac{5}{2}-\sqrt{2}),$$

skąd ostatecznie $V=\frac{4}{3}\pi\, a^3(\frac{5}{2}-\sqrt{2})$.

Zadania

Obliczyć całki (zad. 4.8 - 4.11):

4.8. $\int_0^4 dx\int_4^{12} xy\,dy$.

4.9. $\int_0^a dx\int_0^b xy(x-y)\,dy$.

4.10. $\int_0^b\left(\int_t^{10t}\sqrt{st-t^2}\,ds\right)dt$.

4.11. $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\theta\int_{a\cos\theta}^{a} r^4\,dr$, $a>0$.

4.12. Obliczyć całkę $\iint_D \sin x\cos y\,dxdy$, gdzie obszarem D całkowania jest trójkąt o wierzchołkach $A(a,0)$, $B(0,a)$, $C(0,0)$, gdzie $a>0$.

4.13. Obliczyć całkę $\iint_D(2x+1)\,dxdy$, gdzie obszarem D całkowania jest trójkąt o wierzchołkach $A(-1,1)$, $B(1,1)$, $C(0,0)$.

4.14. Obliczyć całkę $\iint_D(x+2y)\,dxdy$, gdzie obszarem D całkowania jest trójkąt o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(-1,1)$.

4.15. Obliczyć całkę

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{ax-x^2}},$$

gdzie D jest obszarem ograniczonym parabolą $y^2=-ax+a^2$, gdzie $a>0$, i osią Oy.

4.16. Prostopadłościan, którego dolną podstawą jest prostokąt D położony w płaszczyźnie Oxy i ograniczony prostymi $x=c$, $x=d$ $(c<d)$, $y=e$, $y=f$ $(e<f)$, został ścięty od góry powierzchnią $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$. Obliczyć objętość powstałej bryły.

4.17. Znaleźć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z=1+x+y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$.

4.18. Znaleźć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami układu współrzędnych i powierzchniami $z=4x^2+2y^2+1$, $x+y-3=0$.

Znaleźć objętość bryły ograniczonej powierzchniami (zad. 4.19 - 4.28):

4.19. $z=a^2-x^2$, $y=2x$, $x+y=a$, $z=0$, $y=0$.

4.20. $y=x^2$, $z=x^2+y^2$, $y=1$, $z=0$.

4.21. $z=\sin\frac{y}{2x}\pi$, $z=0$, $y=x$, $y=0$, $x=\pi$.

4.22. $u=\cos x\cos y$, $z=0$, $|x+y|\leqslant\frac{1}{2}\pi$, $|x-y|\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

4.23. $z=\sin\pi xy$, $z=0$, $xy=1$, $y=x$, $y=2x$, $x>0$.

4.24. $z=x^2+y^2$, $xy=5$, $xy=10$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=2x$.

4.25. $z=xy$, $y=x^2$, $x^2=2y$, $x=y^2$, $y^2=2x$.

4.26. $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$.

4.27. $z^2=xy$, $x+y=4$, $x+y=6$.

4.28. $z=x+y$, $xy=1$, $xy=2$, $x=y$, $y=2x$, $z=0$ $(x>0, y>0)$.

4.29. Stosując zamianę zmiennych obliczyć całkę $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, gdzie D jest wnętrzem okręgu $x^2+y^2=1$.

W następujących zadaniach 4.30 - 4.35 należy stosować zamianę zmiennych:

4.30. Znaleźć objętość bryły leżącej nad płaszczyzną Oxy i ograniczonej płaszczyzną $z=3x$, powierzchnią $x^2+y^2=4$ oraz płaszczyznami Oxy i Oxz.

4.31. Znaleźć objętość bryły ograniczonej następującymi powierzchniami

$$x+y+z=10, \quad x^2+y^2=4, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

4.32. Znaleźć objętość bryły ograniczonej płaszczyzną Oxy, powierzchnią $z=a\exp(-x^2-y^2)$ i walcem $x^2+y^2=R^2$.

4.33. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyzną Oxy, walcem $x^2+y^2-ax=0$ i paraboloidą obrotową $x^2+y^2-cz=0$.

4.34. Znaleźć objętość bryły ograniczonej płaszczyzną Oxy oraz powierzchniami $x^2+y^2-4z^2=0$, $x^2+y^2-8x=0$.

4.35. Znaleźć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z=\beta x$, $z=\alpha x$, $(\beta<\alpha)$, $x^2+y^2=2ax$.

4.36. Osie dwóch powierzchni walcowych o tym samym promieniu a przecinają się pod kątem prostym. Obliczyć wspólną objętość obu walców.

Znaleźć objętość bryły ograniczonej następującymi powierzchniami:

4.37. $z=3\operatorname{arc tg}\frac{y}{x}$, $z=0$, $\sqrt{x^2+y^2}=2\operatorname{arc tg}\frac{y}{x}$, $y\geqslant 0$.

4.38. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2=-1$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

4.39. Obliczyć objętość tej części elipsoidy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, która jest ograniczona płaszczyznami współrzędnych i płaszczyzną $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

4.40. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią $a^2y^2+x^2z^2=r^2x^2$ i płaszczyznami $x=0$, $x=a$.

4.41. Znaleźć objętość bryły ograniczonej paraboloidą $2az=x^2+y^2$ i sferą $x^2+y^2+z^2=3a^2$. (Bierzemy pod uwagę tę część bryły, która leży wewnątrz paraboloidy).

4.42. Obliczyć, w jakim stosunku hiperboloida $x^2+y^2-z^2=a^2$ dzieli objętość kuli $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$.

4.43. Znaleźć objętość bryły ograniczonej płaszczyzną Oxy, paraboloidą $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ i walcem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{x}{a}$.

4.44. Znaleźć objętość bryły ograniczonej stożkiem $2(x^2+y^2)-z^2=0$ i hiperboloidą $x^2+y^2-z^2=-a^2$.

§ 4.7. POLE POWIERZCHNI W PRZESTRZENI

Rozważmy płat gładki S o równaniu $z=f(x,y)$, którego rzutem na płaszczyznę Oxy jest obszar D. Obszar ten dzielimy na n części $\Delta D_1, \Delta D_2, \ldots, \Delta D_n$, a średnicę tego podziału oznaczymy przez δ_n (por. § 1.2). W każdej części podziału wybieramy dowolny punkt

$$(x_1,y_1)\in\Delta D_1, \quad \ldots, \quad (x_n,y_n)\in\Delta D_n;$$

punkty te są rzutami prostokątnymi na płaszczyznę Oxy punktów

$$M_1(x_1,y_1,z_1), \quad \ldots, \quad M_n(x_n,y_n,z_n)$$

leżących na płacie S, gdzie $z_i=f(x_i,y_i)$, $i=1,2,\ldots,n$. W każdym z tych punktów prowadzimy płaszczyznę styczną do płata S i przez ΔS_i oznaczamy pole wycięte z płaszczyzny stycznej takiego kształtu, aby jego rzutem na płaszczyznę Oxy było ΔD_i; ΔS_i dla $i=1,2,\ldots,n$ nazywamy elementami stycznymi, a suma ich $\sum_1^n \Delta S_i$ jest pewnym przybliżeniem pola płata S.

DEFINICJA. Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów obszaru D ciąg sum

$$\sigma_n=\Delta S_1+\Delta S_2+\ldots+\Delta S_n$$

posiada tę samą granicę niezależnie od wyboru punktów styczności M_i, to nazywamy ją *polem* $|S|$ *płata* S i oznaczamy symbolem $\iint_S dS$. Tak więc

$$|S|=\iint_S dS=\lim_{n\to\infty}\sigma_n, \quad \delta_n\to 0. \tag{4.7.1}$$

Dowodzi się, że dla każdego płata gładkiego granica (4.7.1) istnieje i równa jest następującej całce podwójnej:

$$|S|=\iint_D \sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dxdy. \tag{4.7.2}$$

ZADANIE 4.45. Obliczyć pole części powierzchni $2xy-z^2=0$ wyciętej przez prostopadłościan, którego podstawa znajduje się w płaszczyźnie Oxy, a wierzchołkami jej są punkty $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,9)$, $D(0,9)$.

Rozwiązanie. Obliczymy pole powierzchni leżącej ponad płaszczyzną Oxy; wtedy $z \geqslant 0$. Obszarem całkowania jest prostokąt. Poszukiwane pole wyraża się wzorem

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, d\sigma, \tag{4.7.3}$$

gdzie $d\sigma = dxdy$, a D oznacza obszar prostokąta.

Z równania powierzchni (dla $z \geqslant 0$) otrzymujemy $z = \sqrt{2xy}$, a stąd

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{2y}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{2x}\,\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

i po podstawieniu do wzoru (4.7.1) mamy

$$S = \int_0^9 \left(\int_0^4 \sqrt{1 + \frac{2y}{4x} + \frac{2x}{4y}}\, dx \right) dy = \int_0^9 \left(\int_0^4 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\, dx \right) dy = \int_0^9 \left(\frac{1}{\sqrt{2y}} \int_0^4 \left(\sqrt{x} + \frac{y}{\sqrt{x}} \right) dx \right) dy =$$

$$= \int_0^9 \left(\frac{1}{\sqrt{2y}} \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + y \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right)_{x=0}^{x=4} \right) dy = \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{2y}} \left(\frac{16}{3} + 4y \right) dy = \frac{8\sqrt{2}}{3} \int_0^9 y^{-\frac{1}{2}} dy + 2\sqrt{2} \int_0^9 \sqrt{y}\, dy =$$

$$= \frac{8\sqrt{2}}{3} \left[\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^9 + 2\sqrt{2} \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^9 = \left(\frac{8}{3} \cdot 6 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 27}{3} \right) \sqrt{2} = 52\sqrt{2}.$$

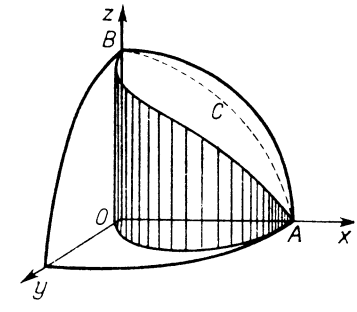
ZADANIE 4.46. Obliczyć pole powierzchni walca o promieniu $\frac{1}{2}r$, zawarte wewnątrz kuli o promieniu r, której środek leży na powierzchni walca (rys. 4.16).

Rozwiązanie. Umieśćmy środek kuli w początku układu współrzędnych. Równanie jej jest następujące:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{1}$$

Niech oś walca będzie równoległa do osi Oz i niech przebija oś Ox w punkcie o odciętej $x = \frac{1}{2}r$. Równanie powierzchni walca jest $(x - \frac{1}{2}r)^2 + y^2 = (\frac{1}{2}r)^2$, czyli

$$x^2 - rx + y^2 = 0. \tag{2}$$



Rys. 4.16

Na rysunku 4.16 zakreskowana część powierzchni walca stanowi $\frac{1}{4}$ poszukiwanej powierzchni. Rzut tej części na płaszczyznę Ozx jest obszarem $OACB$, który oznaczmy przez S'. Równanie linii krzywej ACB znajdującej się w płaszczyźnie Ozx (której równanie jest $y = 0$) otrzymamy rugując zmienną y z równań powierzchni kuli (1) i powierzchni walca (2); odejmując stronami równania (1) i (2) otrzymujemy równania linii ABC w postaci

$$z^2 + rx = r^2, \quad y = 0. \tag{3}$$

Pole S powierzchni, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest obszar D, wyraża się wzorem (4.7.2). W tym zadaniu będziemy rzutowali powierzchnię na płaszczyznę Oxz. Odpowiedni

wzór będzie miał postać

$$S=\iint_{S'}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,d\sigma, \tag{4.7.4}$$

gdzie element pola $d\sigma=dxdz$.

Z równania powierzchni walca (2):

$$f(x,y)\equiv x^2-rx+y^2=0 \tag{4}$$

mamy obliczyć pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_y},\qquad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{f'_z}{f'_y},$$

występujące pod znakiem pierwiastka (por. str. 68). Ponieważ $f'_x=2x-r$, $f'_y=2y$, $f'_z=0$, więc

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{r-2x}{2y},\qquad \frac{\partial y}{\partial z}=0,$$

przy czym bierzemy $0<x<r$, $y>0$. Po podstawieniu do wzoru (4.7.4) otrzymujemy

$$S=\iint_{S'}\sqrt{1+\left(\frac{r-2x}{2y}\right)^2}\,d\sigma=\iint_{S'}\sqrt{\frac{4y^2+r^2-4rx+4x^2}{4y^2}}\,d\sigma=$$

$$=\iint_{S'}\frac{\sqrt{4(x^2-rx+y^2)+r^2}}{2y}d\sigma.$$

Nawias w liczniku jest, według (4), równy zeru; z tej samej równości mamy $y=\sqrt{rx-x^2}$. Po podstawieniu otrzymujemy

$$S=\frac{r}{2}\iint_{S'}\frac{d\sigma}{\sqrt{rx-x^2}},\qquad \text{gdzie}\qquad d\sigma=dxdz.$$

Jeżeli najpierw całkować będziemy względem zmiennej z (tak będzie łatwiej, bo funkcja podcałkowa nie zawiera zmiennej z), to granicami całkowania są $z=0$ i $z=\sqrt{r^2-rx}$, otrzymane z równości (3). Granicami całkowania względem x są $x=0$ i $x=r$. Mamy

$$S=\frac{r}{2}\int_0^r\left(\frac{1}{\sqrt{rx-x^2}}\int_{z=0}^{z=\sqrt{r^2-rx}}dz\right)dx=$$

$$=\frac{r}{2}\int_0^r\frac{\sqrt{r^2-rx}}{\sqrt{rx-x^2}}dx=\frac{r}{2}\int_0^r\frac{\sqrt{r(r-x)}}{\sqrt{x(r-x)}}\,dx=$$

$$=\frac{r\sqrt{r}}{2}\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{r\sqrt{r}}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^r\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{r\sqrt{r}}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^r=r^2.$$

Poszukiwane pole wynosi $4r^2$.

Uwaga. Zadanie można rozwiązać też inną metodą. Ponieważ poszukiwana powierzchnia stanowi część powierzchni walca obrotowego, więc jest rozwijalna, a pole jej możemy obliczyć za pomocą całki pojedynczej, mianowicie za pomocą całki

$$\int_{(A)}^{(O)} z\,dL, \tag{4.7.5}$$

gdzie zmienną $z=\sqrt{r^2-rx}$ wyznaczymy z równania (3), a dL jest różniczką łuku okręgu podstawy walca i wyraża się wzorem (por. I, § 20.2):

$$dL=\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{4.7.6}$$

przy czym y, obliczone z równania (2), wyraża się wzorem $y=\sqrt{rx-x^2}$. Mamy

$$y'=\frac{r-2x}{2\sqrt{rx-x^2}}, \quad \text{skąd} \quad dL=\sqrt{1+\frac{(r-2x)^2}{4(rx-x^2)}}\,dx=\frac{r}{2\sqrt{x(r-x)}}\,dx.$$

A więc

$$S=\int_0^r \frac{r\sqrt{r(r-x)}}{2\sqrt{x(r-x)}}\,dx=\frac{r\sqrt{r}}{2}\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{x}}=r^2.$$

Poszukiwane pole wynosi $4r^2$.

ZADANIE 4.47. Obliczyć część powierzchni paraboloidy

$$z=a-\frac{x^2}{4a}-\frac{y^2}{4a} \quad (a>0), \tag{1}$$

ograniczoną walcem o tworzących równoległych do osi Oz, którego przekrój z płaszczyzną Oxy jest krzywą daną równaniami

$$x=2a\cos\theta\sqrt{\cos\theta}, \quad y=2a\sin\theta\sqrt{\cos\theta}. \tag{2}$$

Rozwiązanie. Jeżeli podstawimy $\theta=\theta_0$ i $\theta=-\theta_0$, to otrzymamy dwa punkty krzywej symetryczne względem osi Ox; z tego wynika wniosek, że oś Ox jest osią symetrii danej krzywej.

Aby zbadać przebieg krzywej, wyznaczmy pochodną $\frac{dy}{dx}$. Obliczamy

$$dx=\frac{-3a\sin\theta\sqrt{\cos\theta}}{\cos\theta}\,d\theta, \quad dy=a\,\frac{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\,d\theta.$$

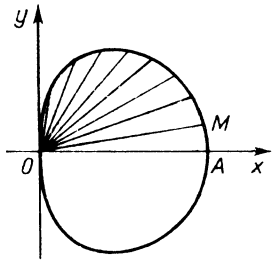
Stąd

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}{3\sin\theta\cos\theta}=\frac{\operatorname{tg}^2\theta-2}{3\operatorname{tg}\theta}.$$

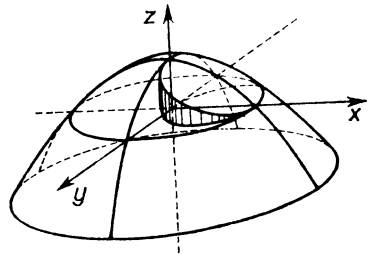
Gdy $\theta=0$, mamy punkt krzywej $A(2a, 0)$. Gdy $\theta\to+0$, wówczas $\frac{dy}{dx}\to-\infty$, a gdy $\theta\to-0$, wówczas $\frac{dy}{dx}\to+\infty$; z tego wniosek, że styczna do krzywej w punkcie $A(2a, 0)$ jest prosto-

padła do osi Ox. Gdy $\theta=\frac{1}{2}\pi$, mamy punkt krzywej $O(0,0)$. Gdy $\theta\to\frac{1}{2}\pi-0$, wówczas $\frac{dy}{dx}\to+\infty$, a więc i w punkcie $O(0,0)$ styczna do krzywej jest prostopadła do osi Ox.

Znajdźmy ekstremalne wartości rzędnej y. Gdy $\operatorname{tg}^2\theta=2$, czyli $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{2}$ lub $\operatorname{tg}\theta=-\sqrt{2}$, wówczas $\frac{dy}{dx}=0$. Wartości $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{2}$, czyli $\cos\theta=\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\sin\theta=\frac{1}{3}\sqrt{6}$ odpowiada maksimum rzędnej y w punkcie $(\frac{2}{3}a\sqrt[4]{3},\frac{2}{3}a\sqrt[4]{12})$, a wartości $\operatorname{tg}\theta=-\sqrt{2}$ odpowiada minimum rzędnej y, symetryczne do maksimum względem osi Ox.



Rys. 4.17



Rys. 4.18

W układzie współrzędnych biegunowych dana krzywa (2) ma równanie

$$r=2a\sqrt{\cos\theta}\,; \tag{3}$$

wykres jej podano na rysunku 4.17.

Weźmy teraz pod uwagę powierzchnię (1) (rys. 4.18). Przecina ona oś Oz w punkcie $(0,0,a)$, oś Ox w punkcie $A(2a,0,0)$, oś Oy w punkcie $B(0,2a,0)$. Przecięcie danej powierzchni z płaszczyzną Oxy jest krzywą daną równaniem $0=a-\frac{x^2}{4a}-\frac{y^2}{4a}$, czyli

$$x^2+y^2=4a^2, \tag{4}$$

a więc jest to okrąg o środku w początku współrzędnych i promieniu $r=2a$. Oczywiście krzywa (2) leży wewnątrz okręgu (4) i w punkcie A jest do tego okręgu styczna (1).

Pole powierzchni wykrojonej przez walec znajdziemy na podstawie wzoru (4.7.2), gdzie obszar D jest ograniczony krzywą (2).

Obliczamy pochodne

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{2a},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{2a}.$$

Po podstawieniu do wzoru (4.7.1) na powierzchnię S otrzymujemy

$$S=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{4a^2}}\,d\sigma. \tag{5}$$

(1) Równanie bowiem okręgu $x^2+y^2=4a^2$ można napisać w formie parametrycznej $x=2a\cos\theta$, $y=2a\sin\theta$.

Wprowadzamy współrzędne biegunowe $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, wtedy $x^2+y^2=r^2$, $d\sigma=r\,dr d\theta$. Po podstawieniu do wzoru na S otrzymujemy

$$S=\iint_D \sqrt{1+\frac{r^2}{4a^2}}\,r\,dr d\theta, \tag{6}$$

przy czym krzywa (2) ograniczająca obszar D ma we współrzędnych biegunowych równanie (3).

Podobnie jak we współrzędnych prostokątnych (por. zadanie 4.2), pierwsze całkowanie odbywa się w granicach zmiennych, a drugie w granicach stałych. Chcąc znaleźć granice całkowania względem zmiennej r, musimy wziąć pod uwagę równanie linii ograniczającej obszar całkowania, które we współrzędnych biegunowych przybierze postać $r=2a\sqrt{\cos\theta}$ (rys. 4.17). Zauważmy, że przy danej wartości θ wartość r zmienia się wzdłuż promienia wodzącego OM od 0 do $2a\sqrt{\cos\theta}$; wartości te są granicami całkowania pierwszej całki. Granice całkowania drugiej całki względem θ są stałe; są to liczby $-\frac{1}{2}\pi$ i $\frac{1}{2}\pi$.

Mamy więc

$$S=\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left[\int_0^{2a\sqrt{\cos\theta}}\left(1+\frac{r^2}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}} r\,dr\right]d\theta=\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left[\frac{\left(1+\frac{r^2}{4a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=2a\sqrt{\cos\theta}}\frac{4a^2}{2}\,d\theta=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{4a^2}{2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\left[\left(1+\frac{4a^2\cos\theta}{4a^2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]d\theta=\frac{4}{3}a^2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}((1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}-1)\,d\theta.$$

Stosując podstawienie $1+\cos\theta=2\cos^2\frac{1}{2}\theta$, otrzymujemy $(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}\cos^3\frac{1}{2}\theta$; zatem

$$S=\tfrac{4}{3}a^2\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}(2\sqrt{2}\cos^3\tfrac{1}{2}\theta-1)\,d\theta=\tfrac{4}{3}a^2\left(2\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos^3\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta-\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}d\theta\right). \tag{7}$$

Obliczamy osobno (por. I, § 18.1):

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos^3\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta=\tfrac{5}{3}\sqrt{2},\qquad \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}d\theta=\pi;$$

stąd

$$S=\tfrac{4}{3}a^2(2\sqrt{2}\cdot\tfrac{5}{3}\sqrt{2}-\pi)=\tfrac{4}{9}(20-3\pi)a^2.$$

Zadania

4.48. Przyjmując płaszczyznę Oxy za płaszczyznę równika kuli $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$, obliczyć pole czaszy kulistej leżącej ponad równoleżnikiem o szerokości geograficznej φ, gdzie $0^0<\varphi<90°$.

4.49. Obliczyć pole powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2=R^2$, $R>0$, zawartego między równoleżnikami 48° i 54° oraz południkami 15° i 24°.

4.50. Obliczyć pole części paraboloidy obrotowej $2pz=x^2+y^2, p>0$, zawartej wewnątrz walca $x^2+y^2=a^2$, $a>0$.

4.51. Obliczyć pole części powierzchni $z=\sqrt{x^2-y^2}$, której rzutem na płaszczyznę Oxy jest wnętrze trójkąta o wierzchołkach $O(0,0)$, $A(2,1)$ i $B(2,2)$.

4.52. Obliczyć pole części płaszczyzny $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, zawartej między płaszczyznami współrzędnych.

4.53. Obliczyć pole powierzchni czworokąta ukośnego położonego na paraboloidzie hiperbolicznej $z=xy$, którego rzutem na płaszczyznę Oxy jest prostokąt $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$.

4.54. Osie dwóch powierzchni walcowych o tym samym promieniu a przecinają się pod kątem prostym. Obliczyć tę część pola powierzchni, która znajduje się wewnątrz drugiej.

4.55. Obliczyć pole tej części powierzchni $z=2xy$, która jest ograniczona płaszczyznami $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4.56. Znaleźć pole tej części powierzchni $z^2+x^2=1$, która leży nad płaszczyzną Oxy i której rzutem na płaszczyznę Oxy jest trójkąt OAB o wierzchołkach O (0, 0), A (1, 0), B (0, 1).

4.57. Obliczyć pole tej części walca $x^2+y^2=2$, która jest ograniczona płaszczyznami $x+z=0$, $x-z=0$ $(x>0, y>0)$.

4.58. Znaleźć pole tej części powierzchni $x^2+y^2-4z^2=0$, która leży nad płaszczyzną Oxy i której rzutem na płaszczyznę Oxy jest trójkąt ABC o wierzchołkach A (1, 1), B (7, 4), C(7, 10).

4.59. Obliczyć pole tej części powierzchni $z=\sqrt{x^2-y^2}$, która jest zawarta wewnątrz walca $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.

4.60. Znaleźć pole tej części powierzchni $2z=xy$, która leży wewnątrz walca $x^2+y^2=4$.

4.61. Obliczyć pole powierzchni bryły ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$, $x+y+z=2$.

4.62. Obliczyć pole powierzchni bryły ograniczonej powierzchniami $x^2+z^2=9$, $y^2+z^2=9$.

4.63. Znaleźć pole powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2=25$, która jest zawarta wewnątrz walca $\frac{1}{25}x^2+\frac{1}{9}y^2=1$.

4.64. Znaleźć pole tej części powierzchni $x^2+y^2=2z$, która jest zawarta wewnątrz walca $(x^2+y^2)^2=2xy$.

4.65. Znaleźć pole tej części powierzchni $z=\sqrt{x^2+y^2}$, która jest zawarta wewnątrz walca $x^2+y^2=2x$.

4.66. Znaleźć pole powierzchni części stożka $x^2-y^2=z^2$ ograniczonej płaszczyznami układu współrzędnych i płaszczyzną $y+z=a$.

4.67. Znaleźć pole powierzchni odciętej przez walec $x^2+y^2=b^2$ z kuli $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>b)$.

4.68. Znaleźć pole powierzchni części stożka $y^2+z^2=x^2$ leżącej wewnątrz walca $x^2+y^2=a^2$.

4.69. Wykazać, że pola powierzchni części paraboloid $x^2+y^2=2ar$ i $x^2-y^2=2a^2$ wyciętych walcem $x^2+y^2=R^2$ są równe.

4.70. Obliczyć pole powierzchni części bryły $az=xy$ leżącej wewnątrz walca $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

4.71. Znaleźć pole powierzchni bryły $(x^2+y^2+z^2)^2=a(x^2+y^2)$.

4.72. Znaleźć pole powierzchni części bryły $(x+y)^2+2z^2=2a^2$ leżącej w pierwszej ósemce układu współrzędnych.

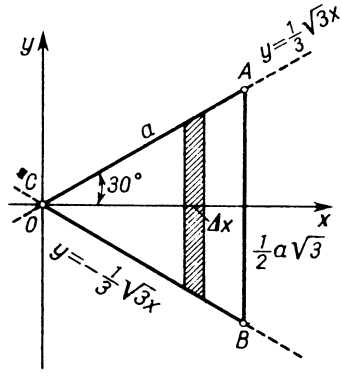
4.73. Znaleźć pole powierzchni bryły $(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+z^2=a^2$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

4.74. Znaleźć pole powierzchni części stożka $x^2=y^2+z^2$ odciętej powierzchnią $x^2=ay$.

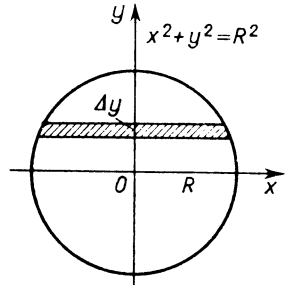
4.75. Znaleźć pole powierzchni bryły $z^2=2xy$ przy $x>0, y>0, z>0$ i $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}<1$.

§ 4.8. INNE ZASTOSOWANIA CAŁEK PODWÓJNYCH

ZADANIE 4.76. Wyznaczyć moment wywołany naciskiem wody i działający na ściankę pionową naczynia. Ścianka ta ma kształt trójkąta ABC foremnego o bokach równych a, bok AB jest ustawiony pionowo, przy czym powierzchnia wody sięga wierzchołka A. Moment liczyć względem osi pionowej przechodzącej przez wierzchołek C (rys. 4.19). Ciężar właściwy wody przyjąć δ.



Rys. 4.19



Rys. 4.20

Rozwiązanie. Na głębokości $h=\frac{1}{2}a-y$ ciśnienie wody jest równe $p=\delta(\frac{1}{2}a-y)$. Nacisk wody na pasek trójkąta o szerokości Δx wynosi

$$\Delta F=\Big(\int\limits_{-\frac{1}{2}x\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}\delta(\tfrac{1}{2}a-y)\,dy\Big)\Delta x,$$

a więc szukany moment (por. I, § 20.4) względem osi Oy równa się

$$M=\int_0^{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}\left(\int_{-\frac{1}{2}x\sqrt{3}}^{\frac{1}{2}x\sqrt{3}}\delta(\tfrac{1}{2}a-y)dy\right)x\,dx=\tfrac{1}{3}a\delta\sqrt{3}\int_0^{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}x\,dx=\tfrac{1}{8}a^3\delta\sqrt{3}.$$

ZADANIE 4.77. Wyznaczyć moment bezwładności blaszanego krążka o grubości a i promieniu R (rys. 4.20) obracającego się dookoła swej średnicy. Gęstość materiału krążka wynosi μ.

Rozwiązanie. Moment bezwładności paska krążka o szerokości y wynosi

$$\Delta B=\left[2a\mu\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}x^2\,dx\right]\Delta y.$$

Moment całego krążka równy jest więc

$$B=2a\mu\int_{-R}^{R}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}x^2\,dx\right)dy=\tfrac{2}{3}a\mu\int_{-R}^{R}(R^2-y^2)\sqrt{R^2-y^2}\,dy=$$

$$=\tfrac{2}{3}a\mu\left[\tfrac{3}{8}R^4\arcsin\frac{y}{R}+\tfrac{5}{8}R^2y\sqrt{R^2-y^2}-\tfrac{1}{4}y^3\sqrt{R^2-y^2}\right]_{-R}^{+R}=$$

$$=\tfrac{2}{3}a\mu(2\cdot\tfrac{3}{8}R^4\cdot\tfrac{1}{2}\pi)=\tfrac{1}{4}a\mu R^4.$$

ZADANIE 4.78. Wyznaczyć moment bezwładności wału w kształcie stożka ściętego. Długość wału wynosi l, promienie podstaw stożka są R_1 i R_2 ($R_1<R_2$). Gęstość właściwa materiału wynosi μ.

Rozwiązanie. Promień r wału w dowolnym przekroju x wyznaczamy z proporcji $\frac{r-R_1}{x}=\frac{R_2-R_1}{l}$; zatem

$$r=\frac{R_2-R_1}{l}x+R_1.$$

Moment bezwładności krążka o grubości Δx wynosi

$$\Delta B=\left[2\pi\mu\int_0^{(R_2-R_1)x/l+R_1}r^3\,dr\right]\Delta x,$$

a stąd moment bezwładności całego wału jest równy

$$B=2\pi\mu\int_0^l\left(\int_0^{(R_2-R_1)x/l+R_1}r^3\,dr\right)dx=2\pi\mu\int_0^l\frac{1}{4}\left(\frac{R_2-R_1}{l}x+R_1\right)^4dx=$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\mu\left[\frac{l}{R_2-R_1}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{R_2-R_1}{l}x+R_1\right)^5\right]_0^l=\tfrac{1}{10}\pi\mu\frac{l}{R_2-R_1}(R_2^5-R_1^5)=$$

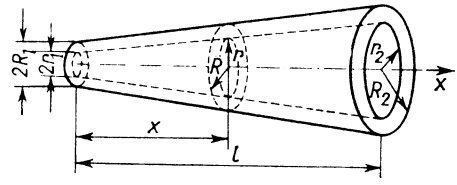
$$=\tfrac{1}{10}\pi\mu l(R_2^4+R_2^3R_1+R_2^2R_1^2+R_2R_1^3+R_1^4).$$

Zadania

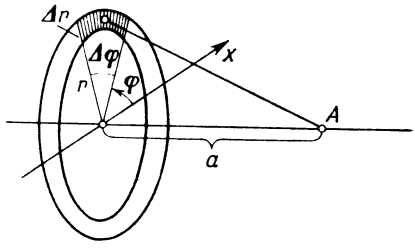
4.79. Na ściankę pionową w kształcie okręgu wywiera parcie woda. Wyznaczyć moment wywołany naciskiem wody na ściankę względem osi pionowej, stycznej do okręgu. Poziom wody w zbiorniku jest taki, że cała ścianka w kształcie okręgu jest zanurzona, a powierzchnia poziomu wody jest płaszczyzną styczną do ścianki okręgu. Promień okręgu wynosi R, a ciężar właściwy wody δ.

4.80. Na ściankę pionową w kształcie trójkąta foremnego ABC wywiera parcie woda. Bok AB jest ustawiony pionowo, poziom wody sięga wierzchołka A. Wyznaczyć w jakiej odległości d od wierzchołka C należy umieścić oś pionową obrotu, ażeby moment wywołany parciem wody względem tej osi był równy zeru (bok trójkąta przyjmujemy a).

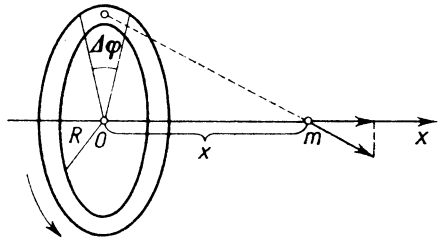
4.81. Wyznaczyć moment bezwładności wału wydrążonego w kształcie stożka ściętego. Długość wału wynosi l, promienie zewnętrzne podstaw stożka R_1 i R_2 $(R_1<R_2)$ oraz promienie podstaw stożka wewnętrznego r_1 i r_2 $(r_1<r_2)$. Gęstość właściwa materiału wynosi μ (rys. 4.21).



Rys. 4.21



Rys. 4.22



Rys. 4.23

4.82. Trójkąt foremny o boku a obraca się dookoła jednego ze swoich boków. Wyznaczyć jego moment bezwładności, jeżeli grubość wynosi b, gęstość zaś właściwa blachy, z której został wycięty trójkąt, jest μ.

4.83. Wyznaczyć natężenie pola elektrostatycznego w punkcie A odległym o a od płaszczyzny naładowanej elektrycznie. Gęstość powierzchniowa ładunku jest stała w każdym punkcie płaszczyzny i wynosi ω, $\Delta q=\omega r\Delta r\Delta\varphi$ (rys. 4.22).

4.84. Wyznaczyć pracę L, którą trzeba wykonać, aby przeprowadzić masę magnetyczną m wzdłuż osi Ox od $-\infty$ do $+\infty$. Oś Ox jest osią symetrii zwoju w kształcie okręgu o promieniu R. Natężenie prądu stałego płynącego w zwoju wynosi i (rys. 4.23).

Rozdział V

CAŁKI POTRÓJNE

§ 5.1. ZBIORY PUNKTÓW W PRZESTRZENI

Kulą otwartą o środku w punkcie M_0 i promieniu $R (R>0)$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów M, których odległość ρ od M_0 jest mniejsza od R; *kulą domkniętą* nazywamy analogiczny zbiór, z tym że ρ może być mniejsze lub równe R. *Otoczeniem punktu A* nazywamy każdą kulę otwartą o środku w punkcie A. Zbiór nazywamy *zbiorem ograniczonym*, jeżeli jest zawarty w pewnej kuli.

Określenie punktu wewnętrznego, zewnętrznego i brzegowego zbioru, wnętrza i brzegu zbioru, obszaru i obszaru domkniętego jest sformułowane identycznie jak dla zbiorów płaskich (por. § 1.2).

Jeżeli chodzi o jednospójność obszaru przestrzennego, to rozróżniamy dwa rodzaje jednospójności: jednospójność przestrzenną i jednospójność powierzchniową. Obszar przestrzenny V nazywamy *obszarem jednospójnym przestrzennie*, jeżeli każdy zbiór przestrzenny ograniczony, którego cały brzeg należy do V, jest zawarty w V. Obszar przestrzenny V nazywamy *obszarem jednospójnym powierzchniowo*, jeżeli każda krzywa zamknięta (bez punktów wielokrotnych) leżąca całkowicie wewnątrz V jest brzegiem pewnej powierzchni zawartej całkowicie w V, co jest równoważne temu, że taką krzywą zamkniętą można ściągnąć do jednego punktu, nie wychodząc z obszaru V. Podane definicje jednospójności nie są równoważne, np. torus lub przestrzeń po usunięciu nieskończenie długiego walca są jednospójne przestrzennie, a nie są jednospójne powierzchniowo, natomiast pierścień kulisty (tj. zbiór ograniczony przez powierzchnie dwóch kul współśrodkowych) względnie przestrzeń po usunięciu kuli są jednospójne powierzchniowo, natomiast nie są jednospójne przestrzennie.

Obszarem regularnym nazywamy obszar ograniczony, którego brzeg daje się podzielić na skończoną ilość powierzchni o równaniach [1]

$$z=z(x,y) \quad \text{bądź} \quad y=y(z,x), \quad \text{bądź} \quad x=x(y,z), \tag{5.1.1}$$

przy czym rzuty tych powierzchni na odpowiednie płaszczyzny współrzędnych są obszarami płaskimi regularnymi.

Obszarem normalnym względem płaszczyzny Oxy nazywamy zbiór Ω wszystkich punktów $M(x,y,z)$ takich, że rzuty ich $M^*(x,y)$ na płaszczyznę Oxy należą do pewnego ustalonego

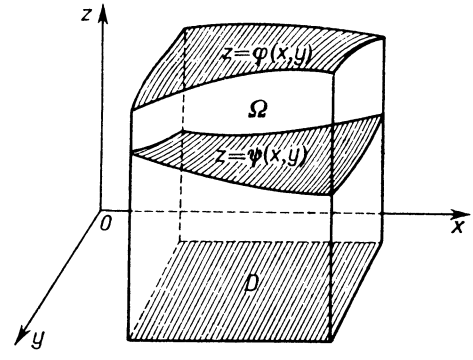
---

[1] Funkcje określające powierzchnię są ciągłe.

domkniętego obszaru regularnego płaskiego D, a współrzędna z spełnia nierówność

$$\psi(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi(x, y), \tag{5.1.2}$$

przy czym funkcje $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ są ciągłe w D oraz $\psi(x, y) < \varphi(x, y)$ we wnętrzu D (rys. 5.1). Z podanej definicji wynika, że prosta równoległa do osi Oz, przechodząca przez dowolny punkt wewnętrzny obszaru normalnego względem płaszczyzny Oxy, przebija brzeg tego obszaru dokładnie w dwóch punktach.



Rys. 5.1

Analogicznie określamy *obszary normalne względem płaszczyzny Oyz* oraz *obszary normalne względem płaszczyzny Ozx*.

Na przykład kula jest obszarem normalnym względem każdej z płaszczyzn współrzędnych.

Obszar normalny jest, jak wynika z definicji, domkniętym obszarem regularnym. Obszar normalny jest jednospójny powierzchniowo i przestrzennie.

§ 5.2. CAŁKA POTRÓJNA

Niech Ω będzie obszarem regularnym lub domkniętym obszarem regularnym, a $f(x, y, z)$ funkcją ograniczoną w Ω. Oznaczmy przez A punkt o współrzędnych (x, y, z). Będziemy oznaczali funkcję $f(x, y, z)$ krótko przez $f(A)$ (por. § 1.4). Niech P będzie dowolnym prostopadłościanem (o ścianach równoległych do płaszczyzn współrzędnych) zawierającym Ω. Niech π_n oznacza dowolny rozkład prostopadłościanu na skończoną liczbę $\bar{m}_n$ prostopadłościanów częściowych, z których m_n: $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \ldots, P_{m_n}^{(n)}$ zawierają punkty obszaru Ω. Oznaczamy przez $v_i^{(n)}$ objętość prostopadłościanu $P_i^{(n)}$, a przez δ_n największą z krawędzi prostopadłościanów $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, \ldots, P_{m_n}^{(n)}$. Niech $A_i^{(n)}$ oznacza dowolny punkt obszaru Ω należący do prostopadłościanu $P_i^{(n)}$. Oznaczmy teraz przez s_n następującą sumę:

$$s_n = \sum_{i=1}^{m_n} f(A_i^{(n)}) v_i^{(n)}. \tag{5.2.1}$$

Jeżeli dla każdego ciągu podziałów $\{\pi_n\}$, dla którego $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$, ciąg (5.2.1) jest zbieżny do tej samej liczby bez względu na wybór punktów $A_i^{(n)}$, to mówimy, że funkcja $f(x,y,z)$ jest *całkowalna w obszarze* Ω, a wspólną granicę ciągów (5.2.1) nazywamy *całką potrójną funkcji* $f(x,y,z)$ *w obszarze* Ω i oznaczamy symbolem

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv \quad \text{lub} \quad \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz. \tag{5.2.2}$$

Łatwo wykazać, że całkowalność funkcji $f(x,y,z)$ w obszarze Ω i wartość całki nie zależy od wyboru prostopadłościanu P (byleby tylko obejmował on obszar Ω). Można wykazać, że *każda funkcja ciągła w obszarze regularnym* Ω *jest w nim całkowalna*, a nawet że *funkcja* $f(x,y,z)$ *ciągła w obszarze regularnym* Ω *z wyjątkiem punktów leżących na skończonej ilości powierzchni o równaniach postaci* (5.1.1) *jest całkowalna w* Ω. Stale jednak obowiązuje założenie, że funkcja $f(x,y,z)$ jest ograniczona w całym obszarze Ω.

Całki potrójne mają wszystkie analogiczne własności do własności całek podwójnych, które zostały podane w § 4.2 (por. (4.2.1) - (4.2.6)).

Uwaga. Tak jak w przypadku całki podwójnej (por. § 4.1), można wykazać, że jeśli Ω jest domknięciem obszaru Ω, to

$$\iiint_{\bar{\Omega}} f(x,y,z)\,dv = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv. \tag{5.2.3}$$

Jeżeli $f(x,y,z)\equiv 1$, to

$$|\Omega| = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv, \tag{5.2.4}$$

gdzie $|\Omega|$ oznacza objętość obszaru Ω.

Całka potrójna ma następującą interpretację. Jeżeli obszar normalny Ω jest wyznaczony przez punkty pewnego ciała C, a funkcja ciągła $f(x,y,z)$ oznacza gęstość punktową ciała C, to całka $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv$ przedstawia masę ciała C.

§ 5.3. ZAMIANA CAŁKI POTRÓJNEJ NA ITEROWANĄ

Będziemy stale zakładali, że występujące funkcje są ciągłe w rozpatrywanych obszarach. Wówczas:

Jeżeli Ω jest obszarem normalnym względem płaszczyzny Oxy określonym jak w § 5.1 (por. też rys. 5.1), to

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \iint_{D}\Big(\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big)\,d\sigma. \tag{5.3.1}$$

Jeżeli obszar płaski D jest również normalny, np. względem osi Ox, i jest określony nierównościami:

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad h(x)\leqslant y\leqslant k(x), \tag{5.3.2}$$

to

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \int_a^b\Big[\int_{h(x)}^{k(x)}\Big(\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big)\,dy\Big]\,dx. \tag{5.3.3}$$

Co notujemy również czasem (dla uniknięcia pisania nawiasów) w następujący sposób:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv = \int_a^b dx \int_{h(x)}^{k(x)} dy \int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \tag{5.3.4}$$

Jeżeli Ω jest prostopadłościanem określonym nierównościami

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d, \quad e \leqslant z \leqslant f, \tag{5.3.5}$$

to

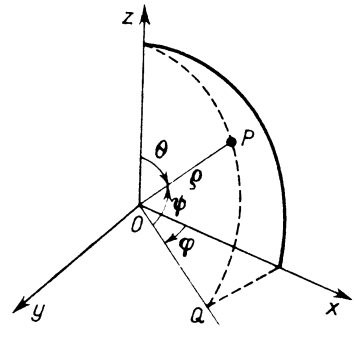
$$\iiint_{\Omega} g(x,y,z)\,dv = \int_a^b \Big[\int_c^d \Big(\int_e^f g(x,y,z)\,dz\Big)dy\Big]dx, \tag{5.3.6}$$

a jeżeli ponadto funkcja $g(x,y,z)=\varphi(x)\psi(y)\kappa(z)$, to całka potrójna równa się iloczynowi trzech całek pojedynczych, tzn.

$$\iiint_{\Omega} \varphi(x)\psi(y)\kappa(z)\,dv = \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_c^d \psi(y)\,dy \int_e^f \kappa(z)\,dz. \tag{5.3.7}$$

§ 5.4. ZAMIANA WSPÓŁRZĘDNYCH PROSTOKĄTNYCH NA WSPÓŁRZĘDNE SFERYCZNE I WALCOWE

W przypadku zamiany zmiennych w całce potrójnej zachodzi twierdzenie analogiczne do twierdzenia dotyczącego zamiany zmiennych w całce podwójnej (por. § 4.4), a także ogólne twierdzenie dotyczące przekształceń podane w § 2.5. W bieżącym paragrafie zajmiemy się szczególnym przypadkiem zamiany zmiennych prostokątnych na zmienne sferyczne lub zmienne walcowe.



Rys. 5.2

W § 2.5 podaliśmy, że związek między współrzędnymi prostokątnymi x, y, z a *współrzędnymi sferycznymi* ρ, θ, φ (rys. 5.2) określają wzory

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z=\rho\cos\theta, \tag{5.4.1}$$

przy czym jakobian przekształcenia (5.4.1) jest równy

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\sin\theta. \tag{5.4.2}$$

Uwaga. Niekiedy *współrzędne sferyczne* określa się za pomocą wzorów

$$x=\rho\cos\psi\cos\varphi,\quad y=\rho\cos\psi\sin\varphi,\quad z=\rho\sin\psi, \tag{5.4.1'}$$

wówczas jakobian tego przekształcenia jest równy

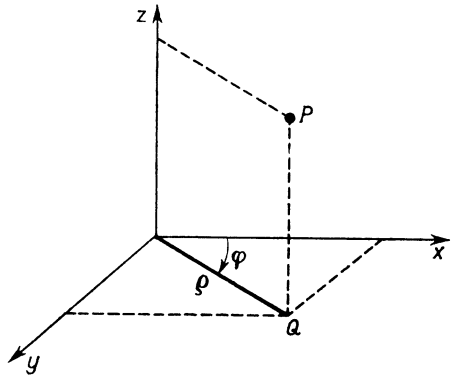
$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\psi,\varphi)}=\rho^2\cos\psi. \tag{5.4.2'}$$

We wzorach (5.4.1) θ oznacza kąt między osią Oz a promieniem wodzącym OP punktu $P(x,y,z)$, natomiast we wzorach (5.4.1') ψ oznacza kąt między płaszczyzną Oxy a promieniem wodzącym OP (rys. 5.2), zmienia się więc od $-\frac{1}{2}\pi$ do $\frac{1}{2}\pi$.

Niech przekształcenie (5.4.1) odwzorowuje obszar regularny Ω w przestrzeni (ρ,θ,φ) na obszar regularny V w przestrzeni (x,y,z) w sposób wzajemnie jednoznaczny, a $f(x,y,z)$ niech będzie funkcją ciągłą w obszarze V. Wówczas zachodzi następujący wzór:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_\Omega f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho d\theta d\varphi. \tag{5.4.3}$$

na *zamianę zmiennych prostokątnych na sferyczne w całce potrójnej.*



Rys. 5.3

Również w § 2.5 podaliśmy następujące wzory na związek między współrzędnymi prostokątnymi x,y,z a *współrzędnymi walcowymi* ρ,φ,z (rys. 5.3):

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z \tag{5.4.4}$$

(tzn. współrzędna z pozostaje bez zmiany), przy czym jakobian tego przekształcenia jest równy ρ. Jeżeli są spełnione podane wyżej warunki, to zachodzi następujący wzór:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_\Omega f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho\,d\rho d\varphi dz, \tag{5.4.5}$$

na *zamianę zmiennych prostokątnych na walcowe w całce potrójnej.*

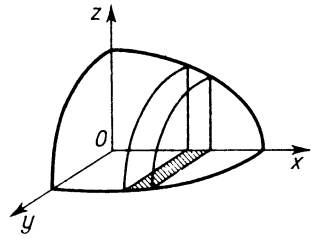
Wzory (5.4.3) i (5.4.5) wykorzystamy w zadaniach.

§ 5.5. OBLICZANIE CAŁKI POTRÓJNEJ

ZADANIE 5.1. Obliczyć za pomocą całki potrójnej objętość V_e elipsoidy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>0,\ b>0,\ c>0). \tag{1}$$

Rozwiązanie. Z teorii wiemy, że jeżeli pod znakiem całki potrójnej znajduje się funkcja podcałkowa $f(x, y, z)\equiv 1$, to całka równa się objętości $|V|$ obszaru całkowania V (por. wzór (5.2.4)).



Rys. 5.4

Obliczymy $\frac{1}{8}$ objętości elipsoidy, jak na rysunku 5.4. Będzie to całka

$$|V|=\iiint_V dxdydz \tag{2}$$

rozciągnięta na obszar całkowania V określony wzorami

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \quad z\geqslant 0. \tag{3}$$

Jeżeli całkować będziemy najpierw względem zmiennej z, to zmiennymi granicami całkowania są $z=0$ i $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. Mamy

$$|V|=\iint_D \left(\int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dz\right)dxdy, \tag{4}$$

gdzie obszar całkowania D jest określony wzorami

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0. \tag{5}$$

Dalej wyznaczamy granice jak przy całce podwójnej.

Granicami całkowania względem zmiennej y są $y=0$ i $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Ostatnie całkowanie względem zmiennej x będzie w granicach stałych od $x=0$ do $x=a$. Otrzymujemy

$$|V|=\int_0^a \left[\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \left(\int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dz\right)dy\right]dx, \tag{6}$$

co zapisujemy także prościej:

$$|V| = \int_0^a dx \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dz. \tag{7}$$

Wewnętrzną całkę otrzymujemy natychmiast; wynosi ona

$$c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}. \tag{8}$$

Całka względem y jest teraz postaci

$$c\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{c}{b}\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy. \tag{9}$$

Korzystając ze wzoru (por. I, § 17.2, wzór (17.2.6)):

$$\int \sqrt{k^2-u^2}\,du = \tfrac{1}{2}u\sqrt{k^2-u^2} + \tfrac{1}{2}k^2 \arcsin\frac{u}{k} \quad (k>0), \tag{*}$$

w którym przyjmujemy $k^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, $u=y$, otrzymujemy

$$\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy =$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}y\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2} + \tfrac{1}{2}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\arcsin\frac{y}{\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\right]_{y=0}^{y=b\sqrt{1-x^2/a^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{\pi b^2}{4a^2}(a^2-x^2).$$

Pamiętając o czynniku $\frac{c}{b}$ przed całką w równości (9), mamy teraz

$$|V| = \tfrac{1}{4}\pi bc\int_0^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{\pi bc}{4a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{\pi abc}{6}. \tag{10}$$

Ponieważ objętość V_e całej elipsoidy wynosi $8|V|$, więc $V_e = \frac{4}{3}\pi abc$.

W przypadku gdy $a=b=c=R$, otrzymujemy znane wyrażenie na objętość kuli $V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Uwaga. W warunkach zadania zaznaczone było, by objętość elipsoidy obliczyć za pomocą całki potrójnej; tak zadanie zostało rozwiązane. Moglibyśmy również obliczyć tę objętość za pomocą całki podwójnej; wówczas funkcją podcałkową byłaby zmienna z

obliczona z równania powierzchni elipsoidy, tzn. funkcją

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

A więc $\frac{1}{8}$ objętości wyraziłaby się wzorem

$$\frac{1}{8}V=c\int_0^a\left(\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right)dx,$$

którego prawa strona jest identyczna z wynikiem otrzymanym po scałkowaniu względem zmiennej z w całce potrójnej (6).

ZADANIE 5.2. Znaleźć masę M prostopadłościanu $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$, wiedząc, że gęstość w punkcie (x,y,z) wynosi $\rho(x,y,z)=x+y+z$.

Rozwiązanie. Z interpretacji całki potrójnej wiemy, że masa $M=\iiint_V \rho(x,y,z)\,dv$. W naszym przypadku

$$M=\iiint_V (x+y+z)\,dxdydz,$$

gdzie obszar całkowania V określony jest nierównościami $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$. Wobec tego

$$M=\int_0^a\left[\int_0^b\left(\int_0^c (x+y+z)\,dz\right)dy\right]dx.$$

Obliczamy najpierw całkę wewnętrzną (względem z):

$$\int_0^c (x+y+z)\,dz=\left[xz+yz+\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^c=xc+yc+\tfrac{1}{2}c^2;$$

z kolei obliczamy całkę względem y:

$$\int_0^b (xc+yc+\tfrac{1}{2}c^2)\,dy=\left[cxy+\tfrac{1}{2}cy^2+\tfrac{1}{2}c^2y\right]_0^b=bcx+\tfrac{1}{2}cb^2+\tfrac{1}{2}c^2b;$$

wreszcie obliczamy całkę względem x:

$$\int_0^a (bcx+\tfrac{1}{2}cb^2+\tfrac{1}{2}c^2b)\,dx=\left[\tfrac{1}{2}bcx^2+\tfrac{1}{2}cb^2x+\tfrac{1}{2}c^2bx\right]_0^a=$$

$$=\tfrac{1}{2}bca^2+\tfrac{1}{2}cb^2a+\tfrac{1}{2}c^2ba=\tfrac{1}{2}abc(a+b+c).$$

A zatem masa prostopadłościanu jest równa $M=\frac{1}{2}abc(a+b+c)$.

ZADANIE 5.3. Obliczyć całkę $\iiint x\,dv$ rozciągniętą na obszar V ograniczony płaszczyznami współrzędnych oraz płaszczyzną $2x+2y+z-2=0$ (rys. 5.5).

Rozwiązanie. Wykonując całkowanie względem zmiennej z przekształcimy daną całkę potrójną na całkę podwójną rozciągniętą na obszar D w płaszczyźnie Oxy z całki pojedynczej względem zmiennej z. Granicą dolną całkowania względem z jest 0, granicą

górną jest $z=2-2x-2y$. Mamy

$$\iiint_V x\,dv=\iint_D\Big(\int_0^{2-2x-2y} x\,dz\Big)d\sigma,$$

gdzie D jest polem ograniczonym osiami współrzędnych i śladem płaszczyzny $2x+2y+z-2=0$ na płaszczyźnie Oxy, czyli prostą o równaniu $2x+2y-2=0$, lub po przekształceniu $y=1-x$.

Obliczamy

$$\iiint_V x\,dv=\iint_D\Big(x\int_0^{2-2x-2y}dz\Big)d\sigma=\iint_D x(2-2x-2y)\,d\sigma=\iint_D(2x-2x^2-2xy)\,d\sigma=$$

$$=\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}(2x-2x^2-2xy)\,dy\Big)dx=\int_0^1[2xy-2x^2y-xy^2]_{y=0}^{y=1-x}dx=$$

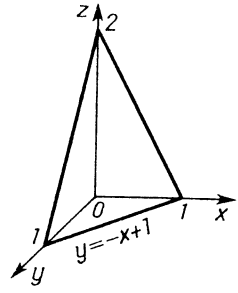
$$=\int_0^1\big(2x(1-x)-2x^2(1-x)-x(1-x)^2\big)dx=\int_0^1(x^3-2x^2+x)\,dx=$$

$$=\Big[\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1=\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{12}.$$

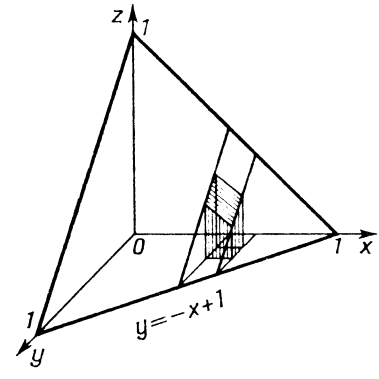
ZADANIE 5.4. Obliczyć całkę

$$\iiint_V\frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$

w obszarze V zawartym między płaszczyznami współrzędnych i płaszczyzną $x+y+z=1$ (rys. 5.6).



Rys. 5.5



Rys. 5.6

Rozwiązanie. Ponieważ żadna ze zmiennych nie wyróżnia się od pozostałych, kolejność całkowania jest dowolna. Z warunków zadania wnioskujemy, że w podanym obszarze jest $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $x+y+z\leqslant 1$.

Jeżeli całkować będziemy najpierw względem zmiennej z, to granicami całkowania będą $z=0$ i $z=1-x-y$ (patrz rysunek); przy drugim całkowaniu względem y granicami całkowania będą $y=0$ i $y=1-x$; przy całkowaniu ostatnim względem x granicami stałymi będą $x=0$ i $x=1$.

W ten sposób otrzymujemy

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} \right) dy \right] dx .$$

Obliczmy oddzielnie wewnętrzną całkę

$$\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \left[\frac{-1}{2(x+y+z+1)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(x+y+1)^2} .$$

Po wyniesieniu $\frac{1}{2}$ przed nawias obliczamy z kolei całkę względem y:

$$\frac{1}{2} \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{(x+y+1)^2} - \frac{1}{4} \right) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{x+y+1} - \frac{y}{4} \right]_0^{1-x} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1-x}{4} + \frac{1}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{1+x} \right).$$

Na koniec obliczamy ostatnią całkę

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{3}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{3x}{4} + \frac{x^2}{8} + \ln(1+x) \right]_0^1 = \tfrac{1}{2} \ln 2 - \tfrac{5}{16},$$

co daje wartość podanej w zadaniu całki.

ZADANIE 5.5. Obliczyć całkę potrójną

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz , \tag{1}$$

gdzie obszar V ograniczony jest powierzchnią $x^2+y^2+z^2=z$.

Rozwiązanie. Równanie powierzchni zapisujemy w postaci

$$x^2+y^2+(z-\tfrac{1}{2})^2=(\tfrac{1}{2})^2 , \tag{2}$$

z której wnioskujemy, że jest to powierzchnia kulista (sfera) o środku w punkcie $A(0, 0, \frac{1}{2})$ i promieniu $r=\frac{1}{2}$ (rys. 5.7).

Postać funkcji podcałkowej w całce (1) oraz równanie (2) wskazują, że wyraźnym ułatwieniem będzie tutaj zamiana zmiennych prostokątnych x, y, z na współrzędne sferyczne ρ, φ, θ według wzorów (5.4.1). Ponieważ w tym przypadku otrzymujemy $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho > 0$ i ponieważ jakobian tego przekształcenia jest równy $\rho^2 \sin\theta$ (por. wzór (5.4.2)) całka (1) na podstawie wzoru (5.4.3) przyjmuje postać

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz = \iiint_\Omega \rho^3 \sin\theta \, d\rho d\theta d\varphi . \tag{3}$$

Należy jeszcze ustalić granice całkowania. Przy dowolnym φ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ oraz dowolnym θ $(0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi)$ dla punktów obszaru V opisanego nierównością

$$x^2+y^2+(z-\tfrac{1}{2})^2\leqslant\tfrac{1}{4} \tag{4}$$

ρ (np. $\rho=OD$ dla punktu D) zmienia się w granicach $0\leqslant\rho\leqslant OC$. Ponieważ $OC=OB\cos\theta=\cos\theta$ (średnica kuli wynosi 1), więc ρ zmienia się w przedziale $0\leqslant\rho\leqslant\cos\theta$.

Dla pozostałych zmiennych mamy $0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, przy czym kolejność całkowania względem nich może być dowolna ze względu na obie stałe granice każdej z tych zmiennych. Mamy więc

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\int_0^{2\pi}\Big[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big(\int_0^{\cos\theta}\rho^3\sin\theta\,d\rho\Big)d\theta\Big]d\varphi. \tag{5}$$

Kolejno otrzymujemy

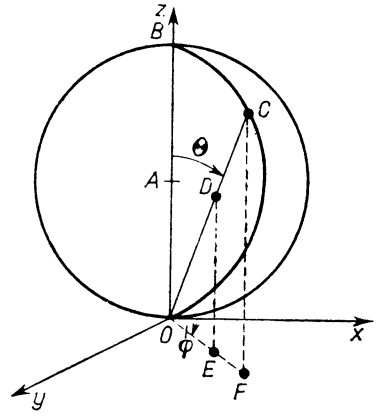
$$\int_0^{2\pi}\Big[\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Big(\int_0^{\cos\theta}\rho^3\sin\theta\,d\rho\Big)d\theta\Big]d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\tfrac{1}{4}\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta\Big)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big[-\tfrac{1}{20}\cos^5\theta\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi}d\varphi=\tfrac{1}{20}\int_0^{2\pi}d\varphi=\tfrac{1}{10}\pi.$$

Zatem

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=\tfrac{1}{10}\pi.$$



Rys. 5.7

ZADANIE 5.6. Obliczyć całkę potrójną

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz, \tag{1}$$

w której obszar V ograniczony jest powierzchniami $x^2+y^2=z^2$, $z=1$.

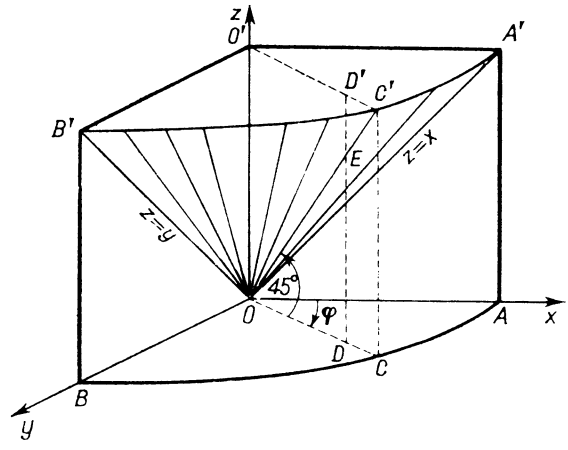
Rozwiązanie. Równanie $x^2+y^2=z^2$ przedstawia powierzchnię stożkową kołową (dla każdej wartości $z=c\neq 0$ przekrój płaszczyzną $z=c$ jest okręgiem); tworzące jej leżące w płaszczyźnie Oxz mają równania $z=x$ oraz $z=-x$, są więc dwusiecznymi kątów pomiędzy osiami współrzędnych Ox i Oz, analogicznie tworzące leżące na płaszczyźnie Ozy mają równania $z=y$ oraz $z=-y$.

Na rysunku 5.8 jest zaznaczony obszar V w pierwszej ósemce układu współrzędnych, tzn. dla $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

Zarówno z postaci funkcji podcałkowej jak i równania pierwszej z powierzchni ograniczającej wnosimy o celowości dokonania zamiany zmiennych prostokątnych na zmienne walcowe za pomocą wzorów (5.4.4). Ponieważ jakobian tego przekształcenia jest równy ρ, całka (1) przyjmuje postać

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz=\iiint_\Omega \rho^2 d\rho d\varphi dz. \tag{2}$$

Należy jeszcze wyznaczyć granice całkowania. Jeśli pierwszego całkowania dokonamy względem zmiennej z, to przy dowolnym kącie φ ($\sphericalangle AOD$ na rys. 5.8) oraz dowolnym ρ (OD na rys. 5.8), gdzie $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ oraz $0 \leqslant \rho \leqslant OC = DA = OO' = 1$, z rysunku wnioskujemy, że $DE \leqslant z \leqslant DD'$. Ponieważ jednak $DE = OD = \rho$, $DD' = OD' = 1$, zatem $\rho \leqslant z \leqslant 1$.



Rys. 5.8

Dla pozostałych zmiennych mamy $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, przy czym kolejność całkowania może być tu dowolna, gdyż obie granice zmienności każdej z tych zmiennych są stałe. Wzór (2) przyjmuje więc postać

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\Big[\int_0^1\Big(\int_\rho^1 \rho^2 dz\Big)d\rho\Big]d\varphi .$$

Kolejno otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi}\Big[\int_0^1\Big(\int_\rho^1 \rho^2 dz\Big)d\rho\Big]d\varphi = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 [\rho^2 z]_\rho^1 d\rho\Big)d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big[\int_0^1 (\rho^2-\rho^3)\,d\rho\Big]d\varphi = \int_0^{2\pi}\Big[\tfrac{1}{3}\rho^3 - \tfrac{1}{4}\rho^4\Big]_0^1 d\varphi = \tfrac{1}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi = \tfrac{1}{6}\pi .$$

Ostatecznie więc

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \tfrac{1}{6}\pi .$$

Zadania

5.7. Obliczyć całkę $\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^2}$ w obszarze całkowania V, określonym warunkami $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x+y+z \leqslant 1$.

5.8. Obliczyć całkę $\int_1^a\int_1^a\int_1^a\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)dxdydz$, $a>1$.

5.9. Obliczyć całkę $\iiint_V (x\cos\alpha\cos\beta+y\cos\alpha\sin\beta+z\sin\alpha)\,dxdydz$, gdzie V jest wnętrzem kuli $x^2+y^2+z^2=1$.

5.10. $\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{3}\frac{1}{5}(4x^2+4xy+y^2-8x-4y+1)\,dzdydx$.

5.11. $\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\int_{z=0}^{c}xydxdydz$.

5.12. $\int_{x=0}^{2\pi}\int_{y=0}^{b}\int_{z=-\frac{1}{4}a}^{\frac{1}{4}a}y^2z\cos x\,dxdydz$.

5.13. $\int_{t=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{b}r^3drdtdz$.

5.14. $\int_{t=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{b}z^2r\,drdtdz$.

5.15. $\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{4}z^2dxdydz$.

5.16. $\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}\int_{z=-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\,dzd\rho d\varphi$.

5.17. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z^2dz$.

5.18. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$.

5.19. Znaleźć masę części kuli o promieniu R znajdującej się w pierwszej ósemce układu współrzędnych, jeżeli gęstość tej bryły jest w każdym jej punkcie równa odległości tego punktu od płaszczyzny Oxy.

5.20. Znaleźć masę części kuli o promieniu c leżącej w pierwszej ósemce układu współrzędnych i ograniczonej powierzchnią $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a\leqslant c,\ b\leqslant c)$, wiedząc, że jej gęstość w każdym punkcie (x, y, z) wynosi $\rho(x, y, z)=z$.

5.21. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyzną Oxy, powierzchnią walcową $x^2+y^2=r^2$ i paraboloidą hiperboliczną o równaniu $z=\frac{x^2}{2a}-\frac{y^2}{2b}$.

5.22. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią walcową $x^2+(y-\frac{1}{2}a)^2=\frac{1}{4}a^2$ i sferą o równaniu $x^2+y^2+z^2=a^2$.

5.23. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami walcowymi $x^2+(y-\frac{1}{2}a)^2=\frac{1}{4}a^2$ i $y^2+z^2=a^2$.

5.24. Obliczyć objętość bryły ograniczonej dwoma walcami, których osie symetrii przecinają się pod kątem prostym, przy czym oś Oz jest osią symetrii jednego, a oś Oy – osią symetrii drugiego walca. Przyjmujemy, iż oba walce mają ten sam promień a.

Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami (zad. 5.25 - 5.27):

5.25. $2z=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

5.26. $2z=4-x^2-y^2$, $z=2-x-y$, $z=0$, $y=0$, $z=0$.

5.27. $x^2+y^2=9$, $x+y=3$, $x+y=-3$, $x-y=3$, $x-y=-3$.

5.28. Prostopadłościan, którego podstawą na płaszczyźnie Oxy jest kwadrat o wierzchołkach $A(1, 0)$, $B(3, 1)$, $C(2, 3)$, $D(0, 2)$, rozcięto płaszczyzną $\frac{1}{8}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=1$. Obliczyć objętość dolnej części prostopadłościanu.

5.29. Obliczyć objętość bryły ograniczonej płaszczyznami $z=0$, $x+y=a$, $x+y=-a$, $x-y=a$, $x-y=-a$ oraz powierzchnią $a(z-a)=xy$, gdzie $a>0$, $z\geqslant 0$.

5.30. Przyjmując płaszczyznę Oxy za płaszczyznę równika kuli $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(R>0)$, obliczyć objętość warstwy kulistej zawartej między płaszczyznami dwóch równoleżników o szerokościach geograficznych φ_1 i φ_2, gdzie $0<\varphi_1<\varphi_2<90°$.

§ 5.6. CAŁKA POTRÓJNA W ZASTOSOWANIACH TECHNICZNYCH

Poznaliśmy już zastosowania całki potrójnej do obliczania objętości brył (np. zadanie 5.1), masy brył (zadanie 5.2). Obecnie podamy dalsze zastosowania, przy czym przez $\rho(x, y, z)$ oznaczymy gęstość zmieniającą się w sposób ciągły w rozpatrywanych obszarach. W przypadku bryły jednorodnej należy we wszystkich poniższych wzorach przyjąć $\rho(x, y, z)=\text{const}$.

Moment statyczny obszaru przestrzennego i regularnego V odpowiednio *względem płaszczyzny współrzędnych* Oxy, Oyz, Ozx wyraża się wzorami:

$$M_{xy}=\iiint_V z\rho(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$M_{yz}=\iiint_V x\rho(x, y, z)\,dxdydz, \tag{5.6.1}$$

$$M_{zx}=\iiint_V y\rho(x, y, z)\,dxdydz;$$

stąd *współrzędne środka ciężkości* (ξ, η, ζ) tego obszaru V obliczamy ze wzorów

$$\xi=\frac{M_{yz}}{M}, \quad \eta=\frac{M_{zx}}{M}, \quad \zeta=\frac{M_{xy}}{M}, \tag{5.6.2}$$

gdzie M oznacza masę ciała obszaru przestrzennego V (por. zadanie 5.2).

Momenty bezwładności obszaru przestrzennego i regularnego V odpowiednio *względem płaszczyzny współrzędnych* Oxy, Oyz, Oxz wyraża się wzorami

$$I_{xy}=\iiint_V z^2\rho(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$I_{yz}=\iiint_V x^2\rho(x, y, z)\,dxdydz, \tag{5.6.3}$$

$$I_{zx}=\iiint_V y^2\rho(x, y, z)\,dxdydz,$$

momenty bezwładności obszaru V odpowiednio *względem osi współrzędnych* Ox, Oy, Oz – wzorami

$$I_x=\iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

(5.6.4) $$I_y=\iiint_V (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I_z=\iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

a *moment bezwładności obszaru V względem początku układu współrzędnych* — wzorem

(5.6.5) $$I_0=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,dxdydz.$$

ZADANIE 5.31. Wyznaczyć moment bezwładności względem osi Oz elipsoidy jednorodnej.

Rozwiązanie. Równanie elipsoidy

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Korzystamy z trzeciego wzoru (5.6.4).

Ponieważ elipsoida jest z jednorodnego materiału, więc $\rho(x, y, z)=\text{const}$, a dla uproszczenia przyjmiemy $\rho(x, y, z)=1$. Mamy więc

(2) $$I_z=8\int_0^a\Bigg[\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\Bigg(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}(x^2+y^2)\,dz\Bigg)dy\Bigg]dx.$$

Łatwo obliczamy całkę względem z:

(3) $$\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}(x^2+y^2)\,dz=c(x^2+y^2)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Obliczamy całkę względem y:

$$J=c\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}(x^2+y^2)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=$$

$$=\frac{c}{b}\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}(x^2+y^2)\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy=$$

$$=\frac{c}{b}\left[x^2\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy+\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}y^2\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy\right].$$

Pierwszą z całek obliczamy korzystając ze wzoru (*) (str. 147, por. też I, § 17.2); mamy

$$\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy =$$

$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2} + \frac{b^2(a^2-x^2)}{2a^2}\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} =$$

$$= \frac{\pi b^2(a^2-x^2)}{4a^2}.$$

Drugą z całek obliczamy korzystając ze wzoru

$$(**) \qquad \int y^2\sqrt{k^2-y^2}\,dy = \tfrac{1}{8}\,y(2y^2-k^2)\sqrt{k^2-y^2} + \tfrac{1}{8}\,k^4\arcsin\frac{y}{k};$$

otrzymujemy

$$\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y^2\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy =$$

$$= \left[\frac{1}{8}\,y\left[2y^2-b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2} + \frac{b^4(a^2-x^2)^2}{8a^4}\arcsin\frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} =$$

$$= \frac{\pi b^4(a^2-x^2)^2}{16a^4}.$$

Wobec tego

$$(4) \qquad J = \frac{c}{b}\left(\frac{\pi b^2x^2(a^2-x^2)}{4a^2} + \frac{\pi b^4(a^2-x^2)^2}{16a^4}\right) = \pi bc\left(\frac{x^2(a^2-x^2)}{4a^2} + \frac{b^2(a^2-x^2)^2}{16a^4}\right) =$$

$$= \frac{\pi bc}{16a^4}\left((b^2-4a^2)x^4 + 2a^2(2a^2-b^2)x^2 + b^2a^4\right).$$

Obliczamy teraz całkę względem x:

$$(5) \qquad \frac{\pi bc}{16a^4}\int_0^a \left((b^2-4a^2)x^4 + 2a^2(2a^2-b^2)x^2 + b^2a^4\right)dx =$$

$$= \frac{\pi bc}{16a^4}\left[\frac{(b^2-4a^2)x^5}{5} + \frac{2a^2(2a^2-b^2)x^3}{3} + b^2a^4x\right]_0^a =$$

$$=\frac{\pi bc}{16a^4}\left(\frac{(b^2-4a^2)a^5}{5}+\frac{2a^5(2a^2-b^2)}{3}+b^2a^5\right)=\frac{\pi abc}{16}\left(\frac{b^2-4a^2}{5}+\frac{4a^2-2b^2}{3}+b^2\right)=$$

$$=\frac{\pi abc}{16}\cdot\frac{8(a^2+b^2)}{15}=\frac{\pi abc(a^2+b^2)}{30}.$$

Ostatecznie otrzymujemy $I_z=\frac{4}{15}\pi\, abc(a^2+b^2)$.

Zadania

5.32. W półkuli określonej nierównościami $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$, $z\geqslant 0$, gęstość zmienia się proporcjonalnie do odległości punktu od początku układu współrzędnych. Znaleźć współrzędne środka ciężkości tej bryły.

5.33. Wyznaczyć położenie środka ciężkości jednorodnego stożka obrotowego o promieniu podstawy równym a oraz wysokości h.

5.34. Znaleźć współrzędne środka ciężkości bryły ograniczonej paraboloidą $y^2+2z^2=4x$ i płaszczyzną $x=2$.

5.35. Znaleźć współrzędne środka ciężkości bryły jednorodnej ograniczonej powierzchnią kuli o promieniu a, płaszczyzną Oxy i płaszczyznami dwóch południków tworzącymi z płaszczyzną Oxz odpowiednie kąty φ_1, φ_2 $(\varphi_1<\varphi_2<\frac{1}{2}\pi)$.

5.36. Znaleźć moment bezwładności stożka obrotowego o wysokości h, promieniu podstawy a, gęstości ρ, względem średnicy podstawy.

5.37. Wyznaczyć moment bezwładności walca obrotowego o wysokości h, promieniu podstawy a, względem osi będącej średnicą podstawy walca.

5.38. Obliczyć współrzędne środka ciężkości bryły V określonej warunkami $y^2\leqslant 4x$, $2x+y+z\leqslant 4$, $z\geqslant 0$.

5.39. Obliczyć współrzędne środka ciężkości bryły V określonej warunkami $z\geqslant y^2$, $x\geqslant 0$, $2x+3y<3$, $z\leqslant 1$.

5.40. Obliczyć momenty statyczne względem płaszczyzn Oxz i Oxy oraz środek ciężkości bryły ograniczonej półsferą $z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$ i walcem $x^2+(y-\frac{1}{2}a)^2=\frac{1}{4}a^2$.

Rozdział VI

CAŁKI KRZYWOLINIOWE I POWIERZCHNIOWE

§ 6.1. ŁUKI I KRZYWE GŁADKIE

Linię daną równaniami parametrycznymi

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{6.1.1}$$

nazywamy *łukiem gładkim* (*łukiem regularnym*), jeżeli:

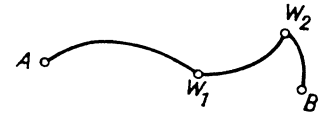
a) dla różnych t otrzymujemy różne punkty łuku, tzn. równości $x(t_1)=x(t_2)$ oraz $y(t_1)=y(t_2)$ pociągają za sobą równość $t_1=t_2$,

b) pochodne $x'(t)$ i $y'(t)$ są ciągłe,

c) pochodne $x'(t)$ i $y'(t)$ w żadnym punkcie nie są jednocześnie równe zeru, tj. $(x'(t))^2+(y'(t))^2\neq 0$.

Geometrycznie oznacza to, że linia nie ma *punktów wielokrotnych* (tzn. takich, że $M_{t_1}\equiv M_{t_2}$ dla $t_1\neq t_2$) oraz że w każdym jej punkcie istnieje styczna, która zmienia się w sposób ciągły przy zmianie punktu styczności (rys. 6.1).

Rys. 6.1



Rys. 6.2

Oznaczmy dla wygody $x(t)$ przez x_t, $y(t)$ – przez y_t, a punkt o współrzędnych (x_t, y_t) przez M_t. *Początkiem łuku* (6.1.1) będziemy nazywali punkt M_α, *końcem łuku* – punkt M_β, a *kierunkiem na łuku* kierunek od początku do końca łuku. Dla wygody zapisu początek łuku będziemy dalej oznaczali literą A, a koniec literą B, a sam łuk $\overset{\frown}{AB}$.

Linię $\overset{\frown}{AB}$ daną za pomocą równań (6.1.1) nazywamy *krzywą regularną* (*krzywą częściami gładką*), jeżeli:

a) daje się podzielić na skończoną liczbę łuków gładkich $\overset{\frown}{AW}_1$, $\overset{\frown}{W_1W_2}$, ..., $\overset{\frown}{W_kB}$,

b) funkcje $x(t)$ i $y(t)$ są ciągłe w całym przedziale,

c) punktów wielokrotnych jest tylko ilość skończona (rys. 6.2).

Analogicznie definiujemy pojęcie *łuku gładkiego* (*łuku regularnego*)

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{6.1.2}$$

w przestrzeni oraz *krzywej regularnej* (*krzywej częściami gładkiej*) w przestrzeni.

§ 6.2. CAŁKA KRZYWOLINIOWA PŁASKA SKIEROWANA

Niech dany będzie łuk gładki $\overset{\frown}{AB}$ określony równaniami (6.1.1) i niech na tym łuku będą określone funkcje ciągłe $P(x,y)$ i $Q(x,y)$. Rozważmy ciąg podziałów odcinka $\langle\alpha,\beta\rangle$. Niech $t_i^{(n)}$, gdzie $i=0,1,2,\ldots,m_n$, będą punktami dzielącymi przy n-tym podziale, przy czym $t_0^{(n)}=\alpha$, $t_{m_n}^{(n)}=\beta$. Przez *całkę krzywoliniową płaską skierowaną układu funkcji* $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *wzdłuż łuku* $\overset{\frown}{AB}$ (1)

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \tag{6.2.1}$$

rozumiemy granicę (2)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\left((P(x_{\theta_i},y_{\theta_i})(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})+Q(x_{\theta_i},y_{\theta_i})(y_{t_i}-y_{t_{i-1}})\right), \tag{6.2.2}$$

gdy

a) $\lim\limits_{n\to\infty} m_n=+\infty$, tzn. liczba m_n przedziałów częściowych $\langle t_{i-1},t_i\rangle$ w n-tym podziale odcinka $\langle\alpha,\beta\rangle$ wzrasta nieograniczenie,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{i}(t_i-t_{i-1})=0$, tzn. maksimum długości przedziałów częściowych $\langle t_{i-1},t_i\rangle$ dąży do zera.

W wyrażeniu (6.2.2) θ_i oznacza dowolną liczbę z przedziału $\langle t_{i-1},t_i\rangle$, a t_0 oznacza α.

Przy zrobionych założeniach można wykazać, że:

1° granica (6.2.2) zawsze istnieje,

2° wartość granicy (6.2.2) nie zależy ani od sposobu dzielenia przedziału $\langle\alpha,\beta\rangle$, ani od sposobu wyboru punktów θ_i, byleby tylko były spełnione warunki a) i b),

3° całkę (6.2.1) można obliczyć za pomocą całki oznaczonej:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{\alpha}^{\beta}\left(P(x_t,y_t)x_t'+Q(x_t,y_t)y_t'\right)dt. \tag{6.2.3}$$

Zauważmy, że funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ można traktować jako funkcje punktu M łuku $\overset{\frown}{AB}$, tzn.

$$P(M)=P(x,y),\qquad Q(M)=Q(x,y).$$

Całka krzywoliniowa płaska skierowana ma następujący sens fizyczny:

Jeżeli $P(x,y)$, $Q(x,y)$ oznaczają składowe skalarne wzdłuż osi współrzędnych wektora siły $\boldsymbol{F}(P,Q)$ działającej w punkcie (x,y) linii AB, to całka (6.2.3) jest równa pracy tej siły $\boldsymbol{F}$ wzdłuż drogi AB. Podziałowi przedziału $\langle\alpha,\beta\rangle$ punktami t_i odpowiada podział łuku $\overset{\frown}{AB}$ punktami $M_{t_i}=W_i$, liczbom θ_i – punkty $M_{\theta_i}=M_i$. Wówczas wyrażenie (6.2.2) możemy napisać w postaci

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\left(P(M_i)\Delta x_i+Q(M_i)\Delta y_i\right),\quad\text{gdzie}\quad \Delta x_i=x_{t_i}-x_{t_{i-1}},\ \Delta y_i=y_{t_i}-y_{t_{i-1}}. \tag{6.2.4}$$

(1) Czytaj: *całka krzywoliniowa wzdłuż łuku AB* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

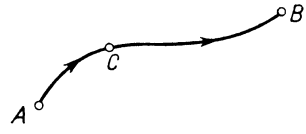
(2) Punkty t_i przy różnych podziałach są na ogół różne, toteż należałoby przy t_i oraz θ_i dać dodatkowy wskaźnik n, który jednak pomijamy ze względu na uproszczenie zapisu.

Wyrażenie (6.2.4) ma sens geometryczny związany z łukiem $\overset{\frown}{AB}$ i jego zwrotem, a nie zależny od przedstawienia parametrycznego tego łuku. Można wykazać, że jeżeli łuk regularny dany równaniami (6.1.1) można przedstawić także równaniami

$$x=x_1(t), \quad y=y_1(t), \quad \gamma \leqslant t \leqslant \delta, \tag{6.2.5}$$

gdzie $x_1(t)$, $y_1(t)$ są funkcjami spełniającymi warunki takie jak funkcje $x(t)$ i $y(t)$, to odpowiednia granica, jaką otrzymamy z granicy (6.2.2) zastępując $x(t)$ przez $x_1(t)$, a $y(t)$ przez $y_1(t)$, równa się granicy (6.2.2), o ile początek i koniec łuku są te same co przy przedstawieniu parametrycznym (6.1.1). Początek i koniec łuku mogą bowiem ulec przestawieniu przy zmianie parametrycznego przedstawienia łuku. Zatem

Całka krzywoliniowa płaska skierowana wzdłuż łuku regularnego zależy od kształtu i położenia łuku oraz kierunku łuku, a nie zależy od sposobu przedstawienia parametrycznego łuku (por. też § 6.7).



Rys. 6.3

Jeżeli łuk $\overset{\frown}{AB}$ dany jest w postaci

$$y=y(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{6.2.6}$$

to istnienie całki krzywoliniowej $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx$ wymaga słabszych założeń; wystarczy mianowicie, by $P(x, y)$ było funkcją ciągłą na łuku $\overset{\frown}{AB}$, funkcja $y(x)$ była ciągła w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ (nie wymaga się natomiast ciągłości pochodnej $y'(x)$) i wtedy

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P\big(x, y(x)\big)\,dx. \tag{6.2.7}$$

Całka krzywoliniowa płaska skierowana ma następujące własności (rys. 6.3):

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}, \tag{6.2.8}$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AC}} + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}}. \tag{6.2.9}$$

Całkę krzywoliniową płaską skierowaną wzdłuż krzywej regularnej L (o początku A i końcu B) określamy jako sumę całek krzywoliniowych płaskich skierowanych wzdłuż łuków gładkich, z których składa się krzywa L:

$$\int\limits_L = \int\limits_{\overset{\frown}{AW_1}} + \int\limits_{\overset{\frown}{W_1W_2}} + \ldots + \int\limits_{\overset{\frown}{W_kB}}. \tag{6.2.10}$$

W szczególności punkt początkowy A może się pokrywać z punktem końcowym B i wtedy mamy *całkę wzdłuż krzywej zamkniętej L*.

ZADANIE 6.1. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane

$$\int_{L_i}(x^2+2xy)\,dx+(y^2-xy)\,dy \quad (i=1,2),\tag{1}$$

gdzie L_1 oznacza odcinek AC, a L_2 łamaną ABC, przy czym podane punkty mają współrzędne: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(2,2)$.

Rozwiązanie. Ponieważ odpowiednie założenia są spełnione, podane całki krzywoliniowe będziemy zamieniali na zwykłe całki oznaczone według wzoru (6.2.3).

Wzdłuż AC mamy $y=x$, $dy=dx$, zatem

$$\int_{L_1}(x^2+2xy)\,dx+(y^2-xy)\,dy=\int_0^2(x^2+2x^2)\,dx=\int_0^2 3x^2dx=8.$$

Wzdłuż AB mamy $y=0$, $dy=0$, a wzdłuż BC mamy $y=2x-2$, $dy=2dx$. Rozbijając więc całkę $\int_{L_2}$ na sumę całek $\int_{AB}+\int_{BC}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\int_{L_1}(x^2+2xy)\,dx+(y^2-xy)\,dy=\\&=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\left[(x^2+2x(2x-2))+2\left((2x-2)^2-x(2x-2)\right)\right]dx=\\&=\tfrac{1}{3}+\int_1^2\left(x^2+2(2x-2)^2\right)dx=\tfrac{16}{3}.\end{aligned}$$

A więc w niniejszym zadaniu $\int_{L_1}\neq\int_{L_2}$.

ZADANIE 6.2. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane

$$\int_{L_i}(x+y)\,dx+y\,dy \quad (i=1,2),$$

gdzie L_1 oznacza łuk $\overset{\frown}{AB}$ cykloidy o równaniach $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, a L_2 odcinek AB, przy czym podane punkty mają współrzędne: $A(0,0)$, $B(2a\pi,0)$.

Rozwiązanie. Zamieniamy całki krzywoliniowe na pojedyncze całki oznaczone. Wzdłuż cykloidy mamy $dx=a(1-\cos t)\,dt$, $dy=a\sin t\,dt$. Jest więc

$$\begin{aligned}&\int_{L_1}(x+y)\,dx+y\,dy=\\&=\int_0^{2\pi}\left[\left(a(t-\sin t)+a(1-\cos t)\right)a(1-\cos t)+a(1-\cos t)\,a\sin t\right]dt=\\&=a^2\int_0^{2\pi}(t-t\cos t+1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=\\&=a^2\left[\tfrac{1}{2}t^2-t\sin t-\cos t+t-2\sin t+\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=2\pi^2a^2+3\pi a^2.\end{aligned}$$

Druga całka

$$\int_{L_2}(x+y)\,dx+y\,dy=\int_0^{2a\pi}x\,dx=2\pi^2a^2.$$

ZADANIE 6.3. Obliczyć całki krzywoliniowe skierowane

$$\int_{L_i} x^2 dy - 2y\,dx \quad (i=1,2),$$

gdzie L_1 oznacza górny półokrąg AB, a L_2 odcinek AB, przy czym podane punkty mają współrzędne: $A(0,0)$, $B(2,0)$.

Rozwiązanie. Całki krzywoliniowe zamieniamy na pojedyncze całki oznaczone. Piszemy równania parametryczne półokręgu AB: $x=1-\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, skąd $dx=\sin\theta\,d\theta$, $dy=\cos\theta\,d\theta$. Wówczas otrzymujemy

$$\int_{L_1} x^2 dy - 2y\,dx = \int_0^{\pi} \left((1-\cos\theta)^2\cos\theta - 2\sin^2\theta\right) d\theta = \int_0^{\pi} (\cos\theta + \cos^3\theta - 2)\,d\theta = -2\pi,$$

gdyż wobec związku $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ jest oczywiste, że

$$\int_0^{\pi} \cos\theta\,d\theta = 0 \quad \text{oraz} \quad \int_0^{\pi} \cos^3\theta\,d\theta = 0.$$

Druga całka krzywoliniowa, jak łatwo zauważyć, równa się zeru:

$$\int_{L_2} x^2 dy - 2y\,dx = 0.$$

ZADANIE 6.4. Dane jest pole sił $P(x,y)=x^3-y$, $Q(x,y)=xy$ (por. str. 159). Wyznaczyć, jaką pracę trzeba wykonać pokonując siły pola wzdłuż drogi łuku paraboli $y^2=8x$ od punktu $A(0,0)$ do punktu $B(2,4)$.

Rozwiązanie. Szukana praca wynosi (str. 159):

$$L = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

gdzie C jest łukiem paraboli $y^2=8x$ dla $0\leqslant x\leqslant 2$ i $0\leqslant y\leqslant 4$; mamy

$$L = \int_C (x^3-y)\,dx + xy\,dy = \int_0^4 \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{512}y^6 - y\right) y\,dy + \tfrac{1}{8}\int_0^4 y^3\,dy =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{512}\cdot\frac{y^8}{8} - \frac{y^3}{3}\right]_0^4 + \frac{1}{8}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{4^8}{4^6} - \frac{4^3}{3}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{4^4}{4}\right) = \frac{20}{3}.$$

Zadania

Obliczyć całki krzywoliniowe płaskie skierowane (zad. 6.5 - 6.10):

6.5. $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, gdzie L jest górną połową elipsy $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

6.6. $\int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2-2xy)\,dx + (2xy+y^2)\,dy$, gdzie $\overset{\frown}{AB}$ jest łukiem paraboli $y^2=x$ od punktu $A(1,1)$ do $B(4,2)$.

6.7. $\int_L (2a-y)dx+xdy$, gdzie L jest pierwszym łukiem cykloidy $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, w kierunku zgodnym ze wzrostem parametru t.

6.8. $\int_L \frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, gdzie L jest czwartą częścią elipsy leżącą w pierwszej ćwiartce, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

6.9. $\int_{\overset{\frown}{AB}} x^2\,dx+\sqrt{xy}\,dy$, gdzie $\overset{\frown}{AB}$ jest częścią okręgu zawartą w pierwszej ćwiartce między punktami $A(0, R)$ i $B(R, 0)$.

6.10. $\int_{\overset{\frown}{AB}} (2y-6xy^3)dx+(2x-9x^2y^2)dy$, gdzie $\overset{\frown}{AB}$ jest a) odcinkiem, b) łukiem paraboli $y=\frac{1}{2}x^2$, c) łukiem paraboli $x=\frac{1}{2}y^2$, d) łukiem krzywej $y=\frac{1}{4}x^3$.

§ 6.3. CAŁKA KRZYWOLINIOWA PŁASKA NIESKIEROWANA

Niech wzdłuż łuku L będzie określona ciągła funkcja $f(x, y)$. Podzielmy łuk L na n elementarnych części Δl_i i oznaczmy przez $\delta_n=\max|\Delta l_i|$, gdzie $|\Delta l_i|$ oznacza długość części Δl_i. Ponadto niech $(\xi_i, \eta_i)\in \Delta l_i$.

Jeżeli przy $n\to\infty$ i $\delta_n\to 0$ istnieje granica wyrażenia

$$l_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)|\Delta l_i|, \tag{6.3.1}$$

i granica ta jest zawsze ta sama bez względu na sposób dzielenia łuku L i wybór punktów (ξ_i, η_i), to granicę tę nazywamy *całką krzywoliniową płaską nieskierowaną funkcji* $f(x, y)$ *wzdłuż łuku* L i oznaczamy

$$\int_L f(x, y)\,dl. \tag{6.3.2}$$

Jeżeli łuk L jest gładki o równaniach parametrycznych

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

to całkę (6.3.2) obliczamy za pomocą całki oznaczonej (por. I, § 20.2):

$$\int_L f(x, y)\,dl=\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt. \tag{6.3.3}$$

Całka krzywoliniowa nieskierowana ma następujący sens fizyczny.

Jeżeli $f(x, y)$ oznacza gęstość liniową łuku materialnego AB, to całka (6.3.3) jest równa masie tego łuku. Jeżeli zaś $f(x, y)$ oznacza gęstość ładunku elektrycznego na tym łuku, to całka (6.3.3) jest równa całkowitemu ładunkowi znajdującemu się na nim.

ZADANIE 6.11. Wyznaczyć masę linii $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ dla $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, jeżeli gęstość liniowa wyraża się funkcją $\rho(x, y)=|y|$.

Rozwiązanie. Masa linii wyraża się całką krzywoliniową nieskierowaną

$$m=\int_L \rho(x,y)\,dl. \tag{6.3.4}$$

W naszym przypadku $\rho(x,y)=|y|$, zatem

$$m=\int_L |y|dl=\int_0^{2\pi} |a\sin t|\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=a^2\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{\pi}\sin t\,dt-a^2\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\,dt=2a^2\int_0^{\pi}\sin t\,dt=2a^2\left[-\cos t\right]_0^{\pi}=4a^2.$$

ZADANIE 6.12. Wyznaczyć natężenie pola H w środku zwojnicy w kształcie okręgu $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ dla $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, posługując się prawem Biota i Savarta

$$dH=\frac{i\sin\alpha\,ds}{r^2},$$

gdzie i oznacza natężenie prądu elektrycznego w przewodniku, ds – element przewodnika, r – długość odcinka łączącego punkt pola z elementem ds, α – kąt, jaki tworzy odcinek l z elementem ds przewodnika.

Rozwiązanie. Mamy

$$H=\int_L \frac{i\sin\alpha\,ds}{r^2};$$

w tym przypadku $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ i $r=R$ dla każdego t. Wyznaczamy $ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=R\,dt$, skąd

$$H=\frac{i}{R}\int_0^{2\pi} dt=\frac{2\pi i}{R}.$$

Zadania

Obliczyć całki krzywoliniowe płaskie nieskierowane (zad. 6.13 - 6.24):

6.13. $\int_L (x+y)\,dl$, gdzie L jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$.

6.14. $\int_L (x^2+y^2)dl$, gdzie L jest to krzywa o równaniach $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

6.15. $\int_L x^2y\,dl$, gdzie L jest częścią okręgu leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

6.16. $\int_L x^2y\,dl$, gdzie L jest częścią elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

6.17. $\int_L x^2 dl$, gdzie L jest górną częścią okręgu $x^2+y^2=a^2$ zawartą między punktami $A(a, 0)$ i $B(-a, 0)$.

6.18. $\int_L xy dl$, gdzie L jest obwodem kwadratu $|x|+|y|=a$ $(a>0)$.

6.19. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, gdzie L jest odcinkiem łączącym punkty $A(0, 0)$ i $B(1, 2)$.

6.20. $\int_L xy dl$, gdzie L jest częścią elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ leżącą w pierwszej ćwiartce.

6.21. $\int_L (y-x) dl$, gdzie L jest łukiem krzywej $y=x^3$ zawartym między punktami $A(1, 1)$ i $B(2, 8)$.

6.22. $\int_L y^2 dl$, gdzie L jest pierwszym łukiem cykloidy $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$.

6.23. $\int_L \sqrt{x^2+y^2} dl$, gdzie L jest łukiem spirali logarytmicznej $r=a e^{m\varphi}$ $(m>0)$ zawartym między punktami $A(0, a)$ i $B(-\infty, 0)$.

6.24. $\int_L (x+y) dl$, gdzie L jest prawym liściem lemniskaty $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

§ 6.4. CAŁKA KRZYWOLINIOWA W PRZESTRZENI SKIEROWANA

Niech będzie dany w przestrzeni łuk gładki $\overset{\frown}{AB}$ określony równaniami parametrycznymi

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \tag{6.4.1}$$

Jeżeli na tym łuku określone są funkcje ciągłe $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, to *całkę krzywoliniową w przestrzeni skierowaną*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz, \tag{6.4.2}$$

analogicznie jak na płaszczyźnie (por. § 6.2), definiujemy jako granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\big(P(x_{\theta_i}, y_{\theta_i}, z_{\theta_i})(x_{t_i}-x_{t_{i-1}})+Q(x_{\theta_i}, y_{\theta_i}, z_{\theta_i})(y_{t_i}-y_{t_{i-1}})+ \tag{6.4.3}$$
$$+R(x_{\theta_i}, y_{\theta_i}, z_{\theta_i})(z_{t_i}-z_{t_{i-1}})\big),$$

gdy $\lim_{n\to\infty} m_n=+\infty$, tzn. liczba m_n przedziałów częściowych $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$ w n-tym podziale odcinka $\langle\alpha, \beta\rangle$ wzrasta nieograniczenie oraz $\lim_{n\to\infty}\max_i(t_i-t_{i-1})=0$, a θ_i oznacza dowolną liczbę z przedziału $\langle t_{i-1}, t_i\rangle$.

Tak określona całka krzywoliniowa w przestrzeni ma analogiczne własności jak całka na płaszczyźnie, w szczególności da się sprowadzić do całki oznaczonej za pomocą wzoru

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y, z)dx+Q(x, y, z)dy+R(x, y, z)dz= \tag{6.4.4}$$
$$=\int_\alpha^\beta\big(P(x_t, y_t, z_t)x_t'+Q(x_t, y_t, z_t)y_t'+R(x_t, y_t, z_t)z_t'\big)dt$$

Całkę krzywoliniową w przestrzeni skierowaną wzdłuż krzywej regularnej L (o początku A i końcu B) określamy jako sumę całek krzywoliniowych wzdłuż łuków gładkich, z których składa się krzywa L, zatem

$$\int_L = \int_{\overset{\frown}{AW_1}} + \int_{\overset{\frown}{W_1W_1}} + \ldots + \int_{\overset{\frown}{W_kB}} . \tag{6.4.5}$$

Całka krzywoliniowa w przestrzeni skierowana ma następującą interpretację fizyczną. Mianowicie, jeśli $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ są składowymi skalarnymi wzdłuż osi współrzędnych wektora siły $\boldsymbol{F}(P, Q, R)$ działającego w punkcie (x, y, z) łuku $\overset{\frown}{AB}$, to całka krzywoliniowa skierowana (6.4.2) jest równa pracy wykonanej przez zmienną siłę $\boldsymbol{F}$ na drodze, którą jest łuk $\overset{\frown}{AB}$ (por. też zadanie 6.4).

ZADANIE 6.25. W pewnym polu składowe sił są $P(x, y, z)=xy$, $Q(x, y, z)=y+z$ i $R(x, y, z)=z$. Wyznaczyć pracę, jaką trzeba wykonać pokonując siły pola wzdłuż linii C o równaniach parametrycznych $x=2\cos t$, $y=2\sin t$ i $z=t$ od punktu $A(2, 0, 0)$ do $B(0, 2, \frac{1}{2}\pi)$.

Rozwiązanie. Praca L wynosi

$$L=\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz,$$

gdzie $dx=-2\sin t\,dt$, $dy=2\cos t\,dt$, $dz=dt$ i punktowi $A(2, 0, 0)$ odpowiada $t=0$, a punktowi $B(0, 2, \frac{1}{2}\pi)$ odpowiada $t=\frac{1}{2}\pi$, zatem

$$L=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(-8\sin^2 t\cos t+4\sin t\cos t+2t\cos t+t)\,dt=$$

$$=\left[-\tfrac{8}{3}\sin^2 t+2\sin^2 t+2t\sin t+2\cos t+\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\tfrac{1}{8}\pi^2+\pi-\tfrac{8}{3}.$$

Zadania

6.26. Pole elektrostatyczne między okładkami kondensatora cylindrycznego ma natężenie $\boldsymbol{K}$ o składowych

$$K_x=a\frac{x}{r^3}, \quad K_y=a\frac{y}{r^3}, \quad K_z=0.$$

Wyznaczyć pracę, którą trzeba wykonać, aby ładunek jednostkowy przesunąć wzdłuż prostej $x=3t$, $y=4t$, $z=0$ z punktu $M(3, 4, 0)$ do punktu $N(6, 8, 0)$.

6.27. Dane jest pole sił $P=xz-z$, $Q=0$ i $R=2x+z^2$. Wyznaczyć, jaką pracę trzeba wykonać pokonując siły pola wzdłuż drogi po łuku $z=x^3$ od punktu $A(0, 0)$ do punktu $B(1, 1)$.

6.28. W pewnym polu grawitacyjnym składowe sił wzdłuż osi układu są

$$P=k\frac{x}{r^3}, \quad Q=k\frac{y}{r^3}, \quad R=k\frac{z}{r^3},$$

gdzie $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, a k jest współczynnikiem proporcjonalności. Wyznaczyć pracę, którą trzeba wykonać, aby przesunąć punkt materialny o masie jednostkowej wzdłuż drogi $x=\cos t$, $y=1$, $z=\sin t$ z punktu $M(1, 1, 0)$ do punktu $N(0, 1, 1)$.

§ 6.5. CAŁKA KRZYWOLINIOWA W PRZESTRZENI NIESKIEROWANA

Całkę krzywoliniową w przestrzeni nieskierowaną definiuje się analogicznie jak to zostało zrobione w przypadku płaskim (por. § 6.3).

Niech wzdłuż łuku L będzie określona ciągła funkcja $f(x, y, z)$. Podzielmy łuk L na n elementarnych części Δl_i i oznaczmy przez $\delta_n=\max|\Delta l_i|$, gdzie $|\Delta l_i|$ oznacza długość części Δl_i. Niech ponadto $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\in\Delta l_i$.

Jeżeli przy $n\to\infty$ i $\delta_n\to 0$ istnieje granica wyrażenia

$$l_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)|\Delta l_i| \tag{6.5.1}$$

i granica ta jest zawsze ta sama bez względu na sposób dzielenia łuku L i wybór punktów (ξ_i, η_i, ζ_i), to granicę tę nazywamy *całką krzywoliniową w przestrzeni nieskierowaną wzdłuż łuku* L i oznaczamy

$$\int_L f(x, y, z)\,dl. \tag{6.5.2}$$

Jeżeli łuk L o równaniach parametrycznych

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

jest gładki i funkcja $f(x, y, z)$ jest ciągła, to całkę (6.5.2) obliczamy za pomocą całki oznaczonej:

$$\int_L f(x, y, z)\,dl=\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt. \tag{6.5.3}$$

Całka krzywoliniowa w przestrzeni nieskierowana, podobnie jak płaska, ma liczne zastosowania w zagadnieniach technicznych i fizycznych (por. § 6.3).

ZADANIE 6.29. Wyznaczyć masę linii $x=at$, $y=\frac{1}{2}at^2$, $z=\frac{1}{3}at^3$ dla $0\leqslant t\leqslant 1$, jeżeli gęstość liniowa wyraża się funkcją $\rho(x, y, z)=\sqrt{2y/a}$ $(a>0)$.

Rozwiązanie. Masa linii wyraża się całką krzywoliniową w przestrzeni nieskierowaną (por. też wzór (6.3.4)):

$$m=\int_L \rho(x, y, z)\,dl. \tag{6.5.4}$$

W naszym przypadku $\rho(x, y, z)=\sqrt{2y/a}$. Ponieważ $\rho(x(t), y(t), z(t))=t$, $x_t'=a$, $y_t'=at$, $z_t'=at^2$, to w myśl wzoru (6.5.3)

$$m=\int_L \sqrt{2y/a}\,dl=\int_0^1 t\sqrt{a^2+a^2t^2+a^2t^4}\,dt=a\int_0^1 t\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt.$$

Podstawiamy $t^2=z$, gdzie $0\leqslant z\leqslant 1$, skąd $t\,dt=\frac{1}{2}dz$; mamy

$$m=\tfrac{1}{2}a\int_0^1\sqrt{1+z+z^2}\,dz.$$

Korzystając dla $a>0$ ze wzoru

$$(*)\qquad \int\sqrt{c+bz+az^2}\,dz=\frac{2az+b}{4a}\sqrt{c+bz+az^2}-\frac{b^2-4ac}{8\sqrt{a^3}}\ln\left(2az+b+2\sqrt{a(c+bz+az^2)}\right)+C,$$

który uzyskujemy metodą współczynników nieoznaczonych (por. I, § 17.3), bądź też korzystając z gotowych tablic(1), otrzymujemy

$$m=\tfrac{1}{2}a\left[\frac{2z+1}{4}\sqrt{1+z+z^2}+\tfrac{3}{8}\ln(2z+1+2+1+z+z^2)\right]_0^1=$$

$$=\tfrac{1}{2}a\left(\tfrac{3}{4}\sqrt{3}+\tfrac{3}{8}\ln(3+2\sqrt{3})-\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{8}\ln 3\right)=\tfrac{1}{2}a\left[\frac{3\sqrt{3}-1}{4}+\tfrac{3}{8}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]=$$

$$=\tfrac{1}{8}a\left[3\sqrt{3}-1+\tfrac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right].$$

Zadania

6.30. Znaleźć masę łuku krzywej $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ dla $0\leqslant t\leqslant 1$, jeśli gęstość łuku wyraża się funkcją $\rho(x,y,z)=e^t$.

6.31. Znaleźć masę pierwszego zwoju linii śrubowej $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$. Gęstość w każdym punkcie tego zwoju jest równa kwadratowi promienia wodzącego tego punktu.

§ 6.6. WZÓR GREENA

Niech D będzie obszarem normalnym względem obu osi współrzędnych, a L niech będzie brzegiem D oraz na brzegu L niech będzie tak określony kierunek, że przy przesuwaniu się punktu M po L obszar D będzie po lewej stronie (2). Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są klasy C^1 w pewnym obszarze zawierającym D, to zachodzi następujący *wzór Greena*:

$$(6.6.1)\qquad \oint_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

(1) I. N. Bronsztein, K. A. Siemiendjajew, *Matematyka*, str. 461, wzory 245 i 241.

(2) Mówimy wtedy, że krzywa jest skierowana dodatnio. W podanych rozważaniach stale zakładamy, że układ współrzędnych jest prawoskrętny.

Wzór Greena zachodzi również w przypadku, gdy D jest obszarem domkniętym dającym się podzielić łukami na skończoną liczbę obszarów normalnych względem obu osi współrzędnych.

ZADANIE 6.32. Stosując wzór Greena obliczyć całkę

$$I=\int_L (1-x^2)\,y\,dx+x(1+y^2)\,dy,$$

jeżeli L jest okręgiem $x^2+y^2=R^2$ skierowanym dodatnio.

Rozwiązanie. Mamy

$$P(x,y)=(1-x^2)\,y, \quad Q(x,y)=x(1+y^2),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1-x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1+y^2.$$

A więc na podstawie wzoru Greena (6 6.1) otrzymujemy

$$I=\iint_D (y^2+x^2)\,dxdy,$$

gdzie D jest kołem (rys. 6.4). Ponieważ funkcja podcałkowa przyjmuje te same wartości w punktach (x,y), $(-x,y)$, $(-x,-y)$, $(x,-y)$, a więc w punktach wszystkich czterech ćwiartek, więc wystarczy całkować po $\frac{1}{4}$ części obszaru D, a wynik pomnożyć przez cztery:

$$\iint_D (y^2+x^2)\,dxdy=4\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2)\,dxdy.$$

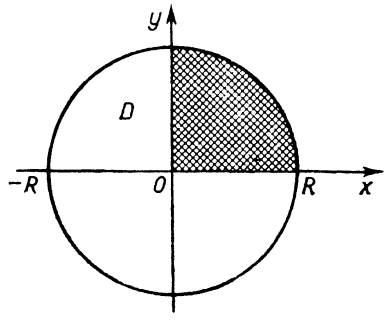
Biorąc pod uwagę funkcję podcałkową i obszar całkowania dogodnie będzie dokonać zamiany zmiennych wprowadzając współrzędne biegunowe (por. str. 118):

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi \quad (0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\tfrac{1}{2}\pi).$$

Jak wiemy, jakobian tego przekształcenia $J=r$, zatem

$$\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (x^2+y^2)\,dxdy=\int_0^R \int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^3\,drd\varphi=$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi\int_0^R r^3\,dr=\tfrac{1}{2}\pi\left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^R=\tfrac{1}{8}\pi R^4.$$



Rys. 6.4

Stąd ostatecznie $I=\frac{1}{2}\pi R^4$.

ZADANIE 6.33. Wykazać, że jeżeli D jest obszarem normalnym względem obu osi współrzędnych, L krzywą gładką będącą brzegiem obrazu D oraz na krzywej L określony jest taki kierunek, przy którym obszar D jest po lewej stronie, to pole $|D|$ obszaru D można wyrazić każdym z trzech wzorów

$$|D|=\tfrac{1}{2}\int_L x\,dy-y\,dx=\int_L x\,dy=-\int_L y\,dx. \tag{6.6.2}$$

Zastosować pierwszy wzór dla obliczenia pola obszaru ograniczonego elipsą.

Rozwiązanie. Stosując do każdej z podanych trzech całek krzywoliniowych wzór Greena otrzymujemy zawsze całkę $\iint_D dxdy$, która jak wiadomo równa się S.

Dla elipsy mamy $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, skąd $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=b\cos t\,dt$. Stąd

$$S=\tfrac{1}{2}\int_L x\,dy-y\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2 t+ab\sin^2 t)\,dt=ab\pi.$$

§ 6.7. CAŁKA RÓŻNICZKI ZUPEŁNEJ FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

Niech D będzie obszarem jednospójnym płaskim, a funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ klasy C^1 w obszarze D. Zgodnie z definicją (por. wzór (1.11.10)), wyrażenie

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \tag{6.7.1}$$

jest różniczką zupełną funkcji $U(x,y)$ w obszarze D, jeżeli w tym obszarze

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P,\qquad \frac{\partial U}{\partial y}=Q.$$

Dowodzi się, że przy przyjętych założeniach, *na to, aby wyrażenie* (6.7.1) *było różniczką zupełną, potrzeba i wystarcza, aby w każdym punkcie obszaru D zachodziła równość*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6.7.2}$$

Równość (6.7.2) jest także *warunkiem dostatecznym i koniecznym na to, aby całka krzywoliniowa*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

wzdłuż krzywej $\overset{\frown}{AB}$ *zawartej w obszarze jednospójnym D nie zależała od drogi całkowania, a tylko od położenia punktów A i B.*

Jeżeli równość (6.7.2) jest spełniona, to funkcję $U(x,y)$, której różniczką zupełną jest wyrażenie (6.7.1), znajdujemy ze wzoru

$$U(x,y)=\int_{\overset{\frown}{A_0A}} P\,dx+Q\,dy, \tag{6.7.3}$$

gdzie $\overset{\frown}{A_0A}$ jest krzywą gładką w obszarze D, A_0 punktem ustalonym, natomiast A punktem zmiennym o współrzędnych (x,y).

W szczególności, jeżeli łamana o końcach $A(x_0,y_0)$, $B(x_0,y)$, $C(x,y)$ leży w obszarze D, to całka krzywoliniowa wzdłuż niej wyraża się jako suma dwóch całek zwykłych:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy+C. \tag{6.7.4}$$

W zadaniach 6.34 i 6.35 pokazano dwa różne sposoby odnajdywania funkcji $U(x,y)$.

ZADANIE 6.34. Wykazać, że wyrażenie

$$2(x+y)\,dx+(2x+3y^2)\,dy \tag{1}$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji $U(x, y)$ i wyznaczyć ją.

Rozwiązanie. Wobec tego, że funkcje $P(x, y)=2(x+y)$ i $Q(x, y)=2x+3y^2$ są klasy C^1 w całej płaszczyźnie, więc warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby (1) było różniczką zupełną, jest spełnienie warunku (6.7.2). Obliczamy

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2,$$

a więc warunek (6.7.2) jest spełniony.

Szukaną funkcję $U(x, y)$ wyznaczamy ze wzoru (6.7.3), czyli

$$U(x, y)=\int\limits_{\overset{\frown}{A_0A}} 2(x+y)\,dx+(2x+3y^2)\,dy, \tag{2}$$

gdzie $A_0(x_0, y_0)$ jest punktem ustalonym, $A(x, y)$ – zmiennym. Przy warunku (6.7.2) oraz założeniach gładkości całka (2) nie zależy od drogi całkowania. Wybieramy drogę wzdłuż łamanej A_0BA, gdzie $B(x, y_0)$. Rozbijamy całkę krzywoliniową $\int\limits_{\overset{\frown}{A_0A}}$ na sumę całek $\int\limits_{\overset{\frown}{A_0B}}+\int\limits_{\overset{\frown}{BA}}$, a następnie każdą z nich zamieniamy na całkę oznaczoną. Wówczas otrzymujemy

$$U(x, y)=\int\limits_{x_0}^{x} 2(x+y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}(2x+3y^2)\,dy=[x^2+2xy_0]_{x_0}^{x}+[2xy+y^3]_{y_0}^{y}=$$

$$=x^2+2xy_0-x_0^2-2x_0y_0+2xy+y^3-2xy_0-y_0^3=x^2+2xy+y^3+C.$$

ZADANIE 6.35. Znaleźć funkcję, której różniczką zupełną jest wyrażenie

$$\left(3x^2+2x\sin\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y}\cos\frac{x}{y}\right)dx-\frac{x^3}{y^2}\cos\frac{x}{y}\,dy \tag{1}$$

w każdym obszarze nie zawierającym punktów osi Ox.

Rozwiązanie. Sprawdzamy najpierw, czy spełniony jest warunek (6.7.2). Mamy

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}-\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x^3}{y^3}\sin\frac{x}{y}=-\frac{3x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x^3}{y^3}\sin\frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{3x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x^3}{y^3}\sin\frac{x}{y}.$$

Warunek (6.7.2) jest więc spełniony.

Szukamy teraz funkcji $U(x, y)$ takiej, że

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q. \tag{2}$$

Funkcja Q jest nieco prostsza niż P; korzystamy więc z warunku $\frac{\partial U}{\partial y}=Q$. Całkując względem y otrzymujemy

$$U(x,y)=\int Q(x,y)\,dy=-\int \frac{x^3}{y^2}\cos\frac{x}{y}\,dy=x^2\sin\frac{x}{y}+\varphi(x), \tag{3}$$

gdzie $\varphi(x)$ jest pewną funkcją różniczkowalną, odgrywającą rolę stałej całkowania względem zmiennej y. Funkcję $\varphi(x)$ znajdziemy teraz z warunku $\frac{\partial U}{\partial x}=P$. Mamy

$$2x\sin\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y}\cos\frac{x}{y}+\varphi'(x)\equiv 3x^2+2x\sin\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y}\cos\frac{x}{y},$$

skąd

$$\varphi'(x)=3x^2, \quad \text{czyli} \quad \varphi(x)=x^3+C.$$

Podstawiając obliczoną wartość na $\varphi(x)$ do wzoru (3) otrzymujemy ostatecznie

$$U(x,y)=x^2\sin\frac{x}{y}+x^3+C.$$

ZADANIE 6.36. Wyznaczyć taką wartość stałej λ, aby wyrażenie

$$\frac{x\,dy+\lambda y\,dx}{y(x+y)} \tag{1}$$

w obszarze nie zawierającym punktów osi Ox oraz prostej $x+y=0$ było różniczką zupełną. Znaleźć funkcję $U(x,y)$, dla której (1) jest różniczką zupełną.

Rozwiązanie. Piszemy warunek na to, aby (1) było różniczką zupełną; ma więc być

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y(x+y)}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda y}{y(x+y)}\right), \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{y}\cdot\frac{y}{(x+y)^2}=\frac{-\lambda}{(x+y)^2},$$

skąd $\lambda=-1$. Mamy więc

$$P(x,y)=-\frac{1}{x+y}, \quad Q(x,y)=\frac{x}{y(x+y)}.$$

Szukana funkcja

$$U(x,y)=-\int\frac{dx}{x+y}=g(y)-\ln|x+y|,$$

skąd

$$\frac{\partial U}{\partial y}=g'(y)-\frac{1}{x+y}.$$

Przyrównując otrzymane wyrażenie do $Q(x,y)$, otrzymujemy

$$g'(y)-\frac{1}{x+y}\equiv\frac{x}{y(x+y)},$$

skąd

$$g'(y)=\frac{1}{y}, \quad \text{czyli} \quad g(y)=\ln|y|+C;$$

ostatecznie więc

$$U(x,y)=\ln|y|-\ln|x+y|+C, \quad \text{czyli} \quad U(x,y)=\ln\left|\frac{y}{x+y}\right|+C.$$

Zadania

Udowodnić, że funkcje podcałkowe stanowią różniczkę zupełną, a następnie obliczyć całki (zad. 6.37 - 6.45):

6.37. $\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx+y\,dy$.

6.38. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} x\,dy+y\,dx$.

6.39. $\int\limits_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$.

6.40. $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx-dy)$.

6.41. $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4+4xy^2)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy$.

6.42. $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$ wzdłuż drogi nie przecinającej osi Oy.

6.43. $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$ wzdłuż drogi nie przechodzącej przez początek układu współrzędnych.

6.44. $\int\limits_{(1,0)}^{(2,1)} \frac{x\,dx-y\,dy}{(x-y)^2}$ wzdłuż drogi nie przecinającej prostej $y=x$.

6.45. $\int\limits_{(1,0)}^{(2,\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ wzdłuż drogi nie przecinającej osi Oy.

§ 6.8. CAŁKA RÓŻNICZKI ZUPEŁNEJ FUNKCJI TRZECH ZMIENNYCH

W § 1.11 zostało zdefiniowane pojęcie różniczki zupełnej funkcji wielu zmiennych. W tym paragrafie rozważać będziemy wyrażenie postaci

$$P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz, \tag{6.8.1}$$

w którym funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ są klasy C^1 w pewnym obszarze V jednospójnym powierzchniowo (patrz § 5.1).

Wyrażenie (6.8.1) jest różniczką zupełną w obszarze V, jeśli istnieje taka funkcja $U(x, y, z)$ określona w obszarze V, która spełnia następujące związki:

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}=P(x,y,z),\quad \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}=Q(x,y,z),\quad \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}=R(x,y,z) \tag{6.8.2}$$

w każdym punkcie obszaru V. Wtedy wyrażenie (6.8.1) oznaczamy symbolem $dU(x, y, z)$.

Dowodzi się (na podstawie twierdzenia Schwarza, por. § 1.12), że przy przyjętych założeniach, *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wyrażenie* (6.8.1) *było różniczką zupełną pewnej funkcji trzech zmiennych, jest spełnienie w całym obszarze trzech równości*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{6.8.3}$$

Równości powyższe stanowią jednocześnie *warunek konieczny i wystarczający na to, aby całka krzywoliniowa*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz \tag{6.8.4}$$

wzdłuż krzywej gładkiej $\overset{\frown}{AB}$ *zawartej w obszarze* V *nie zależała od drogi całkowania (a tylko od punktu początkowego* $A(x_1, y_1, z_1)$ *drogi i punktu końcowego* $B(x_2, y_2, z_2)$ *drogi).*

Jeśli więc wyrażenie podcałkowe w (6.8.4) jest różniczką zupełną funkcji $U(x, y, z)$, to otrzymujemy

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_{\overset{\frown}{AB}} dU(x,y,z)=U(B)-U(A), \tag{6.8.5}$$

gdzie $U(B)$, $U(A)$ są skrótami zapisu $U(x_2, y_2, z_2)$ i $U(x_1, y_1, z_1)$.

Sposoby odnajdywania funkcji $U(x, y, z)$ (nazywanej czasem *funkcją pierwotną układu funkcji* $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$) podajemy w zadaniach.

ZADANIE 6.46. Wykazać, że wyrażenie

$$\frac{dx+dy+dz}{x+y+z} \tag{1}$$

jest różniczką zupełną w każdym obszarze nie zawierającym punktów płaszczyzny $x+y+z=0$. Wyznaczyć funkcję $U(x, y, z)$, której różniczką zupełną jest wyrażenie (1).

Rozwiązanie. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy

$$P(x,y,z)=\frac{1}{x+y+z},\quad Q(x,y,z)=\frac{1}{x+y+z},\quad R(x,y,z)=\frac{1}{x+y+z}.$$

Sprawdzamy warunki (6.8.3). Obliczamy $\frac{\partial P}{\partial y}=-(x+y+z)^{-2}$ i stwierdzamy, że ze względu

na symetryczną postać funkcji P, Q, R względem x, y, z wszystkie pochodne cząstkowe występujące w warunkach (6.8.3) są równe, a więc, że te warunki są spełnione. Wynika stąd, że wyrażenie (1) jest różniczką zupełną pewnej nieznanej funkcji $U(x, y, z)$.

Aby ją znaleźć, wykorzystujemy związki (6.8.2); mamy

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{x+y+z}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}=\frac{1}{x+y+z}.$$

Z warunków tych wnioskujemy bezpośrednio, że poszukiwaną funkcją jest

$$U(x, y, z)=\ln|x+y+z|+C.$$

ZADANIE 6.47. Sprawdzić, czy wyrażenie

$$(x^3-5yz)\,dx+(y^3-5xz)\,dy+(z^3-5xy)\,dz \tag{1}$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji $U(x, y, z)$ w całej przestrzeni, i jeśli tak, to znaleźć tę funkcję.

Rozwiązanie. Zgodnie z oznaczeniami mamy

$$P(x, y, z)=x^3-5yz, \quad Q(x, y, z)=y^3-5xz, \quad R(x, y, z)=z^3-5xy. \tag{2}$$

Aby sprawdzić, czy wyrażenie (1) jest różniczką zupełną, obliczamy pochodne cząstkowe i otrzymujemy

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-5z=\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}=-5x=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}=-5y=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Warunki (6.8.3) są spełnione, z czego wynika, że wyrażenie (1) jest różniczką zupełną.

Poszukiwana funkcja $U(x, y, z)$ spełnia warunki (6.8.2), zatem

$$\frac{\partial U}{\partial x}=x^3-5yz, \quad \frac{\partial U}{\partial y}=y^3-5xz, \quad \frac{\partial U}{\partial z}=z^3-5xy. \tag{3}$$

Całkując pierwsze z tych równań względem x, a więc traktując pozostałe zmienne jako ustalone, otrzymujemy

$$U(x, y, z)=\tfrac{1}{4}x^4-5xyz+\varphi(y, z), \tag{4}$$

gdzie $\varphi(y, z)$ jest dowolną funkcją różniczkowalną, odgrywającą rolę stałej całkowania względem x. Aby wykorzystać drugie z równań (3), różniczkujemy obustronnie (4) względem y, otrzymując

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-5xz+\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}, \tag{5}$$

i przyrównujemy prawe strony (5) i drugiego z równań (3), mamy

$$-5xz+\frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}\equiv y^3-5xz, \quad \text{skąd} \quad \frac{\partial \varphi(y, z)}{\partial y}=y^3.$$

Całkując to równanie względem zmiennej y, otrzymujemy

$$\varphi(y, z)=\tfrac{1}{4}y^4+\psi(z), \tag{6}$$

gdzie z kolei $\psi(z)$ jest dowolną funkcją różniczkowalną odgrywającą rolę stałej całkowania względem y. Po podstawieniu (6) do (4) mamy

$$U(x, y, z)=\tfrac{1}{4}x^4-5xyz+\tfrac{1}{4}y^4+\psi(z). \tag{7}$$

Pozostało do wykorzystania trzecie z równań (3). W tym celu różniczkujemy obustronnie (7) względem zmiennej z, otrzymując

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-5xy+\frac{d\psi(z)}{dz}, \tag{8}$$

i przyrównujemy prawe strony (7) i trzeciego z równań (3); mamy

$$-5xy+\frac{d\psi(z)}{dz}\equiv z^3-5xy, \quad \text{skąd} \quad \frac{d\psi(z)}{dz}=z^3.$$

Obliczamy

$$\psi(z)=\tfrac{1}{4}z^4+C. \tag{9}$$

Podstawiając (9) do (7) otrzymujemy szukaną funkcję

$$U(x, y, z)=\tfrac{1}{4}(x^4+y^4+z^4)-5xyz+C.$$

Zadania

6.48. Wykazać, że wyrażenie

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

jest różniczką zupełną. Znaleźć funkcję, której różniczką jest to wyrażenie.

6.49. Znaleźć funkcję, której różniczką zupełną jest wyrażenie $e^{xyz}(yz\,dx+xz\,dy+xydz)$.

6.50. Zbadać, dla jakich wartości λ wyrażenie

$$\frac{\lambda-y^2z^2}{x^3}\,dx+\frac{\lambda yz^2}{x^2}\,dy+\frac{\lambda zy^2}{x^2}\,dz$$

jest różniczką zupełną. Znaleźć funkcję, której różniczką jest to wyrażenie.

§ 6.9. POLA WEKTOROWE

Jeżeli każdemu punktowi $M(x, y, z)$ pewnego obszaru przestrzennego V przyporządkowujemy dokładnie jeden wektor $\boldsymbol{F}$ (rys. 6.5. i 6.6), to mówimy, że zostało określone *pole wektorowe* w tym obszarze, a wektor $\boldsymbol{F}$ nazywamy *wektorem pola*. Punkty obszaru V nazywamy *punktami pola wektorowego*.

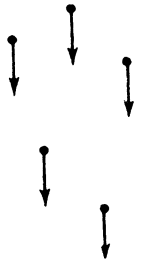
Każdy wektor jest określony jednoznacznie przez swoje *składowe skalarne* (współrzędne wektora). Gdy pole wektorowe jest określone w obszarze płaskim, to jest ono wyznaczone przez dwie współrzędne

$$F_x=P(x,y), \quad F_y=Q(x,y),$$

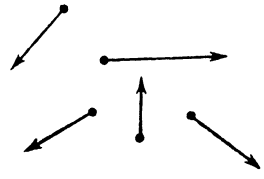
co zapisujemy w postaci $\boldsymbol{F}[P, Q]$. Jeżeli zaś pole wektorowe jest określone w obszarze trójwymiarowym, to jest ono wyznaczone przez trzy współrzędne

$$F_x=P(x,y,z), \quad F_y=Q(x,y,z), \quad F_z=R(x,y,z),$$

co zapisujemy $\boldsymbol{F}[P, Q, R]$.

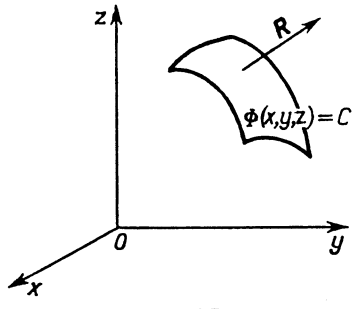


Rys. 6.5



Rys. 6.6

Linią pola wektorowego nazywamy każdą linię ciągłą w obszarze V, która w każdym swoim punkcie jest styczna do odpowiedniego wektora pola $\boldsymbol{F}$.



Rys. 6.7

Funkcję $\Phi(x, y, z)$ nazywamy *potencjałem pola wektorowego* określonego w obszarze V, jeżeli w każdym punkcie tego obszaru pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji Φ równają się odpowiednim składowym skalarnym wektora $\boldsymbol{F}$ pola wektorowego, tj. gdy

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P(x,y,z), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q(x,y,z), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}=R(x,y,z). \tag{6.9.1}$$

Mówimy wówczas, że wektor $\boldsymbol{F}$ jest *gradientem funkcji skalarnej* Φ, co zapisujemy w postaci tzw. *równania wektorowego*

$$\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}\Phi. \tag{6.9.2}$$

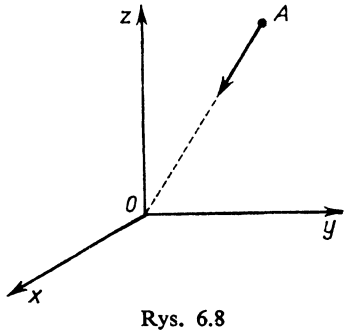
Powierzchnie o równaniu $\Phi(x, y, z)=C$, gdzie $\Phi(x, y, z)$ jest potencjałem pola wektorowego, a C jest stałą (rys. 6.7), nazywamy *powierzchniami ekwipotencjalnymi* (czyli *równopotencjalnymi*).

Zależności (6.9.1) dowodzą, że gradient w danym punkcie jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej przechodzącej przez ten punkt, a więc gradient ma ten sam kierunek co linia pola wektorowego. Tak więc linie pola wektorowego są ortogonalne do powierzchni ekwipotencjalnych.

Nie każde pole wektorowe ma jednak potencjał.

Polem potencjalnym nazywamy pole wektorowe, które ma potencjał; przykładami pól potencjalnych są np. pole grawitacyjne, pole elektrostatyczne, pole magnetostatyczne, natomiast pole elektryczne zmienne w czasie nie ma potencjału.

ZADANIE 6.51. Wykazać, że tzw. *pole newtonowskie*, tj. pole wektorowe, w którym siła $\boldsymbol{F}$ w dowolnym punkcie A jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu jego odległości od pewnego stałego punktu O, w którym umieszczona jest masa m, i skierowana jest wzdłuż promienia wodzącego od punktu A do O (rys. 6.8), jest polem potencjalnym.



Rys. 6.8

Rozwiązanie. Niech współrzędnymi punktu A będą x, y, z, wtedy kwadrat odległości r^2 punktu A od początku układu O wyraża się wzorem $r^2=x^2+y^2+z^2$. Zgodnie z treścią zadania wartość siły $\boldsymbol{F}$ działającej w punkcie A wynosi

$$F=\frac{m}{r^2},$$

a ponieważ działa ona wzdłuż wektora $\overrightarrow{AO}$, mamy tu do czynienia z przyciąganiem. Składowe jej otrzymamy mnożąc wartość siły F przez cosinusy kierunkowe wektora $\overrightarrow{OA}$: $F_x=F\cos\alpha$, $F_y=F\cos\beta$, $F_z=F\cos\gamma$. Ale

$$\cos\alpha=-\frac{x}{r},\quad \cos\beta=-\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=-\frac{z}{r}.$$

A więc składowymi skalarnymi siły $\boldsymbol{F}$ są

$$F_x=-\frac{mx}{r^3},\quad F_y=-\frac{my}{r^3},\quad F_z=-\frac{mz}{r^3}.$$

Łatwo wykazać, że potencjałem (funkcją potencjalną) pola newtonowskiego jest

$$\varphi(x,y,z)=\frac{m}{r}=m(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

mamy bowiem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\tfrac{1}{2}m(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2x=-\frac{mx}{r^3}=F_x$$

i analogicznie

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=F_y,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=F_z.$$

Końcowy wynik możemy również zapisać w postaci $\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}\varphi$.

Załóżmy teraz ciągłość pochodnych cząstkowych funkcji P, Q, R w obszarze V. *Dywergencją* (albo *rozbieżnością*) pola wektorowego $\boldsymbol{F}[P, Q, R]$, którą oznaczamy symbolem $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$, nazywamy funkcję (skalarną) określoną w każdym punkcie tego pola wzorem

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}. \tag{6.9.3}$$

Jeśli więc pole wektorowe ma potencjał $\Phi(x, y, z)$ w obszarze przestrzennym V, tzn. że $\boldsymbol{F}=\operatorname{grad} \Phi$, wówczas na podstawie wzorów (6.9.1), (6.9.2), (6.9.3) mamy

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi)=\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \tag{6.9.4}$$

Po prawej stronie wzoru (6.9.4) występuje tzw. *laplasjan funkcji* $\Phi(x, y, z)$ (nazwa od nazwiska matematyka francuskiego Laplace'a), który będziemy oznaczali symbolem $\Delta \Phi$ (por. też wzór (6.9.17)).

Polem bezźródłowym nazywamy pole wektorowe, którego rozbieżność w każdym punkcie danego obszaru równa się zeru, tzn. jest spełnione równanie różniczkowe

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0. \tag{6.9.5}$$

Rotacją (*wirem* lub też *wirowością*) wektora $\boldsymbol{F}$, którą oznaczmy symbolem $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$, pola wektorowego nazywamy wektor określony przez składowe

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{F}=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_y \boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \operatorname{rot}_z \boldsymbol{F}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{6.9.6}$$

Pole niewirowe jest to takie pole wektorowe, dla którego rotacja w każdym punkcie równa się zeru.

Dowodzi się, że rotacja sumy wektorów określających odpowiednie pola wektorowe w tym samym obszarze równa się sumie rotacji, tzn.

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)=\operatorname{rot} \boldsymbol{F}_1+\operatorname{rot} \boldsymbol{F}_2; \tag{6.9.7}$$

rotacja iloczynu stałej C przez wektor $\boldsymbol{F}$ równa się iloczynowi tej stałej przez rotację wektora $\boldsymbol{F}$, tzn.

$$\operatorname{rot}(C\boldsymbol{F})=C \operatorname{rot} \boldsymbol{F}, \tag{6.9.8}$$

dywergencja rotacji w każdym punkcie pola wektorowego równa się zeru, tzn.

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F})=0, \tag{6.9.9}$$

przy założeniu, że funkcje P, Q, R są klasy C^2.

Ze wzoru (6.9.5) wnioskujemy, że pole wirowości jest bezźródłowe.

Pole wektorowe mające potencjał Φ w pewnym obszarze jest zawsze niewirowe, tzn.

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}=\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \Phi)=\boldsymbol{o}. \tag{6.9.10}$$

Pole niewirowe w obszarze jednospójnym powierzchniowo jest zawsze potencjalne.

W XIX w. matematyk irlandzki Hamilton wprowadził pewien operator, który nazwał *nabla* (1) oznaczany symbolicznie

$$\nabla=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]. \tag{6.9.11}$$

Operator ten w niektórych zastosowaniach traktujemy jako *symboliczny wektor* o składowych będących operatorami różniczkowymi $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$.

Niech φ będzie funkcją trzech zmiennych x, y, z, określoną i klasy C^1 w obszarze V. Przy tym założeniu symbol $\nabla\varphi$ określamy jako formalny iloczyn symbolicznego wektora $\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]$ przez skalar φ, przy czym iloczyn $\frac{\partial}{\partial x}\varphi$ oznacza pochodną $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, tzn.

$$\nabla\varphi=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\varphi=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right], \tag{6.9.12}$$

czyli

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}=\operatorname{grad}\varphi, \tag{6.9.13}$$

gdzie $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ oznaczają wersory osi współrzędnych.

Znaki + we wzorze (6.9.13) należy rozumieć w sensie dodawania wektorów.

Niech $\boldsymbol{F}$ oznacza, jak poprzednio, wektor pola wektorowego, określonego w obszarze trójwymiarowym V. Wówczas symbol $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ określamy jako formalny iloczyn skalarny symbolicznego wektora $\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]$ przez wektor $[P, Q, R]$, przy czym iloczyn $\frac{\partial}{\partial x}P$ itd. rozumiemy jako pochodną $\frac{\partial P}{\partial x}$ itd., tzn.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}. \tag{6.9.14}$$

Symbol $\nabla\times\boldsymbol{F}$ przy poprzednich oznaczeniach określamy jako formalny iloczyn wektorowy tych dwóch wektorów ∇ i $\boldsymbol{F}$, tzn.(2)

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}, \tag{6.9.15}$$

(1) Od greckiego *nabla* – *harfa*, ze względu na podobieństwo symbolu nabla do kształtu starogreckiej harfy.

(2) Występujący we wzorze (6.9.15) symbol nie jest wyznacznikiem w sensie zdefiniowanym w I, § 9.1, ale symbolem, który można nazwać *symbolicznym wyznacznikiem*.

czyli

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{F}. \tag{6.9.16}$$

Zauważmy, że

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla \cdot (\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi. \tag{6.9.17}$$

Ze względu na wzór (6.9.17) niektórzy oznaczają laplasjan $\Delta \varphi$ nieformalnie symbolem $\nabla^2 \varphi$.

ZADANIE 6.52. Wykazać, że pole wektorowe o składowych

$$P = 4xy^3z^4 - 3y^2 - 16x^3z, \quad Q = 6x^2y^2z^4 - 6xy + 2z^3, \quad R = 8x^2y^3z^3 + 6yz^2 - 4x^4$$

ma potencjał w całej przestrzeni.

Rozwiązanie. Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia potencjału w obszarze jednospójnym jest spełnienie związków (por. § 6.8, wzory (6.8.3)):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{6.9.18}$$

Obliczamy pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2z^4 - 6y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2z^4 - 6y,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 24x^2y^2z^3 + 6z^2, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = 24x^2y^2z^3 + 6z^2,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 16xy^3z^3 - 16x^3, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 16xy^3z^3 - 16x^3.$$

Warunki (6.9.18) są spełnione przy wszelkich wartościach x, y, z, a więc pole wektorowe o danych składowych ma potencjał w całej przestrzeni.

ZADANIE 6.53. Stwierdzić za pomocą wzorów na składowe wirowości prawdziwość następującego wzoru:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}, \tag{6.9.19}$$

gdzie $\nabla^2 \boldsymbol{F}$ oznacza wektor, którego składowe prostokątne są laplasjanami $\Delta P, \Delta Q, \Delta R$.

Rozwiązanie. Oznaczamy przez $\operatorname{rot}_x \boldsymbol{F}$, $\operatorname{rot}_y \boldsymbol{F}$, $\operatorname{rot}_z \boldsymbol{F}$ składowe wektora wirowości $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ wzdłuż osi współrzędnych. Składowe te są dane wzorami (por. (6.9.6)):

$$\operatorname{rot}_x \boldsymbol{F} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}_y \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}_z \boldsymbol{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Zbadajmy teraz składową wzdłuż osi Ox wektora rot (rot $\boldsymbol{F}$), stojącego po lewej stronie równości (6.9.19); mamy

$$\text{(2)}\qquad \operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\boldsymbol{F})=\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{rot}_z\boldsymbol{F})-\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{rot}_y\boldsymbol{F})=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}.$$

Przejdziemy teraz do wektorów znajdujących się po prawej stronie naszej równości. Według definicji (por. (6.9.2) i (6.9.1)), składowe wektora grad φ są $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$, a dywergencja wektora pola określona jest wzorem (6.9.3). Stąd łatwo otrzymamy wartość składowej grad_x (div $\boldsymbol{F}$) wektora grad (div $\boldsymbol{F}$) mianowicie

$$\operatorname{grad}_x(\operatorname{div}\boldsymbol{F})=\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\boldsymbol{F})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}.$$

Dalej, według określenia, składową wektora $\nabla^2\boldsymbol{F}$ wzdłuż osi Ox jest

$$\nabla^2 P=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}.$$

A więc składową wzdłuż osi Ox sumy wektorów stojących po prawej stronie jest

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial z^2},$$

czyli ta sama, co i składowa (2) wzdłuż osi Ox wektora stojącego po lewej stronie naszej równości.

Analogicznie możemy udowodnić równość rzutów na osie Oy i Oz wektorów stojących po obu stronach naszej równości, co dowodzi prawdziwości omawianego wzoru.

ZADANIE 6.54. Stwierdzić, że dla dwóch pól wektorowych $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$ prawdziwy jest wzór

$$\text{(6.9.20)}\qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B},$$

gdzie $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ oznacza iloczyn wektorowy wektorów $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$, a $\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ (lub $\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$) oznacza iloczyn skalarny wektorów $\boldsymbol{B}$ i rot $\boldsymbol{A}$ (lub $\boldsymbol{A}$ i rot $\boldsymbol{B}$).

Rozwiązanie. Zauważmy, że iloczyn wektorowy $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ ma składowe

$$W_x=A_yB_z-A_zB_y,\qquad W_y=A_zB_x-A_xB_z,\qquad W_z=A_xB_y-A_yB_x$$

i że $\operatorname{div}\boldsymbol{W}=\frac{\partial W_x}{\partial x}+\frac{\partial W_y}{\partial y}+\frac{\partial W_z}{\partial z}$ (por. (6.9.3)). Mamy więc

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{\partial}{\partial x}(A_yB_z-A_zB_y)+\frac{\partial}{\partial y}(A_zB_x-A_xB_z)+\frac{\partial}{\partial z}(A_xB_y-A_yB_x)=$$

$$=A_y\frac{\partial B_z}{\partial x}+B_z\frac{\partial A_y}{\partial x}-A_z\frac{\partial B_y}{\partial x}-B_y\frac{\partial A_z}{\partial x}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial y}+B_x\frac{\partial A_z}{\partial y}-$$

$$-A_x\frac{\partial B_z}{\partial y}-B_z\frac{\partial A_x}{\partial y}+A_x\frac{\partial B_y}{\partial z}+B_y\frac{\partial A_x}{\partial z}-A_y\frac{\partial B_x}{\partial z}-B_x\frac{\partial A_y}{\partial z}=$$

$$=B_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+B_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+B_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-$$

$$-\left[A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)+A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)+A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\right].$$

Wyrażenia stojące w trzech pierwszych nawiasach okrągłych są składowymi S_x, S_y, S_z wektora $\boldsymbol{S}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$. Analogiczne wyrażenia znajdujące się w trzech następnych nawiasach okrągłych są składowymi T_x, T_y, T_z wektora $\boldsymbol{T}=\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$. Ponieważ

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}=B_xS_x+B_yS_y+B_zS_z,\qquad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{T}=A_xT_x+A_yT_y+A_zT_z,$$

otrzymujemy $\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$, co było do okazania.

ZADANIE 6.55. Wykazać prawdziwość wzoru

$$\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{A}+(\operatorname{grad}\varphi\times\boldsymbol{A}), \tag{6.9.21}$$

gdzie $\boldsymbol{A}$ jest wektorem danego pola, a φ jest funkcją skalarną.

Rozwiązanie. Badamy rzut na oś Ox wektora stojącego po lewej stronie danej równości; mamy

$$\operatorname{rot}_x(\varphi\boldsymbol{A})=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\boldsymbol{A})_z-\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\boldsymbol{A})_y.$$

Ponieważ φ jest skalarem, przeto $(\varphi\boldsymbol{A})_z=\varphi A_z$, $(\varphi\boldsymbol{A})_y=\varphi A_y$. Otrzymujemy więc

$$\operatorname{rot}_x(\varphi\boldsymbol{A})=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi A_z)-\frac{\partial}{\partial z}(\varphi A_y)=\varphi\frac{\partial A_z}{\partial y}+A_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\varphi\frac{\partial A_y}{\partial z}-A_y\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\varphi\operatorname{rot}_x\boldsymbol{A}+W_x,$$

gdzie oznaczyliśmy

$$W_x=A_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}-A_y\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Biorąc pod uwagę to, że składowe wektora grad φ są $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, a składowe wektora $\boldsymbol{A}$ są A_x, A_y, A_z, zauważamy, że wektor $\boldsymbol{W}$, którego składowa W_x otrzymaliśmy, jest iloczynem wektorowym wektorów grad φ i $\boldsymbol{A}$. Okazaliśmy więc, że rzuty na oś Ox wektorów stojących po obu stronach równości (6.9.21) są te same.

Analogicznie można wykazać identyczność rzutów na osie Oy i Oz.

Zadania

6.56. Dane jest pole wektorowe $\boldsymbol{R}$ o składowych $R_x=x^2-2y$, $R_y=3x^2y-5z$, $R_z=5z^2-3xy+y^2-1$. Sprawdzić, czy dane pole wektorowe jest polem potencjalnym.

6.57. Dane jest pole wektorowe potencjalne $\boldsymbol{R}$ o składowych $R_x=25x^4y-3y^2$, $R_y=5x^5-6xy-5$, $R_z=0$. Wyznaczyć funkcję V określającą potencjał w każdym punkcie pola, jeżeli wiemy, że $V=1$ w punkcie $A(0,0,0)$

6.58. Dane jest pole wektorowe $\boldsymbol{R}$ o składowych $R_x=2xe^{3y}+z^2$, $R_y=3x^2e^{3y}+z$, $R_z=2zx+y$. Sprawdzić, czy dane pole wektorowe jest polem potencjalnym.

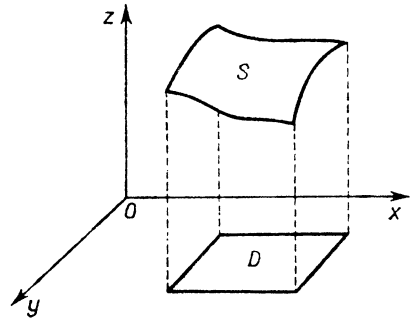
6.59. Dane jest pole wektorowe $\boldsymbol{R}$ o składowych $R_x=yz(2x+y+z)$, $R_y=xz(x+2y+z)$, $R_z=xy(x+y+2z)$. Wykazać, że dane pole wektorowe jest polem potencjalnym i znaleźć potencjał.

§ 6.10. CAŁKA POWIERZCHNIOWA NIEZORIENTOWANA

Niech S będzie płatem powierzchniowym o równaniu

$$z=f(x,y), \quad \text{gdzie} \quad (x,y)\in D; \tag{6.10.1}$$

obszar D jest więc rzutem płata S na płaszczyznę Oxy (rys. 6.9). O funkcji $f(x,y)$ zakładamy, że jest klasy C^1 w obszarze D. Przy tych założeniach płat S nazywamy *płatem gładkim* (*płatem regularnym*) (por. § 6.1), co w interpretacji geometrycznej oznacza, że w każdym punkcie płata S istnieje płaszczyzna styczna do tego płata zmieniająca się w sposób ciągły przy zmianie punktu styczności.



Rys. 6.9

Załóżmy następnie, że dla punktów $(x,y,z)\in S$ jest określona funkcja trzech zmiennych $F(x,y,z)$. Podzielmy płat S na n części regularnych Δs_i i utwórzmy sumę

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\,|\Delta s_i|, \tag{6.10.2}$$

gdzie $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta s_i$, a $|\Delta s_i|$ oznacza pole części Δs_i. Niech przy $n\to\infty$ średnica δ_n podziału dąży do zera; jeżeli istnieje granica sumy (6.10.2), przy czym granica ta zawsze jest ta sama

bez względu na sposób dzielenia płata S i wybór punktów (ξ_i, η_i, ζ_i), to granicę tę nazywamy *całką powierzchniową niezorientowaną funkcji $F(x, y, z)$ po płacie S* i oznaczamy

$$\iint_S F(x,y,z)\,ds. \tag{6.10.3}$$

Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ jest ciągła i płat S jest gładki, to całka powierzchniowa (6.10.3) istnieje i wyraża się za pomocą całki podwójnej następującym wzorem:

$$\iint_S F(x,y,z)\,ds = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dxdy, \tag{6.10.4}$$

gdzie D jest rzutem płata S na płaszczyznę Oxy.

W szczególnym przypadku, gdy $F(x, y, z) \equiv 1$, otrzymujemy znany wzór (4.7.2) na pole powierzchni płata S.

Płat powierzchniowy S dany równaniami parametrycznymi

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \tag{6.10.5}$$

gdzie punkty (u, v) należą do obszaru jednospójnego Δ, jest *płatem gładkim* (*płatem regularnym*), gdy

1° pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji (6.10.5) są ciągłe i ograniczone w obszarze Δ i na jego brzegu,

2° następująca suma kwadratów jakobianów:

$$\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2 \tag{6.10.6}$$

jest dodatnia w całym obszarze Δ,

3° różnym punktom $(u, v) \in \Delta$ odpowiadają różne punkty $(x, y, z) \in S$.

Całka powierzchniowa niezorientowana funkcji ciągłej $F(x, y, z)$ na gładkim płacie S, określonym równaniami parametrycznymi (6.10.5), wyraża się wzorem

$$\iint_S F(x,y,z)\,ds = \tag{6.10.7}$$

$$= \iint_\Delta F(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{\left(\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2}\,dudv.$$

Całka powierzchniowa niezorientowana ma następującą interpretację fizyczną. Jeżeli np. $F(x, y, z)$ jest gęstością powierzchniową masy rozpostartej na płacie gładkim S (w praktycznych zastosowaniach odnosi się to do bardzo „cienkich" płatów), to całka powierzchniowa (6.10.3) równa się masie powierzchni S, a jeżeli $F(x, y, z)$ oznacza gęstość ładunku elektrycznego, to całka (6.10.3) przedstawia całkowity ładunek znajdujący się na powierzchni S.

ZADANIE 6.60. Obliczyć całkowity ładunek elektryczny rozmieszczony na części powierzchni $2x + y + 5z - 15 = 0$ zawartej w pierwszej ósemce, jeśli gęstość ładunku jest wprost proporcjonalna do $3x + 2y + 5z$.

Rozwiązanie. Powierzchnią jest w tym przypadku część płaszczyzny zawarta w pierwszej ósemce; jej równanie zapisujemy w postaci $z=f(x, y)$, tzn.

$$z=-\tfrac{2}{5}x-\tfrac{1}{5}y+3, \quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0.$$

Gęstość ładunku $F(x, y, z)$ na podstawie treści zadania jest równa

$$F(x,y,z)=k(3x+2y+5z), \tag{1}$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności.

Obliczamy $f'_x\equiv z'_x=-\frac{2}{5}$, $f'_y\equiv z'_y=-\frac{1}{5}$, skąd

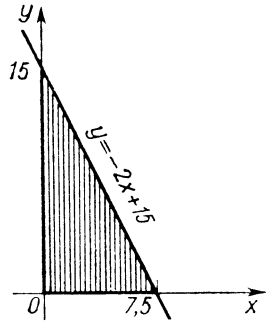
$$\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}=\sqrt{1+(-\tfrac{2}{5})^2+(-\tfrac{1}{5})^2}=\tfrac{1}{5}\sqrt{30}. \tag{2}$$

Podstawiamy (1) i (2) do wzoru (6.10.4); otrzymujemy

$$\iint_S k(3x+2y+5z)\,ds=k\iint_D (3x+2y+5(-\tfrac{2}{5}x-\tfrac{1}{5}y+3))\tfrac{1}{5}\sqrt{30}\,dxdy= \tag{3}$$

$$=\tfrac{1}{5}k\sqrt{30}\iint_D (x+y+15)\,dxdy,$$

gdzie D jest rzutem obszaru S na płaszczyznę Oxy, a w naszym przypadku trójkątem (rys. 6.10), którego brzegiem są proste



Rys. 6.10

$$x=0, \quad y=0, \quad 2x+y-15=0.$$

Łatwo ustalamy granice całkowania w całce podwójnej i otrzymujemy

$$\iint_D (x+y+15)\,dxdy=\int_0^{7,5}\Big(\int_0^{15-2x}(x+y+15)\,dy\Big)\,dx=$$

$$=\int_0^3 (337,5-45x)\,dx=810.$$

Uwzględniając wzór (3) otrzymujemy ostatecznie, że całkowity ładunek elektryczny wynosi $162\,k\sqrt{30}$.

ZADANIE 6.61. Obliczyć masę powierzchni kuli o równaniu $x^2+y^2+z^2=r^2$, jeśli gęstość powierzchniowa jest wprost proporcjonalna do kwadratu pierwszej współrzędnej punktu powierzchni.

Rozwiązanie. Do powierzchni kuli najwygodniej zastosować współrzędne sferyczne (por. (5.4.1));

$$x=r\cos\varphi\cos\psi, \quad y=r\sin\varphi\cos\psi, \quad z=r\sin\psi,$$

gdzie $0\leqslant\varphi<2\pi$, $-\frac{1}{2}\pi\leqslant\psi\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

Przy stałym r współrzędne punktów powierzchni kuli są funkcjami dwóch parametrów φ, ψ, analogicznie jak we wzorze (6.10.5). Obliczamy jakobiany

$$\frac{D(x,y)}{D(\varphi,\psi)}=\begin{vmatrix} -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \\ r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \end{vmatrix}=r^2\sin\psi\cos\psi,$$

$$\frac{D(y,z)}{D(\varphi,\psi)}=\begin{vmatrix} r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ 0 & r\cos\psi \end{vmatrix}=r^2\cos\varphi\cos^2\psi,$$

$$\frac{D(z,x)}{D(\varphi,\psi)}=\begin{vmatrix} 0 & r\cos\psi \\ -r\sin\varphi\cos\psi & -r\cos\varphi\sin\psi \end{vmatrix}=r^2\sin\varphi\cos^2\psi,$$

a następnie sumę ich kwadratów:

$$r^4\sin^2\psi\cos^2\psi+r^4\cos^2\varphi\cos^4\psi+r^4\sin^2\varphi\cos^4\psi=$$
$$=r^4\sin^2\psi\cos^2\psi+r^4\cos^4\psi=r^4\cos^2\psi.$$

Ponieważ z treści zadania wynika, że gęstość powierzchniowa $F(x, y, z)=kx^2$, gdzie $k>0$ jest współczynnikiem proporcjonalności, więc na podstawie wzoru (6.10.7) masa powierzchni kuli M wyrazi się wzorem

$$M=k\iint_S x^2ds=k\iint_\Delta (r\cos\varphi\cos\psi)^2\sqrt{r^4\cos^2\psi}\,d\varphi d\psi=$$
$$=kr^4\iint_\Delta \cos^2\varphi\cos^3\psi\,d\varphi d\psi.$$

Po zmianie całki podwójnej na iterowaną, która w tym przypadku jest równa iloczynowi całek pojedynczych, otrzymujemy

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\cos^3\psi\,d\psi=\left[\tfrac{1}{2}\varphi+\tfrac{1}{4}\sin^2\varphi\right]_0^{2\pi}\left[\sin\psi-\tfrac{1}{3}\sin^3\psi\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}=\pi\left(2-\tfrac{2}{3}\right)=\tfrac{4}{3}\pi.$$

Ostatecznie więc masa powierzchni kuli wynosi $M=\frac{4}{3}k\pi r^4$.

* * *

Podamy teraz dalsze zastosowania całki powierzchniowej niezorientowanej. We wszystkich wzorach przytoczonych poniżej funkcja $F(x, y, z)$ oznacza gęstość (ciągłą) powierzchniową płata.

Moment statyczny płata powierzchniowego S odpowiednio *względem płaszczyzny współrzędnych Oxy, Oyz, Ozx* wyraża się wzorem

$$(6.10.8)\quad M_{xy}=\iint_S zF(x,y,z)\,ds,\quad M_{yz}=\iint_S xF(x,y,z)\,ds,\quad M_{zx}=\iint_S yF(x,y,z)\,ds,$$

a *współrzędne środka ciężkości* (ξ, η, ζ) *płata powierzchniowego S* wyrażają się wzorami

$$(6.10.9)\qquad \xi=\frac{M_{yz}}{M},\quad \eta=\frac{M_{zx}}{M},\quad \zeta=\frac{M_{xy}}{M},$$

gdzie M jest masą powierzchni płata (por. wzór (6.10.3)).

Moment bezwładności płata powierzchniowego S odpowiednio *względem płaszczyzn współrzędnych Oxy, Oyz, Ozx* wyraża się wzorem

$$(6.10.10)\quad I_{xy}=\iint_S z^2F(x,y,z)\,ds,\quad I_{yz}=\iint_S x^2F(x,y,z)\,ds,\quad I_{zx}=\iint_S y^2F(x,y,z)\,ds.$$

Moment bezwładności odpowiednio *względem osi współrzędnych Ox, Oy, Oz* wyraża się wzorem

$$I_x=\iint_S (y^2+z^2)F(x,y,z)\,ds,\quad I_y=\iint_S (z^2+x^2)F(x,y,z)\,ds,$$
$$I_z=\iint_S (x^2+y^2)F(x,y,z)\,ds, \tag{6.10.11}$$

a *moment bezwładności względem początku układu współrzędnych* wzorem

$$I_0=\iint_S (x^2+y^2+z^2)F(x,y,z)\,ds. \tag{6.10.12}$$

ZADANIE 6.62. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnej kulistej powierzchni o równaniu $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$, dla $z\geqslant 0$ i gęstości równej ρ.

Rozwiązanie. Równanie powierzchni przedstawiamy w postaci

$$z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}. \tag{1}$$

Ponieważ gęstość powierzchniowa $F(x,y,z)=\rho$ jest stała, więc wzór (6.10.11) na moment bezwładności płata powierzchniowego, którym w naszym zadaniu jest powierzchnia górnej półkuli, przyjmie postać

$$I_z=\rho\iint_S (x^2+y^2)\,ds. \tag{2}$$

Całkę powierzchniową niezorientowaną (2) obliczamy za pomocą wzoru (6.10.4); mamy

$$I_z=\rho\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dxdy, \tag{3}$$

gdzie obszar całkowania D jest rzutem powierzchni półkuli S na płaszczyznę Oxy, tzn. jest okręgiem o środku w początku układu i promieniu równym a. Ponieważ $f(x,y)=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$, więc

$$f_x'(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},\quad f_y'(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},$$

wyrażenie podpierwiastkowe w całce (3) przyjmie postać

$$1+\frac{x^2}{a^2-(x^2+y^2)}+\frac{y^2}{a^2-(x^2+y^2)}=\frac{a^2}{a^2-(x^2+y^2)},$$

a całka (3) postać

$$I_z=a\rho\iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}\,dxdy. \tag{4}$$

Zarówno postać funkcji podcałkowej (dwukrotnie występuje wyrażenie x^2+y^2) jak i obszar całkowania D przemawiają za przejściem do współrzędnych biegunowych r, φ. Jak wiemy, jakobian przekształcenia $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ jest równy r. Ponieważ x^2+

$+y^2=r^2$, zatem całka (4) przyjmuje postać (por. wzór (4.4.3)):

$$I_z=a\rho\iint_{D_1}\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\varphi, \tag{5}$$

gdzie obszar D_1 jest określony nierównościami $0\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Zastępujemy teraz całkę podwójną (5) przez całkę iterowaną

$$I_z=a\rho\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\right)d\varphi. \tag{6}$$

Ponieważ

$$\int\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr=\tfrac{1}{3}(\sqrt{a^2-r^2})^3-a^2\sqrt{a^2-r^2},$$

więc pierwsze całkowanie daje

$$\int_0^a\frac{r^3\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=-\tfrac{1}{3}a^2-(-a^3)=\tfrac{2}{3}a^3,$$

a całka (6) przyjmuje postać

$$I_z=\tfrac{2}{3}\rho a^4\int_0^{2\pi}d\varphi=\tfrac{4}{3}\pi\rho a^4.$$

Zadania

Obliczyć całki powierzchniowe

6.63. $\iint_S(x^2+y^2)\,dS$, gdzie S: $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$.

6.64. $\iint_S(8-2z)\,dS$, gdzie S: $z=4-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$ dla $z>0$.

6.65. $\iint_S x^2y^2\,dS$, gdzie S: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

6.66. $\iint_S\frac{dS}{r}$, gdzie S: $z=xy$ dla $x^2+y^2\leqslant R^2$, a r jest odległością punktu powierzchni od osi Oz.

6.67. $\iint_S(2x+1)\,dS$, gdzie S: $x=\sqrt{4-y^2}$ dla $0\leqslant z\leqslant 1$.

6.68. Obliczyć masę tej części paraboloidy $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, która zawarta jest między płaszczyznami $z=0$ i $z=1$ i której gęstość w każdym punkcie równa się trzeciej współrzędnej punktu powierzchni.

6.69. Obliczyć masę tej części płaszczyzny $x+y+z=1$, która zawarta jest w pierwszej ósemce układu $Oxyz$ i której gęstość ρ w każdym punkcie jest $\rho=\frac{1}{(1+x+y)^2}$.

6.70. Obliczyć masę części paraboloidy $z=x^2+y^2$ położonej pod płaszczyzną $z=1$ i której gęstość w każdym punkcie jest $\rho=|xyz|$.

6.71. Obliczyć masę części powierzchni

$$x=u\cos v, \quad y=u\sin v, \quad z=v, \quad 0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi,$$

której gęstość w każdym punkcie jest $\rho=z$.

6.72. Obliczyć masę części płaszczyzny $x+y+z=1$ leżącej w pierwszej ósemce układu, której gęstość w każdym punkcie jest $\rho=xyz$.

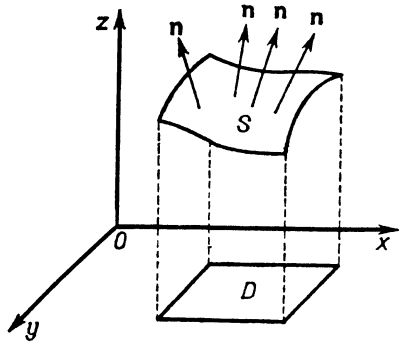
6.73. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnej powierzchni $z=\sqrt{x^2+y^2}$ wyciętej walcem $x^2+y^2=2x$.

6.74. Obliczyć moment bezwładności względem płaszczyzny Oxy jednorodnej powierzchni $z=x+y$ wyciętej walcem $x^2+y^2=4$.

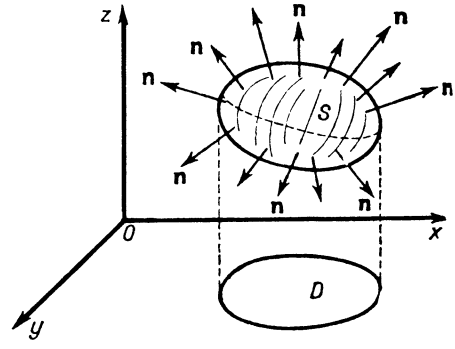
6.75. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnej części powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2=a^2$ zawartej między płaszczyznami $z=h$, $z=a$, $0<h<a$.

§ 6.11. CAŁKA POWIERZCHNIOWA ZORIENTOWANA

Płat powierzchniowy gładki S o równaniu $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, nazywamy *płatem zorientowanym*, jeżeli jedną z jego stron wyróżnimy nazywając *dodatnią*, a drugą – *ujemną*. W interpretacji geometrycznej fakt orientacji powierzchni zaznaczamy tworząc w dowolnym punkcie powierzchni S oś normalną n zorientowaną od strony ujemnej do strony dodatniej powierzchni (rys. 6.11).



Rys. 6.11



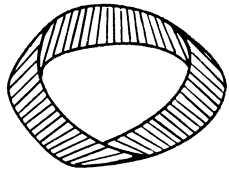
Rys. 6.12

Pojęcie orientacji wprowadza się również w przypadku, gdy powierzchnia dana jest równaniem $F(x,y,z)=0$.

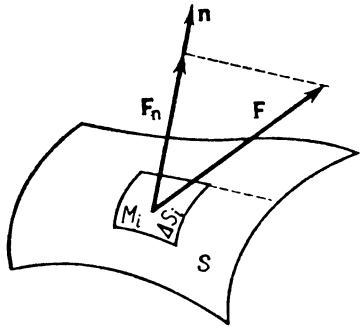
Jeśli powierzchnia jest zamknięta (np. powierzchnia kuli, czy elipsoidy), za stronę dodatnią przyjmujemy jej zewnętrzną stronę (rys. 6.12).

Uwaga. Nie dla każdej powierzchni można ustalić orientację, czyli nie każda powierzchnia jest powierzchnią dwustronną. Przykładem powierzchni jednostronnej jest tzw. *wstęga Möbiusa* (rys. 6.13).

Rozważmy obecnie w pewnym obszarze, w którym jest określone pole wektorowe $\boldsymbol{F}$, dowolną powierzchnię dwustronną S. Każdemu punktowi M tej powierzchni odpowiada określony wektor $\boldsymbol{F}$; jego *składową skalarną normalną* (tzn. miarę względną rzutu wektora $\boldsymbol{F}$ na oś normalną $\boldsymbol{n}$ w punkcie M) oznaczmy przez F_n (rys. 6.14).



Rys. 6.13



Rys. 6.14

Oznaczmy przez α, β, γ kąty, jakie wektor normalny $\boldsymbol{n}$ skierowany od strony ujemnej do strony dodatniej powierzchni tworzy z osiami współrzędnych. Traktując składową skalarną F_n jako iloczyn skalarny wektora $\boldsymbol{F}[P, Q, R]$ przez wektor jednostkowy $\boldsymbol{a} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ na osi normalnej zgodnie z nią skierowanej, mamy

$$F_n = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a} = P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma, \tag{6.11.2}$$

skąd

$$\iint_S F_n\,dS = \iint_S P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\,dS. \tag{6.11.3}$$

Zastępując $dS\cos\alpha$ przez $dydz$, $dS\cos\beta$ przez $dzdx$, $dS\cos\gamma$ przez $dxdy$, otrzymamy

$$\iint_S F_n\,dS = \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy. \tag{6.11.4}$$

Całkę (6.11.3) względnie (6.11.4) nazywamy *całką powierzchniową zorientowaną układu funkcji* P, Q, R lub *strumieniem pola wektorowego* $\boldsymbol{F}[P, Q, R]$ *przez powierzchnię* S.

Gdy płat powierzchniowy gładki S określony jest równaniami parametrycznymi

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \chi(u,v), \quad (u,v)\in\Delta, \tag{6.11.5}$$

wówczas całka powierzchniowa zorientowana (6.11.4) sprowadza się do całki podwójnej po obszarze płaskim Δ:

$$\iint_S F_n\,dS = \iint_\Delta \left(P\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)dudv. \tag{6.11.6}$$

W przypadku gdy płat powierzchniowy S dany jest równaniem $z=f(x,y)$, $(x,y)\in\Delta$, i jest zorientowany dodatnio, całka funkcji $R(x,y,z)$ we wzorze (6.11.4) wyraża się wzorem

$$\iint_S R(x,y,z)\,dxdy=\iint_\Delta R(x,y,f(x,y))\,dxdy; \tag{6.11.7}$$

gdy równanie płata S o orientacji dodatniej dane jest równaniem $x=g(y,z)$, $(y,z)\in\Delta_1$, całka funkcji $P(x,y,z)$ po płacie S wyraża się wzorem

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz=\iint_{\Delta_1} P(g(y,z),y,z)\,dydz, \tag{6.11.8}$$

gdzie Δ_1 jest obszarem powstałym przez rzut płata S na płaszczyznę Oyz, a w przypadku gdy płat S o orientacji dodatniej dany jest równaniem $y=h(z,x)$, $(z,x)\in\Delta_2$, to całka funkcji $Q(x,y,z)$ po płacie S wyraża się wzorem

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dzdx=\iint_{\Delta_2} Q(x,h(z,x),z)\,dzdx, \tag{6.11.9}$$

gdzie Δ_2 jest rzutem płata S na płaszczyznę Ozx.

ZADANIE 6.76. Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną

$$I=\iint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy, \tag{1}$$

gdzie S jest zewnętrzną stroną powierzchni sfery $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Rozwiązanie. Całkę I obliczymy jako sumę trzech całek

$$I=\iint_S z\,dxdy+\iint_S y\,dzdx+\iint_S x\,dydz. \tag{2}$$

Dla obliczenia pierwszej całki funkcję podcałkową z wyrażamy z równania sfery; dla górnej połowy sfery S_g otrzymujemy równanie $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, a dla dolnej połowy sfery S_d równanie $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Tak więc pierwsza z trzech całek (2) przyjmuje postać

$$\iint_S z\,dxdy=\iint_{S_g} z\,dxdy+\iint_{S_d} z\,dxdy. \tag{3}$$

Aby zamienić całki powierzchniowe po prawej stronie wzoru (3) na całki podwójne po obszarze płaskim, oznaczmy wspólny rzut górnej czy też dolnej połowy sfery na płaszczyznę Oxy przez Δ; jest to obszar koła, którego punkty (x,y) spełniają nierówność $x^2+y^2\leqslant R^2$. Uwzględniając orientację płatów S_g i S_d, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\iint_S z\,dxdy&=\iint_\Delta \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy+\iint_\Delta(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})(-dxdy)=\\&=2\iint_\Delta\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,dxdy.\end{aligned} \tag{4}$$

Dokonujemy zamiany zmiennych wprowadzając współrzędne biegunowe $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, przy czym $0\leqslant\rho\leqslant R$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$; jak wiemy, jakobian przy takiej zamianie zmiennych jest równy ρ. Mamy więc

$$\iint_\Delta\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho=2\pi\left[-\tfrac{1}{3}(\sqrt{R^2-\rho^2})^3\right]_0^R=\tfrac{2}{3}\pi R^3 \tag{5}$$

Uwaga. Wynik ten można było ustalić już po równości (4), bowiem całka $\iint_{\Delta} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$ jest równa objętości bryły ograniczonej obszarem Δ i powierzchnią górnej półkuli $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, a więc równa objętości półkuli o promieniu R, tzn. równa $\frac{2}{3}\pi R^3$.

Tak więc pierwsza z całek (2), tj. całka (4), jest równa $\frac{4}{3}\pi R^3$. Oczywiście każda z pozostałych dwóch całek (2) jest też równa $\frac{4}{3}\pi R^3$. Ostatecznie więc $I=4\pi R^3$, tzn. że całka (1) jest równa potrójnej objętości kuli. Nie jest to przypadkowa zbieżność, albowiem mamy następujące twierdzenie (por. też zadanie 6.63):

Jeżeli powierzchnia zamknięta i gładka S jest zorientowana dodatnio (tzn. jej strona zewnętrzna przyjęta jest za dodatnią), to objętość V bryły ograniczonej tą powierzchnią może być obliczona jako całka powierzchniowa zorientowana

$$V=\tfrac{1}{3}\iint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy. \tag{6.11.10}$$

§ 6.12. TWIERDZENIE GAUSSA-OSTROGRADSKIEGO. TWIERDZENIE STOKESA

Obliczanie strumienia pola wektorowego (mówi się również: *strumienia wektora pola*) przez powierzchnię zamkniętą, czyli całki powierzchniowej zorientowanej według metody podanej w poprzednim paragrafie często jest kłopotliwe rachunkowo. Dużym ułatwieniem w wielu przypadkach jest stosowanie następującego *twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego*:

Strumień wektora pola $\boldsymbol{F}=[P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$ przez powierzchnię zamkniętą gładką S zorientowaną na zewnątrz, ograniczającą obszar V normalny względem wszystkich płaszczyzn układu współrzędnych, jest równy całce potrójnej dywergencji tego pola w obszarze V, tzn.

$$\iint_S F_n\,dS=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \tag{6.12.1}$$

O funkcjach $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ zakładamy, że są klasy C^1 w obszarze domkniętym V.

Twierdzenie jest prawdziwe również dla obszarów, które dadzą się podzielić na skończoną liczbę obszarów normalnych względem wszystkich płaszczyzn układu współrzędnych.

ZADANIE 6.77. Wykazać, że objętość V bryły ograniczonej powierzchnią S zamkniętą, gładką i zorientowaną może być wyrażona jako całka powierzchniowa zorientowana wzorem (por. wzór (6.11.10)

$$V=\tfrac{1}{3}\iint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Zastosujmy twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego. Mamy tutaj $P(x,y,z)=x$, $Q(x,y,z)=y$, $R(x,y,z)=z$, skąd

$$\frac{\partial P}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=1,$$

a więc

$$\tfrac{1}{3}\iint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\tfrac{1}{3}\iiint_V 3\,dxdydz=\iiint_V dxdydz.$$

Ostatnia całka jest z definicji całki potrójnej równa objętości obszaru V (por. § 5.2).

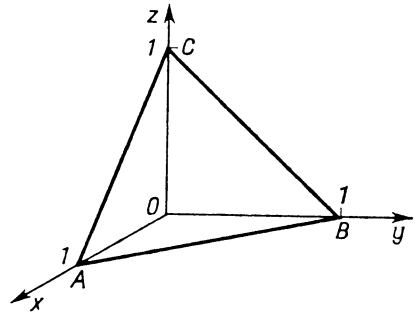
Uogólnieniem wzoru Greena (por. § 6.6), który dotyczył krzywych i obszarów płaskich, na krzywe przestrzenne i płaty powierzchniowe jest *twierdzenie Stokesa*:

Całka krzywoliniowa skierowana wzdłuż krzywej gładkiej przestrzennej zamkniętej równa się strumieniowi rotacji przez dowolną powierzchnię gładką S ograniczoną krzywą K, przy założeniu, że zwrot obiegu po krzywej i strona powierzchni są zgodne oraz że funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ są klasy C^1 w pewnym obszarze przestrzennym zawierającym powierzchnię S i jej brzeg K:

$$\text{(6.12.2)}\qquad \oint_K P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Zgodność zwrotu obiegu po krzywej i strony powierzchni należy rozumieć następująco: dodatni obieg na krzywej K dookoła wektora normalnego $\boldsymbol{n}$ do powierzchni S ma być równoskrętny z dodatnim obiegiem na płaszczyźnie Oxy dookoła osi Oz.



Rys. 6.15

Lewa strona wyraża pracę wektora siły $\boldsymbol{F}=[P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$ przy opisaniu przez niego krzywej zamkniętej K, a prawa strona jest równa strumieniowi rotacji wektora pola $\boldsymbol{F}$ przez dowolną gładką zorientowaną powierzchnię S, której brzegiem jest krzywa K.

Tezę twierdzenia Stokesa można też zapisać w postaci

$$\text{(6.12.3)}\qquad \oint_K P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S \operatorname{rot}_n \boldsymbol{F}\,dS,$$

w której $\operatorname{rot}_n \boldsymbol{F}$ oznacza składową skalarną rotacji wektora pola $\boldsymbol{F}$ wzdłuż normalnej do powierzchni S.

Jeżeli powierzchnia S będzie płaskim obszarem w płaszczyźnie Oxy, to wówczas $z=0$ i we wzorze (6.12.2) po lewej stronie odpadnie ostatni składnik pod całką, a po prawej stronie pozostanie tylko ostatni składnik i po zamianie całki powierzchniowej na całkę podwójną otrzymamy tezę twierdzenia Greena.

ZADANIE 6.78. Obliczyć za pomocą twierdzenia Stokesa pracę wykonaną przez siłę $\boldsymbol{F}=(x+z)\,\boldsymbol{i}+(x-y+2z)\,\boldsymbol{j}+(y-4x)\,\boldsymbol{k}$ działającą wzdłuż obwodu $ABCA$ trójkąta o wierzchołkach $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ (rys. 6.15).

Rozwiązanie. Mamy $P(x,y,z)=x+z$, $Q(x,y,z)=x-y+2z$, $R(x,y,z)=-4x+y$. Obliczamy rotację

$$\text{(1)}\qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+z & x-y+2z & y-4x \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

Zgodnie ze wzorem (6.12.3) mamy

$$\text{(2)}\qquad \int\limits_{ABCA}(x+z)\,dx+(x-y+2z)\,dy+(y-4x)\,dz=\iint\limits_{S}-dydz+5\,dzdx+dxdy,$$

gdzie za S należy przyjąć – wobec obiegu $ABCA$ – górną stronę powierzchni trójkąta ABC.

Pierwsza z całek podwójnych prawej strony (2), tj. $-\iint\limits_{S} dydz$, jest równa wziętemu ze znakiem minus polu OBC rzutu trójkąta ABC na płaszczyznę Oyz (rys. 6.15), a więc równa jest $-\frac{1}{2}$. Analogicznie druga całka jest równa polu AOC rzutu trójkąta ABC na płaszczyznę Ozx, pomnożonemu przez 5, a więc równa $5\cdot\frac{1}{2}$. Ostatnia zaś całka jest równa polu ABO rzutu trójkąta ABC na płaszczyznę Oxy, tj. równa $\frac{1}{2}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\int\limits_{ABCA}=-\tfrac{1}{2}+5\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=\tfrac{5}{2}.$$

Rozdział VII

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU PIERWSZEGO O ROZDZIELONYCH ZMIENNYCH

§ 7.1. UWAGI OGÓLNE O RÓWNANIACH RÓŻNICZKOWYCH RZĘDU PIERWSZEGO

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$F(x, y, y')=0, \tag{7.1.1}$$

w którym y' występuje istotnie, pozostałe zaś argumenty, tzn. x i y, mogą występować, lecz nie muszą.

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego (7.1.1) nazywamy każdą funkcję różniczkowalną

$$y=\varphi(x), \tag{7.1.2}$$

która spełnia dane równanie dla każdej wartości x z pewnego przedziału.

Linią (krzywą) całkową równania różniczkowego (7.1.1) nazywamy wykres każdej funkcji, która jest rozwiązaniem (całką) tego równania.

Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania różniczkowego (7.1.1) nazywamy każdą taką funkcję postaci

$$y=\psi(x\,;\,C), \tag{7.1.3}$$

która dla każdej wartości C należącej do pewnego przedziału jest rozwiązaniem (7.1.2) równania (7.1.1); jest to więc *jednoparametrowa rodzina linii* (por. § 3.5). *Rozwiązanie szczególne (całkę szczególną) równania różniczkowego* (7.1.1) otrzymujemy nadając parametrowi C pewną stałą wartość (należącą do jego dziedziny).

PRZYKŁAD. Dla równania różniczkowego

$$y'=2y \tag{1}$$

rozwiązaniem (całką) ogólnym jest

$$y=Ce^{2x}, \tag{2}$$

gdzie C jest dowolną liczbą rzeczywistą. Nadając parametrowi C np. wartości $-3, 0, 1, 5$ otrzymujemy rozwiązania (całki) szczególne

$$y=-3e^{2x}, \quad y=0, \quad y=e^{2x}, \quad y=5e^{2x}. \tag{3}$$

W wielu zagadnieniach (szczególnie fizycznych i technicznych) często wynika potrzeba wyznaczania rozwiązania szczególnego, spełniającego tzw. *warunki początkowe*. Polegają one na wyznaczeniu spośród linii całkowych danego równania różniczkowego takiej linii, która przechodzi przez z góry dany punkt (x_0, y_0). Zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia wartości C_0 parametru C z równania

$$y_0 = \psi(x_0 ; C_0).$$

Po podstawieniu otrzymanej wartości C_0 do rozwiązania ogólnego (7.1.3) otrzymujemy rozwiązanie szczególne

$$y = \psi(x ; C_0) = \varphi(x).$$

PRZYKŁAD (cd.). Aby znaleźć całkę szczególną równania (1), spełniającą warunki początkowe, że dla $x=0$ mamy $y=4$, podstawiamy do rozwiązania (2) $x=0$, $y=4$, skąd otrzymujemy $C_0=4$. Zatem poszukiwaną całką szczególną jest $y=4e^{2x}$.

Rozwiązaniem osobliwym (całką osobliwą) równania różniczkowego (7.1.1) nazywamy takie rozwiązanie tego równania, którego nie można otrzymać z rozwiązania ogólnego (7.1.3) przy żadnej wartości parametru C.

Równaniem różniczkowym rzędu pierwszego rozwiązanym względem y' nazywamy równanie postaci

$$y' = f(x, y). \tag{7.1.4}$$

Dla równań tego typu zachodzi następujące twierdzenie:

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ *wraz z pochodną* $f'_y(x, y)$ *jest ciągła w pewnym otoczeniu punktu* (x_0, y_0), *to istnieje takie otoczenie* $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ *punktu* x_0, *w którym jest określona dokładnie jedna funkcja* $y=\varphi(x)$ *o następujących własnościach*:

1° $y_0 = \varphi(x_0)$,

2° $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$,

czyli istnieje dokładnie jedna linia całkowa $y=\varphi(x)$ *równania różniczkowego* (7.1.4) *przechodząca przez punkt* (x_0, y_0) (*tzn. spełniająca dane warunki początkowe*).

§ 7.2. UWAGI OGÓLNE O ROZDZIELANIU ZMIENNYCH

Równaniem różniczkowym o rozdzielonych zmiennych nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego postaci

$$p(y)\frac{dy}{dx} = q(x). \tag{7.2.1}$$

Zachodzi następujące ogólne twierdzenie:

I. *Jeżeli* $p(y)$ *jest funkcją ciągłą w otoczeniu punktu* $y=y_0$, *przy czym* $p(y_0)\neq 0$, *a* $q(x)$ *jest funkcją ciągłą w otoczeniu punktu* $x=x_0$, *to istnieje na płaszczyźnie Oxy takie otoczenie punktu* (x_0, y_0), *że przez każdy punkt* (x_1, y_1) *tego otoczenia, w szczególności także przez punkt* (x_0, y_0), *przechodzi dokładnie jedna linia całkowa równania różniczkowego* (7.2.1) *określona równaniem* $y=f(x)$, *przy czym funkcja* $f(x)$ *ma ciągłą pochodną.*

Funkcja ta dana jest wtedy jednoznacznie w formie uwikłanej równaniem

$$\int_{y_1}^{y} p(\eta)\,d\eta = \int_{x_1}^{x} q(\xi)\,d\xi . \tag{7.2.2}$$

Uwaga. W całkach oznaczonych zmienne η, ξ można zastąpić jakimikolwiek literami; wystrzegamy się tylko oznaczeń y i x, jako figurujących w granicach całkowania.

II. *Jeżeli $p(y)$ jest funkcją ciągłą i różną od zera w przedziale $c<y<d$, a $q(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $a<x<b$, to przez każdy punkt prostokąta określonego tymi nierównościami przechodzi dokładnie jedna linia całkowa równania różniczkowego* (7.2.1) *postaci $y=f(x)$.*

Równania

$$p(y)\frac{dy}{dx}=q(x) \quad \text{oraz} \quad p(y)=q(x)\frac{dx}{dy} \tag{7.2.3}$$

są *równoważne* w otoczeniu punktu (x_0, y_0), jeżeli:

1° funkcja $p(y)$ jest ciągła w otoczeniu punktu $y=y_0$,

2° funkcja $q(x)$ jest ciągła w otoczeniu punktu $x=x_0$,

3° $p(y_0)\neq 0$ oraz $q(x_0)\neq 0$.

§ 7.3. PRZYKŁADY ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ O ROZDZIELONYCH ZMIENNYCH

ZADANIE 7.1. Rozwiązać równanie

$$x^2\frac{dy}{dx}=\sin\frac{1}{x} . \tag{1}$$

Rozwiązanie. Równanie to ma określony sens w całej płaszczyźnie Oxy z wyjątkiem osi Oy. Załóżmy więc, że $x\neq 0$.

Dzielimy obie strony równania przez x^2; otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} . \tag{2}$$

Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych, które spełnia warunki twierdzenia w całej płaszczyźnie Oxy z wyjątkiem osi Oy, a więc przez każdy punkt płaszczyzny z wyjątkiem punktów osi Oy przechodzi dokładnie jedna linia całkowa o równaniu postaci $y=f(x)$.

Przechodzimy od równania postaci (7.1.2) do równoważnego mu równania [1]

$$\int dy=\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx . \tag{3}$$

---

[1] Jeżeli A i B są wyrażeniami określonymi z dokładnością do stałej (np. całkami nieoznaczonymi), to relacja $A=B$ oznacza, że wyrażenia A i B różnią się o stałą.

Całkę $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\, dx$ łatwo obliczymy za pomocą podstawienia $\frac{1}{x}=t$. Otrzymujemy

$$y=\cos \frac{1}{x}+C. \tag{4}$$

Jest to całka ogólna danego równania różniczkowego.

Jeżeli otrzymana krzywa ma przejść przez punkt (x_0, y_0) płaszczyzny taki, że $x_0 \neq 0$, to stałą całkowania obliczamy z zależności

$$y_0=\cos \frac{1}{x_0}+C, \quad \text{skąd} \quad C=y_0-\cos \frac{1}{x_0}$$

i ostatecznie otrzymujemy całkę szczególną

$$y=\cos \frac{1}{x}+y_0-\cos \frac{1}{x_0}. \tag{5}$$

ZADANIE 7.2. Rozwiązać równanie

$$\sin^2 x+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Przekształcamy dane równanie do postaci $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1-\sin^2 x$, czyli

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\cos^2 x. \tag{2}$$

Rozwiązanie tego równania sprowadza się do rozwiązania równań

$$\frac{dy}{dx}=\cos x, \quad \frac{dy}{dx}=-\cos x. \tag{3}$$

Równania (3) są równaniami o rozdzielonych zmiennych, spełniającymi na całej płaszczyźnie Oxy warunki twierdzenia. Rozwiązaniami ich są:

$$y=\sin x+C_1, \quad y=-\sin x+C_2. \tag{4}$$

A więc przez każdy punkt (x_0, y_0) płaszczyzny Oxy przechodzą dwie linie całkowe równania (1):

$$y=\sin x+y_0-\sin x_0, \quad y=-\sin x+y_0+\sin x_0. \tag{5}$$

ZADANIE 7.3. Rozwiązać równanie

$$\sin x \frac{dy}{dx}=y \cos x. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Aby w równaniu (1) rozdzielić zmienne, musimy to równanie podzielić przez $y \sin x$. W tym celu zakładamy, że $\sin x \neq 0$, czyli $x \neq k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą oraz że $y \neq 0$.

Zauważmy jednak, że prosta

$$y=0 \tag{2}$$

spełnia równanie (1), gdyż dla niej $\frac{dy}{dx}=0$; a więc prosta $y=0$, czyli oś Ox jest linią całkową równania (1).

Przy przyjętych założeniach równanie (1) możemy napisać w postaci

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\operatorname{ctg}x. \tag{3}$$

Również przy przyjętych założeniach, to znaczy dla całej płaszczyzny z wyjątkiem osi Ox oraz prostych $x=k\pi$, są spełnione warunki twierdzenia.

Równanie (3) daje

$$\int\frac{dy}{y}=\int\operatorname{ctg}x\,dx. \tag{4}$$

Wykonujemy całkowanie

$$\ln|y|=\ln|\sin x|+C. \tag{5}$$

Niechaj $C=\ln C_1$, gdzie $C_1>0$. Wówczas mamy $\ln|y|=\ln|\sin x|+\ln C_1$, czyli

$$\ln|y|=\ln C_1|\sin x|.$$

Stąd

$$|y|=C_1|\sin x|,$$

czyli

$$y=C_1\sin x \quad \text{lub} \quad y=-C_1\sin x.$$

Oba te rozwiązania można ująć w jednym wzorze

$$y=C_2\sin x, \tag{6}$$

gdzie C_2 jest dowolną liczbą różną od zera.

Uwaga. Jeżeli przyjmiemy $C_2=0$, to otrzymamy poprzednio znalezione rozwiązanie $y=0$. Możemy więc przyjąć, że w rozwiązaniu (6) symbol C_2 oznacza dowolną liczbę rzeczywistą.

Ostatecznie więc przez każdy punkt (x_0, y_0), gdzie $x_0\neq k\pi$, przechodzi dokładnie jedna linia całkowa (6), przy czym $C_2=\frac{y_0}{\sin x_0}$.

Rozpatrzmy teraz równanie (por. (7.2.3)):

$$\sin x=y\cos x\,\frac{dx}{dy}. \tag{7}$$

Jeżeli $y=f(x)$ jest całką równania (1) i równość $y=f(x)$ daje się jednoznacznie odwrócić w postaci $x=g(y)$, to, jak to wynika z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej (por. I, (6.1.8)), $x=g(y)$ jest całką równania (7). Równania $y=f(x)$ i $x=g(y)$ przedstawiają wtedy te same linie, będące więc zarówno liniami całkowymi równania (1), jak (7); są to linie

wyrażone równaniem (6) przy $C_2 \neq 0$. Równanie (1) ma ponadto linię całkową $y=0$, która nie jest linią całkową równania (7). Natomiast linie proste

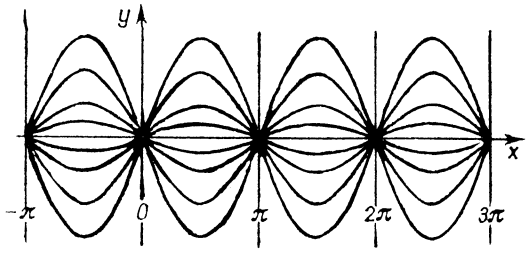
$$x=k\pi, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{8}$$

są liniami całkowymi równania (7) nie będąc liniami całkowymi równania (1).

Wszystkie linie całkowe równania (1), to znaczy linie dane równaniami $y=C_2 \sin x$, $y=0$, $x=k\pi$, uważamy za linie całkowe równania, które piszemy w postaci

$$\sin x\, dy = y \cos x\, dx. \tag{9}$$

Rysunek 7.1 przedstawia obraz rozwiązań równania (9).



Rys. 7.1

ZADANIE 7.4. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx}=2xy^2-x^2\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Przekształcamy dane równanie do postaci

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}=2xy^2. \tag{2}$$

Aby rozdzielić zmienne, musimy równanie (2) podzielić przez $(1+x^2)y^2$ zakładając, że $y\neq 0$, czyli wyłączając punkty osi Ox. Zauważmy jednak, że funkcja

$$y=0 \tag{3}$$

spełnia równanie (1), czyli jest jego całką.

Zakładając, że $y\neq 0$, i dzieląc równanie (2) przez $(1+x^2)y^2$ otrzymujemy

$$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1+x^2}. \tag{4}$$

Jest to równanie o rozdzielonych zmiennych. Równanie to przy założeniu $y\neq 0$ spełnia warunki twierdzenia II. Całkowanie daje

$$\int \frac{dy}{y^2}+\int \frac{2x\,dx}{1+x^2},$$

skąd otrzymujemy $-\frac{1}{y}=\ln(1+x^2)+C$, czyli

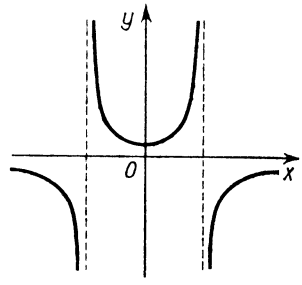
$$y=\frac{-1}{\ln(1+x^2)+C}, \tag{5}$$

z warunkiem, że $x\neq\sqrt{e^{-C}-1}$ i $x\neq-\sqrt{e^{-C}-1}$ (zastrzeżenia te dotyczą przypadku, gdy $C\leqslant 0$).

Linie (3) i (5) określają linie całkowe równania (1). Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi dokładnie jedna linia całkowa, a mianowicie: jeżeli punkt (x_0, y_0) leży na osi Ox, tj. $y_0=0$, to linią całkową jest prosta $y=0$, a jeżeli punkt (x_0, y_0) nie leży na osi Ox, tj. $y_0\neq 0$, to linia całkowa jest określona równaniem

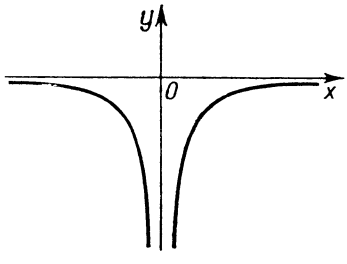
$$y=\frac{-1}{\ln(1+x^2)-\frac{1}{y_0}-\ln(1+x_0^2)}. \tag{6}$$

Łatwo zauważyć, że linia całkowa $y=0$ jest asymptotą dla każdej krzywej całkowej rodziny (5). Ponadto krzywa całkowa (6) ma asymptoty pionowe w przypadku, gdy $y_0>0$ albo gdy $y_0<\frac{-1}{\ln(1+x_0^2)}$, gdzie $x_0\neq 0$; wówczas asymptoty te mają równania

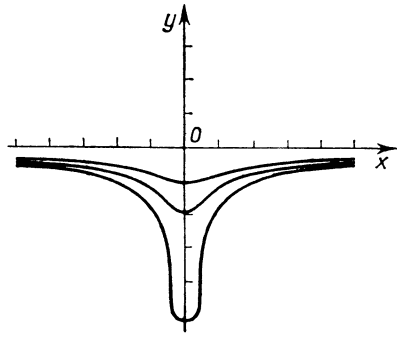


Rys. 7.2

$$x=\sqrt{e^{1/y_0}(1+x_0^2)-1} \quad \text{oraz} \quad x=-\sqrt{e^{1/y_0}(1+x_0^2)-1}$$



Rys. 7.3



Rys. 7.4

i krzywa (6) ma taki kształt jak na rysunku 7.2 (na rysunku tym wzięto $x_0=\sqrt{e-1}$, $y_0=1$).

Jeżeli $y_0=\frac{-1}{\ln(1+x_0^2)}$, to krzywa całkowa ma równanie

$$y=\frac{-1}{\ln(1+x^2)} \tag{7}$$

i wówczas oś Oy jest asymptotą krzywej całkowej (rys. 7.3).

Wreszcie w przypadku, gdy $0>y_0>\frac{-1}{\ln(1+x_0^2)}$, funkcja wyrażona równaniem (6) osiąga minimum w punkcie $x=0$, a wykres funkcji ma postać jak na rysunku 7.4.

ZADANIE 7.5. Rozwiązać równanie

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 3 \sin y (5\cos^3 x - 3\cos x). \tag{1}$$

Rozwiązanie. Aby rozdzielić zmienne, należy podzielić równanie przez $\sin y$. W tym celu zakładamy, że $\sin y \neq 0$, czyli $y \neq k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Zauważmy, że dla

$$y = k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{2}$$

jest $\frac{dy}{dx} = 0$, które to wartości sprawdzają równanie (1), a więc proste (2) są liniami całkowymi równania (1).

Dzielimy równanie (1) przez $\sin y$, otrzymując

$$\operatorname{ctg} y \frac{dy}{dx} = 3(5\cos^3 x - 3\cos x). \tag{3}$$

Aby były spełnione warunki twierdzenia II, musi być $\operatorname{ctg} y \neq 0$. Zakładamy więc, dodatkowo, że $y \neq \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Całkowanie daje

$$\int \operatorname{ctg} y \, dy = 3 \int (5\cos^3 x - 3\cos x) dx. \tag{4}$$

Całka po lewej stronie równa się $\ln|\sin y|$. Całkę po prawej stronie napiszemy w postaci

$$I = \int (5\cos^2 x - 3)\cos x \, dx = \int (2 - 5\sin^2 x)\cos x \, dx,$$

a następnie wykonujemy podstawienie $\sin x = t$, skąd $\cos x \, dx = dt$. Mamy więc

$$I = \int (2 - 5t^2) dt = 2t - \tfrac{5}{3}t^3 = 2\sin x - \tfrac{5}{3}\sin^3 x.$$

Obliczone wartości całek podstawiamy do równania (4); otrzymujemy

$$\ln|\sin y| = (6\sin x - 5\sin^3 x) + C.$$

Niechaj $C = \ln C_1$, gdzie $C_1 > 0$. Wówczas mamy $|\sin y| = C_1 e^{6\sin x - 5\sin^3 x}$, skąd

$$\sin y = C_2 e^{6\sin x - 5\sin^3 x}, \tag{5}$$

gdzie C_2 oznacza stałą różną od zera (C_1 lub $-C_1$).

Jeżeli krzywa (5) ma przejść przez punkt (x_0, y_0), gdzie $y_0 \neq k\pi$, to jej równanie przybierze postać

$$\sin y = \sin y_0 \, e^{6(\sin x - \sin x_0) - 5(\sin^3 x - \sin^3 x_0)}. \tag{6}$$

Zauważmy, że równanie (5) ma sens tylko wtedy, gdy bezwzględna wartość prawej strony równania nie przekracza jedności.

Zbadajmy wyrażenie

$$u(x) = e^{6\sin x - 5\sin^3 x}. \tag{7}$$

Przebieg wartości wyrażenia u zależy od przebiegu wartości funkcji

$$v(x) = 6\sin x - 5\sin^3 x, \tag{8}$$

którą łatwo zbadać. Pochodna $v'(x)=3\cos x(2-5\sin^2 x)$. Oznaczając przez α kąt ostry taki, że $\sin^2\alpha=\frac{2}{5}$, mamy $v'(x)=0$ w przedziale $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ dla wartości $x=\alpha$, $\frac{1}{2}\pi$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{3}{2}\pi$, $2\pi-\alpha$. Tabela zmienności funkcji $v(x)$ i $u(x)$ jest następująca:

x	...	0	...	α	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	$\pi-\alpha$	...	π	...	$\pi+\alpha$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$2\pi-\alpha$	...	2π	...
v	...	0	↗	a	↘	1	↗	a	↘	0	↘	$-a$	↗	-1	↘	$-a$	↗	0	...
u	...	1	↗	e^a	↘	e	↗	e^a	↘	1	↘	e^{-a}	↗	e^{-1}	↘	e^{-a}	↗	1	...

W tabeli tej $a=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\approx 2{,}53$. Widzimy, że $u(x)$ przebiega przedział

$$e^{-a}\leqslant u(x)\leqslant e^a. \tag{9}$$

Równanie (5) można napisać w postaci

$$\sin y=C_2\,u(x), \tag{10}$$

przy czym, jeżeli linia całkowa ma przechodzić przez punkt (x_0, y_0), to musi być

$$C_2=\frac{\sin y_0}{u(x_0)}.$$

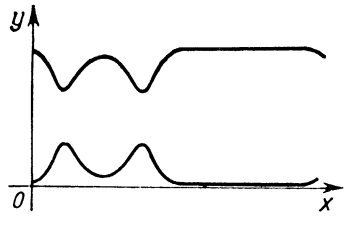
Ponieważ $0<e^{-a}\leqslant u(x_0)\leqslant e^a$, więc także

$$0<e^{-a}\leqslant\frac{1}{u(x_0)}\leqslant e^a.$$

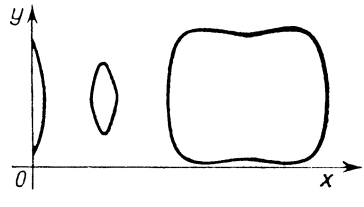
A ponieważ $-1\leqslant\sin y_0\leqslant 1$, przeto

$$-e^a\leqslant C_2\leqslant e^a. \tag{11}$$

Z drugiej strony widać, że jeżeli $|C_2|>e^a$, to ponieważ $|u(x)|\geqslant e^{-a}$, mamy $|C_2u(x)|>1$, a więc równanie (5) dla żadnego x nie ma sensu.



Rys. 7.5



Rys. 7.6

Rozpatrzmy teraz następujące przypadki zmienności C_2:

1° Przypadek, gdy $|C_2|\leqslant e^{-a}$. Wtedy mamy $|C_2u(x)|\leqslant 1$, ponieważ jak wynika z tabeli zmienności, dla każdego x mamy $|u(x)|\leqslant e^a$. Równanie (5) ma więc sens dla każdej wartości zmiennej x Z równania (5) otrzymujemy krzywe całkowe w postaci:

$$y=\arcsin(C_2u)+2k\pi,\qquad y=\pi-\arcsin(C_2u)+2k\pi, \tag{12}$$

gdzie k oznacza dowolną liczbę całkowitą. Na rysunku 7.5 wykreślono te krzywe całkowe w przedziale $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$.

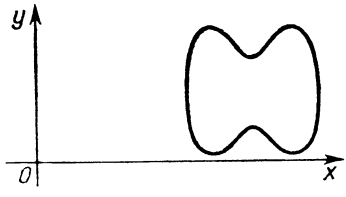
2° Rozpatrzymy przypadek, gdy $e^{-a}<|C_2|\leqslant e^{-1}$. Wówczas w pewnym otoczeniu punktów $x=\alpha$ oraz $x=\pi-\alpha$ równanie (5) traci sens.

Niechaj β_1 i β_2 oznaczają kąty ostre spełniające warunek(1)

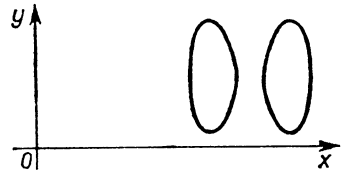
$$|C_2|\cdot e^{6\sin\beta-5\sin^3\beta}=1, \quad \text{czyli} \quad 6\sin\beta-5\sin^3\beta=-\ln|C_2|, \tag{13}$$

przy czym $0<\beta_1<\alpha<\beta_2\leqslant\frac{1}{2}\pi$. Równania (12) wyrażają krzywe całkowe w przedziałach $\beta_2\leqslant x\leqslant\pi-\beta_2$ i $\pi-\beta_1\leqslant x\leqslant 2\pi+\beta_1$ (oczywiście z okresem 2π). Wykres ma w tym przypadku taką postać jak na rysunku 7.6.

3° Przypadek, gdy $e^{-1}<|C_2|\leqslant e$. Tu możemy rozróżnić dwa podprzypadki: $e^{-1}<|C_2|\leqslant 1$ lub $1<|C_2|\leqslant e$ (rys. 7.7).



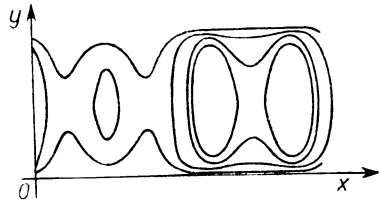
Rys. 7.7



Rys. 7.8

4° Przypadek, gdy $e<|C_2|\leqslant e^a$. W tym przypadku, jak wynika z tabeli zmienności, równanie (13) ma dwa rozwiązania: $\pi+\gamma_1$, $\pi+\gamma_2$, gdzie γ_1, γ_2 są kątami ostrymi. Linie całkowe są określone wtedy równaniem (5) w przedziałach $\langle\pi+\gamma_1, \pi+\gamma_2\rangle$ oraz $\langle 2\pi-\gamma_2, 2\pi-\gamma_1\rangle$, a wykres w tym przypadku ma postać przedstawioną na rysunku 7.8.

Ogólne zestawienie linii całkowych podajemy na rysunku 7.9.



Rys. 7.9

Uwaga. Wykazaliśmy, że przez każdy punkt płaszczyzny (x_0, y_0) taki, że $y_0\neq\frac{1}{2}(2k+1)\pi$, przechodzi dokładnie jedna linia całkowa typu (2) lub (5). Założenie $p(y_0)\neq 0$ (patrz twierdzenie I) interweniuje istotnie, gdyż przez punkty na prostych $y=\frac{1}{2}(2k+1)\pi$ bądź przechodzą dwie linie całkowe o równaniu $y=f(x)$, bądź żadna, jak np. przez punkt $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Są to tzw. *punkty osobliwe* danego równania.

ZADANIE 7.6. Rozwiązać równanie

$$(1+x^2)xy\frac{dy}{dx}=1+y^2, \tag{1}$$

(1) Istnienie ich wynika z założeń dotyczących C_2 w naszym przypadku oraz z tabeli zmienności $u(x)$.

Rozwiązanie. Aby rozdzielić zmienne, musimy równanie (1) podzielić przez wyrażenie $x(1+x^2)(1+y^2)$. W tym celu założymy $x\neq 0$ (pozostałe bowiem czynniki są różne od zera). Po podzieleniu otrzymujemy

$$\frac{y}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x(1+x^2)}. \tag{2}$$

Aby były spełnione warunki twierdzenia II, założymy jeszcze, że $y\neq 0$.

Całkowanie daje

$$\int\frac{y\,dy}{1+y^2}=\int\frac{dx}{x(1+x^2)}. \tag{3}$$

Całka po lewej stronie równa się $\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$, a po prawej $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Otrzymujemy więc

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln|x|-\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C',$$

Mnożymy obie strony równania przez 2:

$$\ln(1+y^2)=2\ln|x|-\ln(1+x^2)+2C'.$$

Niechaj $2C'=\ln C_1$, gdzie $C_1>0$. Wówczas mamy

$$1+y^2=\frac{C_1x^2}{1+x^2}.$$

Zauważmy, że na to, aby równanie to było możliwe do spełnienia (w zakresie liczb rzeczywistych), musi być $C_1>1$, gdyż po lewej stronie mamy $1+y^2>1$, a więc licznik prawej strony musi być większy niż mianownik. Niech więc C_1 będzie postaci $C_1=1+C_2^2$, gdzie C_2 jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wtedy równanie linii całkowych przyjmuje postać

$$1+y^2=\frac{(1+C_2^2)x^2}{1+x^2},\quad \text{czyli}\quad y^2=\frac{C_2^2x^2-1}{x^2+1}, \tag{4}$$

skąd

$$y=C_2\sqrt{\frac{x^2-\frac{1}{C_2^2}}{x^2+1}}. \tag{5}$$

Równanie to jest określone dla $|x|>\dfrac{1}{|C_2|}$.

Jeżeli linia całkowa ma przechodzić przez punkt (x_0,y_0), to

$$C_2=\pm\frac{\sqrt{y_0^2(x_0^2+1)+1}}{x_0},$$

przy czym $\operatorname{sgn}C_2=\operatorname{sgn}y_0$[1]

[1] Przez $\operatorname{sgn}a$ rozumiemy 1, gdy $a>0$, -1, gdy $a<0$, oraz 0, gdy $a=0$.

Równanie (5) możemy napisać w postaci

$$y=C_2\sqrt{1-\frac{1+\frac{1}{C_2^2}}{x^2+1}}. \tag{6}$$

Jest to linia mająca asymptotę $y=C_2$, monotoniczna dla $x<\frac{-1}{|C_2|}$ i $x>\frac{1}{|C_2|}$ (rys. 7.10).

Jeżeli rozpatrywalibyśmy równanie

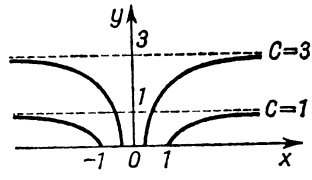
$$(1+x^2)xy=(1+y^2)\frac{dx}{dy}, \tag{7}$$

to jeszcze doszłaby linia całkowa $x=0$ (rys. 7.10).

ZADANIE 7.7. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx}=ax^b(y^2+1), \tag{1}$$

gdzie a i b są danymi liczbami, przy czym $a\neq 0$.



Rys. 7.10

Rozwiązanie. Rozdzielamy zmienne

$$\frac{1}{y^2+1}\cdot\frac{dy}{dx}=ax^b. \tag{2}$$

Rozróżnimy dwa przypadki odnośnie b.

1° Przypadek, gdy b jest liczbą całkowitą. Równanie otrzymane dla $b\geqslant 0$ spełnia warunki twierdzenia na całej płaszczyźnie, a dla $b<0$ przy założeniu, że $x\neq 0$. Całkowanie daje

$$\int\frac{dy}{1+y^2}=\int ax^b dx, \tag{3}$$

czyli

$$\operatorname{arc\,tg} y=\begin{cases}\dfrac{a}{b+1}x^{b+1}+C & \text{dla} \quad b\neq -1,\\ a\ln|x|+C & \text{dla} \quad b=-1\end{cases} \tag{4}$$

i ostatecznie

$$y=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(\dfrac{a}{b+1}x^{b+1}+C\right) & \text{dla} \quad b\neq -1,\\ \operatorname{tg}(a\ln|x|+C) & \text{dla} \quad b=-1 \quad \text{oraz} \quad x\neq 0.\end{cases} \tag{5}$$

2° Przypadek, gdy b nie jest liczbą całkowitą. Wtedy rozważamy równanie (1) w przedziale $x>0$ i otrzymujemy

$$y=\operatorname{tg}\left(\frac{a}{b+1}x^{b+1}+C\right), \quad \text{gdzie} \quad x>0. \tag{6}$$

ZADANIE 7.8. Wyznaczyć równanie $s=f(t)$ ruchu prostoliniowego, jeżeli wiemy, że przebyta droga s jest wprost proporcjonalna do prędkości $v=\frac{ds}{dt}$. Współczynnik proporcjonalności wynosi $k=3$.

Rozwiązanie. Piszemy związek między prędkością $\frac{ds}{dt}$ oraz drogą s; mamy

$$s=k\frac{ds}{dt},$$

podstawiając $k=3$ mamy $s=3\frac{ds}{dt}$, więc

$$3\frac{ds}{s}=dt, \quad \text{skąd} \quad 3\ln\frac{s}{C}=t;$$

ostatecznie otrzymujemy $s=Ce^{\frac{1}{3}t}$.

ZADANIE 7.9. W pewnym ruchu stosunek prędkości do przebytej drogi jest wielkością stałą i wynosi 2. W chwili, gdy zaczynaliśmy liczyć czas, a więc dla $t=0$, przebyta droga wynosiła $x=2$ cm. Obliczyć przebytą drogę do chwili $t=5$ sek.

Rozwiązanie. Prędkość $v=\frac{dx}{dt}$, zatem $\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}=2$; to równanie różniczkowe rozwiązujemy przez rozdzielenie zmiennych. Mamy

$$\frac{dx}{x}=2dt, \quad \text{skąd} \quad \ln\frac{x}{C}=2t,$$

więc droga $x=Ce^{2t}$.

Wyznaczymy obecnie stałą C. Dla $t=0$, $x=2$ mamy $2=Ce^0$, skąd $C=2$. Ostatecznie

$$x=2e^{2t}.$$

Przebyta droga do chwili $t=5$ sek wynosi $x=2e^{10}$ cm.

ZADANIE 7.10. Dany jest obwód elektryczny zawierający kondensator o pojemności C naładowany ładunkiem Q oraz opornik o oporze R. W chwili, gdy obwód zostaje zamknięty, tzn. dla $t=0$, wartość ładunku zgromadzonego w kondensatorze wynosi Q_0, zatem natężenie prądu odpowiadające temu momentowi jest równe $i_0=\frac{Q_0}{RC}$. Wyznaczyć funkcję określającą przebieg zmian natężenia prądu $i=f(t)$ w zależności od czasu t dla danego obwodu.

Rozwiązanie. Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa, możemy dla zamkniętego obwodu napisać

$$Ri=\frac{Q}{C}. \tag{1}$$

Z definicji natężenia prądu mamy

$$i=-\frac{dQ}{dt}. \tag{2}$$

Po zróżniczkowaniu obu stron równania (1) otrzymujemy $R\frac{di}{dt}=\frac{1}{C}\cdot\frac{dQ}{dt}$, a więc

$$R\frac{di}{dt}=-\frac{1}{C}i.$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{RC}i=0, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{i}\cdot\frac{di}{dt}=-\frac{1}{RC};$$

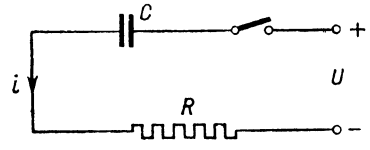
stąd mamy

$$\int\frac{di}{i}=-\frac{1}{RC}\int dt, \quad \text{czyli} \quad i=Ae^{-t/RC}.$$

Ponieważ dla $t=0$ jest $i_0=\frac{Q_0}{RC}$, zatem możemy podstawić $A=\frac{Q_0}{RC}$. Ostatecznie otrzymujemy

$$i=\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}.$$

ZADANIE 7.11. Do zacisków źródła o stałym napięciu U w chwili $t=0$ zostaje podłączony obwód (rys. 7.11) zawierający kondensator o pojemności C i opornik o oporze R. Wyznaczyć przebieg zmian natężenia prądu $i=f(t)$ dla danego obwodu włączonego do źródła.



Rys. 7.11

Rozwiązanie. Stosując drugie prawo Kirchhoffa mamy

$$U=Ri-\frac{Q}{C},$$

skąd po zróżniczkowaniu obydwu stron otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{RC}i=0,$$

jak w zadaniu 7.10. W chwili $t=0$ natężenie prądu $i_0=U/R$ i dlatego do rozwiązania ogólnego $i=Ae^{-t/RC}$ podstawiamy $A=U/R$ i ostatecznie otrzymujemy

$$i=\frac{U}{R}e^{-t/RC}.$$

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 7.12 - 7.64):

7.12. $2x^2\frac{dy}{dx}=y$.

7.13. $x^2\frac{dy}{dx}+y-a=0$.

7.14. $xy=(a+x)(b+y)\frac{dy}{dx}$.

7.15. $x-y^2+2xy\frac{dy}{dx}=0$.

Wskazówka (do zad. 7.15). Zrobić podstawienie $y=\sqrt{xt}$.

7.16. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx}=0$.

7.17. $1+y^2-(y+\sqrt{1+y^2})(\sqrt{1+x^2})^3\frac{dy}{dx}=0$.

7.18. $\frac{dy}{dx}=xy+ax+by+ab$.

7.19. $x\frac{dy}{dx}+1=x^3-\frac{dy}{dx}$.

7.20. $x^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$.

7.21. $x\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=1$.

7.22. $\frac{dy}{dx}-x=1-x^2\frac{dy}{dx}$.

7.23. $x^3y+y+xy^3\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}=0$.

7.24. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}-\sqrt{1-y^2}=0$.

7.25. $(1+x)y+(1-y)x\frac{dy}{dx}=0$.

7.26. $\sin x\sin y\frac{dy}{dx}=\cos x\cos y$.

7.27. $\sin x\cos y-\cos x\sin y\frac{dy}{dx}=0$.

7.28. $e^{-1/x}y^3+x^2y^2\frac{dy}{dx}=0$.

7.29. $e^y(1+x^2)\frac{dy}{dx}-2x(1+e^y)=0$.

7.30. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\cdot\frac{1+x}{1+y}$

7.31. $y-x\frac{dy}{dx}=1+x^2\frac{dy}{dx}$.

7.32. $(x^2+1)y^3+(1-y^2)x^3\frac{dy}{dx}=0$.

7.33. $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+1-y^2=0$.

7.34. $(x-1)(y^2-y+1)-(y+1)(x^2+x+1)\frac{dy}{dx}=0$.

7.35. $x(1+e^y)-e^y\frac{dy}{dx}=0$.

7.36. $(1+y^2)\left(e^{2x}-e^y\frac{dy}{dx}\right)-(1+y)\frac{dy}{dx}=0$.

7.37. $\frac{dy}{dx}=\cos y$.

7.38. $\frac{dy}{dx}=\sin y$.

7.39. $\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{tg} y}{x}$.

7.40. $y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}-\frac{y^2}{x}$.

7.41. $\frac{dy}{dx}=\sqrt{a^2+y^2}$.

7.42. $\frac{dy}{dx}=y\sqrt{1-y^2}$.

7.43. $y(x^2-1)\frac{dy}{dx}+x(y^2-1)=0$.

7.44. $2x\sqrt{ax-x^2}\frac{dy}{dx}=a^2+y^2$.

7.45. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{1+x^2y^2}{2}$; podstawić $y=\frac{t}{x}$.

7.46. $y^2=x\frac{dy}{dx}+y$.

7.47. $x\frac{dy}{dx}=y^3+y$.

7.48. $x(1+y^2)+y(1+x^2)\frac{dy}{dx}=0$.

7.49. $xy^2+(y-x^2y)\frac{dy}{dx}=0$.

7.50. $e^y\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=1$.

7.51. $e^y\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx}+1=0$.

7.52. $\frac{dy}{dx}=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2+2}-\frac{1}{x(y^2+2)}$.

7.53. $(2+y)\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+y^2}\frac{dy}{dx}$.

7.54. $x\frac{dy}{dx}-y=\frac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}$.

7.55. $y^2+xy^2+(x^2-yx^2)\frac{dy}{dx}=0$.

7.56. $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}+\sqrt{1-y^2}=0$.

7.57. $\frac{dy}{dx}\sin x=y\ln y$.

7.58. $\operatorname{tg} x\sin^2 y+\cos^2 x\operatorname{ctg} y\frac{dy}{dx}=0$.

7.59. $1-x^2-xy\frac{dy}{dx}=0$.

7.60. $1+y^2+xy\frac{dy}{dx}=0$.

7.61. $xy(1+x^2)\frac{dy}{dx}=1+y^2$.

7.62. $x^2\left(\frac{dy}{dx}+y^2\right)=a(xy-1)$.

Wskazówka (do zad. 7.62). Zrobić podstawienie $xy=u$.

7.63. $(x^2y^2+1)y+(x^2y^2-1)x\frac{dy}{dx}=0$.

7.64. $(y-x)\sqrt{1+x^2}\frac{dy}{dx}=\sqrt{(1+y^2)^3}$.

Wskazówka. Zrobić podstawienie $xy=u$, $x/y=v$ (w zad. 7.63) lub $x=\operatorname{tg} u$, $y=\operatorname{tg} v$ w zad. 7.64).

Znaleźć rozwiązanie ogólne podanego równania różniczkowego, a następnie wyznaczyć krzywą przechodzącą przez punkt $M(x_0, y_0)$ (zad. 7.65 - 7.67):

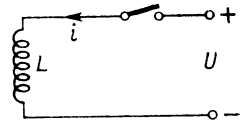
7.65. $a^2+y^2+2x\sqrt{ax-x^2}\,\frac{dy}{dx}$, $M(a, 0)$.

7.66. $(1+e^x)y\,\frac{dy}{dx}=e^x$, $M(1, 1)$. **7.67.** $2\sqrt{y}=\frac{dy}{dx}$, $M(0, 1)$.

7.68. Wyznaczyć równanie $s=f(t)$ ruchu prostoliniowego, w którym prędkość $v=ds/dt$ jest wprost proporcjonalna do czasu t, tzn. $ds/dt=kt$ (przyjąć $k=5$).

7.69. Wyznaczyć równanie $s=f(t)$ ruchu prostoliniowego, w którym prędkość $v=ds/dt$ jest wprost proporcjonalna do kwadratu przebytej drogi s, tzn. $ds/dt=ks^2$ (przyjąć $k=2$).

7.70. Wyznaczyć przebieg zmian natężenia prądu $i=f(t)$ w obwodzie zawierającym dławik o oporze rzeczywistym pomijalnie małym $R\approx 0$ i oporze indukcyjnym $\omega L\gg R$. W obwód zostaje włączone źródło prądu zmiennego o napięciu $u=U\sin\omega t$ w chwili $t=0$. Jak wiemy funkcja $i=f(t)$ spełnia równanie różniczkowe $L\,\frac{di}{dt}=U\sin\omega t$ (rys. 7.12).



Rys. 7.12

7.71. Dane jest równanie różniczkowe adiabaty $\frac{dp}{dv}\,v+kp=0$, gdzie v – objętość, p – ciśnienie, k – const dla danego gazu. Wyznaczyć równanie adiabaty, tzn. związek między ciśnieniem i objętością gazu przy przemianie adiabatycznej.

7.72. Wyznaczyć przebieg zmian pobranej energii $L=f(t)$ w zależności od czasu t przez odbiornik, którego moc dL/dt była wprost proporcjonalna do $\sin^2 3t$, tzn. $\frac{dL}{dt}=k^2\sin^2 3t$.

7.73. Napisać równanie linii przechodzącej przez punkt $A(2, 3)$ o następującej własności, że każdy odcinek stycznej do linii zawarty między osiami układu jest dzielony na połowy przez punkt styczności.

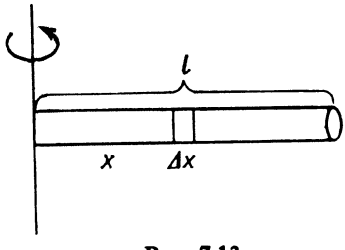
7.74. Znaleźć równanie linii przechodzącej przez punkt $A(2, 0)$ o następującej własności, że odcinek każdej stycznej do tej linii zawarty między punktem styczności i punktem przecięcia z osią Oy jest wielkością stałą i wynosi 2.

7.75. Materialny punkt o masie $m=1$ g porusza się prostoliniowo pod wpływem działania siły F wprost proporcjonalnej do czasu t i odwrotnie proporcjonalnej do prędkości

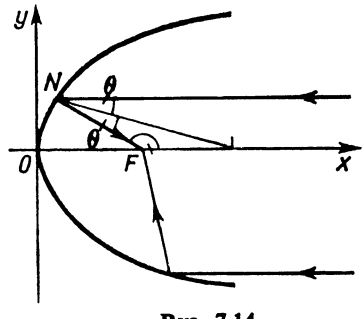
$v=\frac{dx}{dt}$ punktu. W momencie $t=10$ sek prędkość wynosiła $v=20$ cm/sek, a siła $F=10$ dyn. Wyznaczyć prędkość po upływie minuty od chwili $t=0$.

7.76. Szybkość chłodzenia dT ciała w pewnych warunkach jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur $T-T_0$, gdzie T — temperatura ciała, T_0 — temperatura otoczenia. Wyznaczyć przebieg zmian temperatury ciała T jako funkcję czasu t, jeżeli współczynnik proporcjonalności k jest stały w czasie.

7.77. Wyznaczyć przebieg zmian prędkości v ciała spadającego pod wpływem ciężkości mg, gdzie m — masa, g — przyspieszenie, z uwzględnieniem oporu tarcia o powietrze. Przyjąć, że opór tarcia jest proporcjonalny do kwadratu prędkości. (Opór powietrza mkv^2, gdzie k — współczynnik proporcjonalności).



Rys. 7.13



Rys. 7.14

7.78. Rurka o stałym przekroju S i długości l, szczelnie zamknięta, wypełniona jest gazem o ciśnieniu p. Wyznaczyć przebieg zmian ciśnienia wzdłuż rurki, jeżeli zamocowana prostopadle do osi obrotu będzie się obracała w płaszczyźnie poziomej ze stałą prędkością kątową ω. Masa gazu zawartego w rurce jest M (rys. 7.13).

7.79. Wiązka równoległa promieni światła pada na zwierciadło wklęsłe (rys. 7.14). Wszystkie promienie po odbiciu od zwierciadła przecinają się w jednym punkcie F. Wyznaczyć równanie linii przekroju osiowego zwierciadła gdy $F(a, 0)$.

7.80. Długość pręta żelaznego L przy podgrzewaniu wydłuża się według prawa $\frac{1}{L}\cdot\frac{dL}{dT}=$ $=0{,}0001$, gdzie T jest temperaturą. Wyznaczyć funkcję wyrażającą długość L w zależności od temperatury, jeżeli dla $T=0$, $L=10$. Obliczyć temperaturę, przy której długość pręta wzrośnie o 1%.

Rozdział VIII

NIEKTÓRE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU PIERWSZEGO ROZWIĄZALNE METODĄ PODSTAWIENIA

§ 8.1. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE POSTACI $y'=f(ax+by+c)$

Równania różniczkowe typu

$$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c), \tag{8.1.1}$$

gdzie $a\neq 0$ i $b\neq 0$, a $f(u)$ jest funkcją ciągłą, rozwiązujemy wprowadzając przez podstawienie nową zmienną zależną (funkcję) $u(x)$ daną związkiem

$$u=ax+by+c, \tag{8.1.2}$$

gdzie y uważamy za funkcję zmiennej x.

Różniczkujemy

$$\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}, \quad \text{skąd} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\cdot\frac{du}{dx}-\frac{a}{b}.$$

Po podstawieniu do danego równania otrzymujemy

$$\frac{du}{dx}=bf(u)+a. \tag{8.1.3}$$

Następnie przy założeniu, że $bf(u)+a\neq 0$, badamy równanie

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{bf(u)+a}, \tag{8.1.4}$$

które przy przyjętym założeniu oraz ze względu na ciągłość funkcji $f(u)$ jest równoważne równaniu (8.1.3) (por. § 7.2). Stąd

$$x=g(u), \quad \text{gdzie} \quad g(u)=\int\frac{du}{bf(u)+a}. \tag{8.1.5}$$

Funkcja $g(u)$ jest różniczkowalna, przy czym pochodna jej jest w badanym punkcie różna od zera, wobec czego także równanie

$$x=g(ax+by+c) \tag{8.1.6}$$

wyznacza y jako funkcję uwikłaną x w otoczeniu badanego punktu (por. § 7.2).

ZADANIE 8.1. Rozwiązać równanie

$$(x+y)^2\frac{dy}{dx}=a^2, \quad a>0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Wykonujemy podstawienie

$$x+y=u. \tag{2}$$

Powyższą zależność różniczkujemy

$$1+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}, \quad \text{skąd} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1. \tag{3}$$

Podstawiając do równania (1) otrzymujemy

$$u^2\left(\frac{du}{dx}-1\right)=a^2. \tag{4}$$

Chcemy rozdzielić zmienne. W tym celu zakładamy, że $u\neq 0$, czyli $x+y\neq 0$. Dzieląc przez u^2 otrzymujemy

$$\frac{du}{dx}-1=\frac{a^2}{u^2}, \quad \text{czyli} \quad \frac{du}{dx}=\frac{u^2+a^2}{u^2}$$

skąd

$$\frac{u^2}{u^2+a^2}\cdot\frac{du}{dx}=1. \tag{5}$$

Otrzymaliśmy równanie o zmiennych rozdzielonych, które przy założeniu $u\neq 0$ spełnia warunki twierdzenia z § 7.2.

Całkowanie daje

$$\int\frac{u^2\,du}{u^2+a^2}=\int dx, \tag{6}$$

skąd

$$u-a\operatorname{arctg}\frac{u}{a}=x+C.$$

Przyjmując z powrotem $u=x+y$ otrzymujemy $x+y-a\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{a}=x+C$, czyli

$$\operatorname{arctg}\frac{x+y}{a}=\frac{y-C}{a}. \tag{7}$$

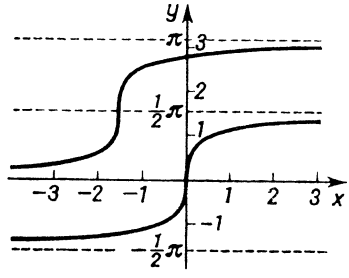
Z podanej równości wynika, że $-\frac{1}{2}\pi<\dfrac{y-C}{a}<\frac{1}{2}\pi$, czyli $C-\frac{1}{2}a\pi<y<C+\frac{1}{2}a\pi$. Z równości (7) otrzymujemy

$$\frac{x+y}{a}=\operatorname{tg}\frac{y-C}{a}. \tag{8}$$

Wyrażamy x jako funkcję zmiennej y

$$x=-y+a\operatorname{tg}\frac{y-C}{a}, \quad \text{gdzie} \quad C=y_0-a\operatorname{arctg}\frac{x_0+y_0}{a}. \tag{9}$$

Otrzymaliśmy całkę w formie rozwiązanej względem x. Przez każdy punkt płaszczyzny Oxy z wyjątkiem prostej $x+y=0$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa (rys. 8.1) rodziny (9).



Rys. 8.1

Łatwo zauważyć, że linie (9) przecinają prostą $x+y=0$, a mianowicie jeżeli w równaniu (9) przyjmiemy $y=C$, to mamy $x=-y$, czyli $x+y=0$, a stąd $x=-C$. Każda więc krzywa rodziny (9) przecina prostą $x+y=0$ w punkcie $(-C, +C)$. W punkcie tym, jak wynika z równania (1), musi być $\frac{dy}{dx}=\infty$, a więc styczna musi być równoległa do osi Oy. Jeżeli natomiast punkt (x, y) oddala się od prostej $x+y=0$, to wtedy $\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{(x+y)^2}\to 0$.

Ostatecznie więc przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi jedna krzywa całkowa postaci (9).

Z równania (1) mamy $\frac{dx}{dy}=\frac{(x+y)^2}{a^2}\geqslant 0$, skąd wnioskujemy, że funkcja x, dana wzorem (9), jest funkcją rosnącą zmiennej y, a więc na podstawie twierdzenia o funkcji odwrotnej równanie (9) określa także jednoznacznie y jako funkcję x.

Krzywa (9) ma asymptoty

$$y=C-\tfrac{1}{2}\pi a \quad \text{oraz} \quad y=C+\tfrac{1}{2}\pi a.$$

ZADANIE 8.2. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx}=(2x+y-3)^2-4x-2y+5. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Równanie powyższe sprowadzamy do omawianego typu, pisząc je w postaci

$$\frac{dy}{dx}=(2x+y-3)^2-2(2x+y-3)-1. \tag{2}$$

Wykonujemy podstawienie $2x+y-3=u$. Mamy

$$2+\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}, \quad \text{skąd} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-2.$$

Po podstawieniu do równania (2) otrzymujemy $\frac{du}{dx}-2=u^2-2u-1$, czyli

$$\frac{du}{dx}=(u-1)^2. \tag{3}$$

Chcemy rozdzielić zmienne, a więc musimy podzielić przez $(u-1)^2$; dlatego zakładamy, że $u-1\neq 0$, czyli $2x+y-4\neq 0$.

Sprawdzamy jednocześnie, czy prosta

$$2x+y-4=0 \tag{4}$$

jest linią całkową. W tym celu rozwiązujemy równanie (4) względem y i różniczkujemy; mamy $y=-2x+4$ i $\frac{dy}{dx}=-2$. Wartości te sprawdzają równanie (1), a więc prosta (4) jest linią całkową.

Dzielimy równanie (3) przez $(u-1)^2$; mamy

$$\frac{1}{(u-1)^2}\cdot\frac{du}{dx}=1, \tag{5}$$

jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, które przy przyjętym założeniu spełnia warunki twierdzenia z § 7.2. Całkowanie daje

$$\int\frac{du}{(u-1)^2}=\int dx, \tag{6}$$

skąd $\frac{-1}{u-1}=x+C$, czyli

$$u-1=-\frac{1}{x+C}.$$

Podstawiamy $u=2x+y-3$ i otrzymujemy $2x+y-4=-\frac{1}{x+C}$, skąd ostatecznie

$$y=-2x+4-\frac{1}{x+C}, \quad \text{gdzie} \quad C=-x_0-\frac{1}{2x_0+y_0-4}. \tag{7}$$

Równanie (7) przedstawia rodzinę hiperbol, których asymptotami są proste

$$x=-C \quad \text{i} \quad y+2x-4=0,$$

przy czym druga jest jednocześnie linią całkową. Przez każdy więc punkt płaszczyzny Oxy przechodzi jedna linia całkowa typu (4) lub (7).

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 8.3 - 8.17):

8.3. $\frac{dy}{dx}=x+y+3$.

8.4. $\frac{dy}{dx}=3x-2y+1$.

8.5. $\frac{dy}{dx}=5x-3y+7$.

8.6. $\frac{dy}{dx}=\sin(x-y)$.

8.7. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x+y}+2x+y-2$.

8.8. $\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$.

8.9. $\frac{dy}{dx}=(x-y)^2+1$.

8.10. $\frac{dy}{dx}=(8x+2y-3)^2$.

8.11. $\frac{dy}{dx}=(8x+2y+1)^2$.

8.12. $\frac{dy}{dx}=(x+2y+3)^2$.

8.13. $\frac{dy}{dx}=(4x+2y+5)^2$.

8.14. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$.

8.15. $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{(x+y)^2}$.

8.16. $2x+3y-1+(4x+6y-5)\frac{dy}{dx}=0$.

8.17. $2x-y+(4x-2y+3)\frac{dy}{dx}=0$.

§ 8.2. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE JEDNORODNE WZGLĘDEM x i y

Równanie różniczkowe jednorodne względem x i y jest to równanie typu

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{8.2.1}$$

Często spotykanym przypadkiem jest równanie postaci

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{8.2.2}$$

gdzie P i Q są wielomianami jednorodnymi względem x i y tego samego stopnia n (por. § 2.8); przez podzielenie licznika i mianownika przez x^n otrzymujemy równanie poprzedniej postaci.

Równanie różniczkowe typu (8.2.1) rozwiązujemy wprowadzając nową zmienną zależną przez podstawienie

$$u=\frac{y}{x}, \quad \text{czyli} \quad y=xu. \tag{8.2.3}$$

Po zróżniczkowaniu

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

i po podstawieniu do (8.2.1) otrzymujemy

$$u+x\frac{du}{dx}=f(u)\,; \tag{8.2.4}$$

stąd zakładając, że $x\neq 0$ oraz $f(u)-u\neq 0$, otrzymujemy równanie o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{1}{f(u)-u}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\,. \tag{8.2.5}$$

ZADANIE 8.18. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x^2\frac{dy}{dx}=x^2+xy+y^2\,. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Aby sprowadzić dane równanie do omawianego typu, musimy je podzielić przez x^2. W tym celu zakładamy, że $x\neq 0$.

Jednocześnie widać od razu, że prosta

$$x=0 \tag{2}$$

jest całką równania

$$x^2=(x^2+xy+y^2)\frac{dx}{dy}\,, \tag{3}$$

a tym samym i całką równania

$$x^2\,dy=(x^2+xy+y^2)\,dx\,. \tag{4}$$

Dzielimy równanie (1) obustronnie przez x^2; mamy

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\,. \tag{5}$$

Podstawiamy $\frac{y}{x}=u$, czyli $y=ux$, skąd $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$, i otrzymujemy $u+x\frac{du}{dx}=1+u+u^2$; stąd

$$x\frac{du}{dx}=1+u^2\,. \tag{6}$$

Otrzymane równanie przy założeniu, że $x\neq 0$, spełnia warunki twierdzenia z § 7.2. Rozdzielamy zmienne

$$\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\,. \tag{7}$$

Całkowanie daje

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

skąd

$$\operatorname{arctg} u = \ln|x| + C. \tag{8}$$

Z podanej równości wynika, że $-\frac{1}{2}\pi < \ln|x| + C < \frac{1}{2}\pi$. Równość (8) możemy zapisać w postaci

$$u = \operatorname{tg}(\ln|x| + C).$$

Podstawiając $u = \frac{y}{x}$ otrzymujemy ostatecznie

$$y = x \operatorname{tg}(\ln|x| + C). \tag{9}$$

Przez każdy punkt (x_0, y_0) nie leżący na osi Oy przechodzi jedna krzywa całkowa rodziny (9), gdzie $C = \operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0} - \ln|x_0|$.

Funkcja (9) jest nieparzysta. Z zależności (5) mamy $\frac{dy}{dx} = 1 + t + t^2$, gdzie $t = \frac{y}{x}$. Trójmian $1 + t + t^2$ ma wartość stale dodatnią (wyróżnik tego trójmianu jest ujemny), a więc funkcja (9) jest stale rosnąca.

ZADANIE 8.19. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$x^2 + y^2 = 2xy \frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Aby sprowadzić dane równanie do omawianego typu, musimy je podzielić przez xy. W tym celu założymy, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$.

Zauważmy, że prosta

$$x = 0 \tag{2}$$

jest całką równania

$$(x^2 + y^2)\frac{dx}{dy} = 2xy, \tag{3}$$

natomiast prosta $y = 0$ nie jest całką ani równania (1), ani równania (3).

Po podzieleniu równania (1) przez xy otrzymujemy

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}. \tag{4}$$

Wykonujemy podstawienie $\frac{y}{x} = u$, czyli $y = ux$, skąd $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, i otrzymujemy $2\left(u + x\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{u} + u$; stąd

$$2x\frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{u}. \tag{5}$$

Aby rozdzielić zmienne, musimy założyć, że $1-u^2\neq 0$, czyli $u\neq 1$ i $u\neq -1$, to znaczy, że $\frac{y}{x}\neq 1$ i $\frac{y}{x}\neq -1$, a więc, że $y-x\neq 0$, $y+x\neq 0$.

Sprawdzamy jednocześnie łatwo, że proste

$$y-x=0 \quad \text{i} \quad y+x=0 \tag{6}$$

są liniami całkowymi równania (1).

Dzielimy równanie (5) przez $-x\frac{1-u^2}{u}$; mamy

$$\frac{2u}{u^2-1}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}. \tag{7}$$

Równanie (7) przy założeniach $x\neq 0$ i $y\neq 0$ oraz $x\neq y$, $x\neq -y$ spełnia warunki twierdzenia z § 7.2. Całkowanie daje

$$\int\frac{2u\,du}{u^2-1}=-\int\frac{dx}{x}, \tag{8}$$

skąd

$$\ln|u^2-1|=-\ln|x|+C. \tag{9}$$

Przyjmując $C=\ln|C_1|$, $C_1\neq 0$, otrzymujemy

$$x(u^2-1)=C_1. \tag{10}$$

Przyjmujemy z powrotem $u=\frac{y}{x}$ i mnożymy obie strony równania (10) przez x; mamy

$$y^2-x^2=C_1x.$$

Przyjmując $C_1=-2C_2$ piszemy ostatecznie równanie w postaci

$$(x-C_2)^2-y^2=C_2^2. \tag{11}$$

Wobec poprzedniego założenia $C_1\neq 0$ jest także $C_2\neq 0$. Równanie to przedstawia rodzinę hiperbol równoosiowych, których osią rzeczywistą jest oś Ox, a oś urojona jest równoległa do osi Oy; asymptoty są równoległe do prostych (6), a jeden z wierzchołków leży w początku współrzędnych. Zauważmy, że z równania (11) otrzymujemy równania (6) przyjmując $C_2=0$.

Równanie więc (11) przy dowolnym C_2 daje wszystkie linie całkowe równania (1), a dla równania (3) dochodzi jeszcze $x=0$.

Aby napisać równanie linii całkowej, przechodzącej przez punkt (x_0, y_0), gdzie $x_0\neq 0$, rugujemy stałą C_2 z równań

$$x^2-2C_2x-y^2=0 \quad \text{i} \quad x_0^2-2C_2x_0-y_0^2=0.$$

Otrzymujemy równanie $x_0(x^2-y^2)-(x_0^2-y_0^2)x=0$, czyli

$$x^2-y^2-\frac{x_0^2-y_0^2}{x_0}x=0.$$

Zauważmy na koniec, że w punktach $(x_0, 0)$ zbiegają się dwie linie całkowe równania różniczkowego (1), będące obrazem pewnych funkcji $y=f(x)$, a przez takie punkty przechodzi jedna linia całkowa równania (3) o równaniu postaci $x=g(y)$.

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 8.20 - 8.51):

8.20. $x\frac{dy}{dx}=x+y$.

8.21. $(y-2x)\frac{dy}{dx}=2y+x$.

8.22. $x+y+x\frac{dy}{dx}=0$.

8.23. $8y+10x+(5y+7x)\frac{dy}{dx}=0$.

8.24. $(x+y)\frac{dy}{dx}+y=0$.

8.25. $(x+y)\frac{dy}{dx}-y=0$.

8.26. $(x+y)\frac{dy}{dx}-2y=0$.

8.27. $(x+y)\frac{dy}{dx}+x-y=0$.

8.28. $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$.

8.29. $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{y^2-x^2}$.

8.30. $2\sqrt{xy}-y+x\frac{dy}{dx}=0$.

8.31. $y+(2\sqrt{xy}-x)\frac{dy}{dx}=0$.

8.32. $x-\sqrt{xy}-y+\sqrt{xy}\frac{dy}{dx}=0$.

8.33. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}$.

8.34. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

8.35. $x\frac{dy}{dx}-y=x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

8.36. $x-y\cos\frac{y}{x}+x\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{dx}{dx}=0$.

8.37. $x\cos\frac{y}{x}(y\,dx+x\,dy)=y\sin\frac{y}{x}(x\,dy-y\,dx)$.

8.38. $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$.

8.39. $x\frac{dy}{dx}=y(1+\ln y-\ln x)$.

8.40. $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0$.

8.41. $(3x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0$.

8.42. $(x^2-xy)\frac{dy}{dx}+y^2=0$.

8.43. $(x^2+2xy)\frac{dy}{dx}=y^2$.

8.44. $xy\frac{dy}{dx}+x^2+y^2=0$.

8.45. $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$.

8.47. $3(x^2+2xy+y^2)+(2x^2+3xy)\frac{dy}{dx}=0$.

8.46. $xy+y^2-(2x^2+xy)\frac{dy}{dx}=0$.

8.48. $xy\frac{dy}{dx}=y^2+(x+y)^2e^{-y/x}$.

8.49. $xye^{x/y}+y^2-x^2e^{x/y}\frac{dy}{dx}=0$.

8.50. $y^3\frac{dy}{dx}+3xy^2+2x^3=0$.

8.51. $9y\frac{dy}{dx}-18xy+4x^3=0$.

Wskazówka (do zad. 8.51). Podstawić $y=t^2$.

§ 8.3. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE TYPU $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Przy rozwiązywaniu równań różniczkowych typu

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{8.3.1}$$

rozróżniamy dwa przypadki.

Przypadek 1: $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$. Wówczas układ równań

$$a_1x+b_1y+c_1=0, \quad a_2x+b_2y+c_2=0 \tag{8.3.2}$$

ma jedno rozwiązanie $x=\alpha$, $y=\beta$, gdzie α, β są stałe. Mamy wtedy

$$a_1x+b_1y+c_1=a_1(x-\alpha)+b_1(y-\beta), \quad a_2x+b_2y+c_2=a_2(x-\alpha)+b_2(y-\beta). \tag{8.3.3}$$

Wprowadźmy nowe zmienne

$$x-\alpha=u, \quad y-\beta=v. \tag{8.3.4}$$

Ponieważ $dx=du$, $dy=dv$, więc lewa strona równania różniczkowego (8.3.1) przekształci się na

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}.$$

Po uwzględnieniu w prawej stronie tegoż równania różniczkowego związków (8.3.3) i (8.3.4) otrzymujemy równanie

$$\frac{dv}{du}=f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right), \tag{8.3.5}$$

które jest jednorodne względem u i v (patrz § 8.2).

Przypadek 2: $a_1b_2-b_1a_2=0$. Wówczas współczynniki przy x i y w równaniach (8.3.2) są proporcjonalne; zakładamy że przynajmniej jeden ze współczynników b_1, b_2 różny jest od zera, np. $b_1\neq 0$. (W przeciwnym bowiem przypadku prawa strona równania w tytule zależałaby tylko od x). Mamy więc

$$a_2x+b_2y=k(a_1x+b_1y), \tag{8.3.6}$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności. Następnie wprowadzamy nową zmienną zależną

$$z=a_1x+b_1y, \tag{8.3.7}$$

przy czym jako zmienna niezależna pozostaje zmienna x, a zmienną y wyrugujemy z równania. Różniczkując ten związek otrzymujemy

$$\frac{dz}{dx}=a_1+b_1\frac{dy}{dx}; \tag{8.3.8}$$

po uwzględnieniu wzorów (8.3.6 - 8) równanie (8.3.1) przyjmie postać

$$\frac{dz}{dx}=a_1+b_1f\left(\frac{z+c_1}{kz+c_2}\right). \tag{8.3.9}$$

Równanie to nie zawiera jawnie zmiennej x; rozwiązujemy je metodą rozdzielenia zmiennych.

ZADANIE 8.52. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3y-1}{-3x-y+5}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Mamy tutaj $a_1b_2-b_1a_2=7\neq 0$. Z rozwiązania układu

$$2x+3y-1=0, \qquad -3x-y+5=0$$

otrzymujemy $x=2$, $y=-1$. Po zastosowaniu podstawień $x-2=u$, $y+1=v$, otrzymujemy według (8.3.5) równanie jednorodne

$$\frac{dv}{du}=\frac{2u+3v}{-3u-v}. \tag{2}$$

Zgodnie z metodą wyjaśnioną poprzednio (por. § 8.2) przyjmujemy $\frac{v}{u}=t$, czyli $v=tu$, skąd

$$\frac{dv}{du}=t+u\frac{dt}{du}.$$

Mamy więc

$$t+u\frac{dt}{du}=\frac{2+3t}{-3-t}, \qquad \text{czyli} \qquad u\frac{dt}{du}=\frac{t^2+6t+2}{-3-t}.$$

Rozdzielamy zmienne

$$\frac{du}{u}=\frac{(-t-3)\,dt}{t^2+6t+2}.$$

Pochodna mianownika prawej strony $2t+6$ jest równa licznikowi pomnożonemu przez -2, całkując więc otrzymujemy

$$\ln u=-\tfrac{1}{2}\ln\left(C(t^2+6t+2)\right),$$

a następnie

$$2\ln u=-\ln\left(C(t^2+6t+2)\right),\quad \text{czyli}\quad u^2=\frac{1}{C(t^2+6t+2)},$$

skąd

$$t^2+6t+\left(2-\frac{C'}{u^2}\right)=0,\quad \text{gdzie}\quad C'=\frac{1}{C}.$$

Stąd

$$t=-3\pm\sqrt{7+\frac{C'}{u^2}}. \tag{3}$$

Lecz $t=\frac{v}{u}$, skąd po usunięciu mianownika otrzymujemy

$$v=-3u\pm\sqrt{7u^2+C'}. \tag{4}$$

Na koniec wracamy do zmiennych x, y podług związków $u=x-2$, $v=y+1$; mamy

$$y+1=-3(x-2)\pm\sqrt{7(x-2)^2+C'}.$$

Ostatecznie

$$y=-3x+5\pm\sqrt{7(x-2)^2+C'}. \tag{5}$$

ZADANIE 8.53. Rozwiązać równanie

$$(x+2y+1)\,y'=2x+4y+3. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Mamy tutaj $a_1b_2-b_1a_2=0$. Zgodnie ze wzorem (8.3.7) podstawiamy $z=2x+4y$, skąd

$$\frac{dz}{dx}=2+4\frac{dy}{dx},\quad \text{czyli}\quad \frac{dz}{dx}=2+4\,\frac{z+3}{\frac{1}{2}z+1}.$$

Po redukcji i rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy

$$\frac{z+2}{10z+28}\,dz=dx. \tag{2}$$

Całkujemy obie strony

$$x=\frac{1}{10}\int\left(1-\frac{0{,}8}{z+2{,}8}\right)dz.$$

Mamy $x=0{,}1z-0{,}08\ln C(z+2{,}8)$, lecz $z=2x+4y$, więc

$$100x=20x+40y-8\ln C(2x+4y+2{,}8),$$

skąd $\ln C(2x+4y+2{,}8)=5y-10x$, czyli ostatecznie

$$e^{5y-10x}=C(2x+4y+2{,}8). \tag{3}$$

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 8.54 - 8.64):

8.54. $2(x-2y+1)+(5x-y-4)\frac{dy}{dx}=0$.

8.55. $3y-7x+7+(7y-3x+3)\frac{dy}{dx}=0$.

8.56. $x-3y+2+(3x-y-2)\frac{dy}{dx}=0$.

8.57. $x-2y+9-(3x-6y+19)\frac{dy}{dx}=0$.

8.58. $(2y-x+1)\frac{dy}{dx}=-2x+y-1$.

8.59. $(2x-y-1)\frac{dy}{dx}=x-2y+1$.

8.60. $3x+3y-1+(x+y+1)\frac{dy}{dx}=0$.

8.61. $x+y+1+(2x+2y-1)\frac{dy}{dx}=0$.

8.62. $x+y-2+(x-y+4)\frac{dy}{dx}=0$.

8.63. $x-2y+5+(2x-y+4)\frac{dy}{dx}=0$.

8.64. $6x^3(2y\,dx-3x\,dy)+y^4(-3y\,dx+2x\,dy)=0$.

Rozdział IX

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE RZĘDU PIERWSZEGO

§ 9.1. DEFINICJE

Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{9.1.1}$$

liniowe względem y i y', nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego*. W dalszym ciągu zakładamy ciągłość funkcji $p(x)$ i $q(x)$ w pewnym wspólnym przedziale.

Z twierdzenia podanego w § 7.1 wynika, że *jeżeli funkcje* $p(x)$ i $q(x)$ *są ciągłe w przedziale* $a\leqslant x\leqslant b$, *to przez każdy punkt* (x_0, y_0) *taki, że* $a<x_0<b$, y_0 *dowolne, przechodzi dokładnie jedna linia całkowa* $y=f(x)$ *równania różniczkowego* (9.1.1), *przy czym funkcja* $y=f(x)$ *ma ciągłą pochodną*.

Jeżeli w równaniu (9.1.1) jest $q(x)\equiv 0$, to równanie nazywamy *równaniem jednorodnym* względem y i y' (lub *uproszczonym*); w przypadku przeciwnym – *równaniem niejednorodnym* (lub *równaniem w postaci ogólnej*).

§ 9.2. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE JEDNORODNE

Jak już mówiliśmy, równanie

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \tag{9.2.1}$$

nazywamy *równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym*. Łatwo sprawdzić, że jedną z linii całkowych tego równania jest

$$y=0. \tag{9.2.2}$$

Załóżmy teraz, że $y\neq 0$. Wtedy zmienne dadzą się rozdzielić; mamy

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-p(x). \tag{9.2.3}$$

Równanie to spełnia warunki twierdzenia z § 7.2. Całkowanie daje

$$\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)\,dx.$$

Po prawej stronie mamy całkę funkcji ciągłej, a więc całka ta istnieje. Oznaczamy krótko: $\int p(x)dx = P(x)+C$. Wtedy mamy

$$\ln|y| = -P(x)+C.$$

Podstawiamy $C=\ln|C_1|$, $C_1 \neq 0$, i uwalniamy się od logarytmów; mamy

$$y = C_1 e^{-P(x)} \tag{9.2.4}$$

Całkę tę napiszemy w postaci

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} \tag{9.2.5}$$

Całka ta spełnia warunek początkowy, że dla $x=x_0$ jest $y=y_0$ i obejmuje całkę (9.2.2), gdy $y_0=0$.

ZADANIE 9.1. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx}+xy=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Mamy

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} = -xy.$$

Zauważamy, że $y=0$ jest całką równania (1). W dalszym ciągu przyjmujemy, że $y\neq 0$. Dzielimy obie strony równości przez ye^{x^2}; mamy

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -xe^{-x^2}.$$

Całkowanie daje

$$\int\frac{dy}{y} = -\int xe^{-x^2}dx.$$

Stąd mamy $\ln|y| = \frac{1}{2}e^{-x^2}+C$. Podstawiając $C=\ln|C_1|$, $C_1\neq 0$, otrzymujemy

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x^2}. \tag{2}$$

Linie te także zawierają całkę $y=0$, gdy $C_1=0$.

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 9.2 - 9.7):

9.2. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-1}{x^2}y$.

9.3. $\frac{dy}{dx}=y\operatorname{tg}x$.

9.4. $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}y$.

9.5. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2-4}y$.

9.6. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3x}y$.

9.7. $\frac{dy}{dx}=y(x\sin x-\cos x)$.

§ 9.3. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE NIEJEDNORODNE

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \tag{9.3.1}$$

rozwiązujemy tzw. *metodą uzmienniania stałej*. W tym celu rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne (9.2.1), czyli

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0. \tag{9.3.2}$$

Całką tego równania jest (por. (9.2.5)):

$$y=Ce^{-P(x)}, \quad \text{gdzie} \quad P(x)=\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi.$$

Teraz stałą C zastępujemy funkcją $u(x)$ tak dobraną, żeby funkcja

$$y=u(x)e^{-P(x)} \tag{9.3.3}$$

była całką równania (9.3.1); powyższy krok tłumaczy nazwę: *metoda uzmienniania stałej*.

Obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}e^{-P(x)}+u(x)e^{-P(x)}\left(-p(x)\right),$$

przy czym uwzględniamy związek $\frac{dP(x)}{dx}=p(x)$. Po uporządkowaniu mamy

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}e^{-P(x)}-u(x)p(x)e^{-P(x)}. \tag{9.3.4}$$

Podstawiamy wartości (9.3.3) i (9.3.4) do równania (9.3.1); otrzymujemy

$$\frac{du}{dx}e^{-P(x)}-u(x)p(x)e^{-P(x)}+p(x)u(x)e^{-P(x)}=q(x),$$

a po redukcji $\frac{du}{dx}e^{-P(x)}=q(x)$, czyli

$$\frac{du}{dx}=q(x)e^{P(x)}. \tag{9.3.5}$$

Funkcja stojąca po prawej stronie równania (9.3.5) jest ciągła, ponieważ funkcja $P(x)$, jako całka nieoznaczona, jest nawet różniczkowalna; podobnie $e^{P(x)}$, funkcja $q(x)$ jest z założenia ciągła. Tym samym funkcja po prawej stronie równania (9.3.5) jest całkowalna. Możemy więc napisać

$$u(x)=Q(x)+C_1, \quad \text{gdzie} \quad Q(x)=\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt. \tag{9.3.6}$$

Wartość $u(x)$ podstawiamy do równania (9.3.3); otrzymujemy (por. też § 9.4, wzór (9.4.3)):

$$y=Q(x)e^{-P(x)}+C_1 e^{-P(x)}. \tag{9.3.7}$$

Przyjmując $C_1=y_0$ otrzymujemy linię całkową spełniającą warunek początkowy, że dla $x=x_0$ jest $y=y_0$. Wypiszmy to wyraźnie

$$y=\left(\int_{x_0}^{x} q(t)e^{\int_{x_0}^{t} p(\xi)\,d\xi}\,dt+y_0\right)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi} \tag{9.3.8}$$

Ponieważ przy naszych założeniach przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna linia całkowa, linie (9.3.8) wyczerpują jednocześnie wszystkie możliwe rozwiązania.

ZADANIE 9.8. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$\frac{dy}{dx}-xy=xe^{x^2}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$\frac{dy}{dx}-xy=0. \tag{2}$$

Rozdzielamy zmienne; mamy $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=x$, zakładając, że $y\neq 0$. Całkujemy

$$\int\frac{dy}{y}=\int x\,dx, \quad \text{czyli} \quad \ln|y|=\tfrac{1}{2}x^2+C.$$

Podstawiając $C=\ln|C_1|$, $C_1\neq 0$, i uwalniając się od logarytmów, otrzymujemy

$$y=C_1 e^{\frac{1}{2}x^2}. \tag{3}$$

Otrzymaliśmy całkę równania jednorodnego (2).

Aby otrzymać całkę równania niejednorodnego (1), uzmienniamy w całce (3) stałą C_1, to znaczy zastępujemy C_1 jakąś funkcją $u(x)$. Mamy

$$y=u(x)e^{\frac{1}{2}x^2}. \tag{4}$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}e^{\frac{1}{2}x^2}+u(x)e^{\frac{1}{2}x^2}x.$$

Wartości y i y' wstawiamy do równania (1); mamy

$$\frac{du}{dx}e^{\frac{1}{2}x^2}+xu(x)e^{\frac{1}{2}x^2}-xu(x)e^{\frac{1}{2}x^2}=xe^{x^2},$$

skąd po redukcji otrzymujemy $\frac{du}{dx}e^{\frac{1}{2}x^2}=xe^{x^2}$, czyli

$$\frac{du}{dx}=xe^{\frac{1}{2}x^2},$$

a stąd

$$u(x)=\int x e^{\frac{1}{2}x^2}dx=e^{\frac{1}{2}x^2}+C_2. \tag{5}$$

Podstawiamy wartość $u(x)$ do równania (4) otrzymując

$$y=e^{x^2}+C_2 e^{\frac{1}{2}x^2}. \tag{6}$$

Ponieważ funkcje x i xe^{x^2} są ciągłe przy wszelkich wartościach x, więc przez każdy punkt (x_0, y_0) płaszczyzny Oxy przechodzi dokładnie jedna linia całkowa typu (6), mianowicie

$$y=e^{x^2}+(y_0-e^{x_0^2})e^{\frac{1}{2}(x^2-x_0^2)}. \tag{7}$$

ZADANIE 9.9. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$x\frac{dy}{dx}-y=2x^3. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Aby dane równanie sprowadzić do typu omawianego, musimy je podzielić przez x, a więc należy założyć, że $x\neq 0$. Wtedy równanie (1) możemy napisać w postaci

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=2x^2. \tag{2}$$

Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0.$$

Przy założeniu, że $y\neq 0$, otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

o zmiennych rozdzielonych. Całkowanie daje

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}, \quad \text{czyli} \quad \ln|y|=\ln|x|+C.$$

Po podstawieniu $C=\ln|C_1|$, $C_1\neq 0$, otrzymujemy

$$y=C_1 x. \tag{3}$$

Uzmienniamy teraz stałą C_1 podstawiając $u(x)$ w miejsce C_1; mamy

$$y=x\,u(x). \tag{4}$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx}=u(x)+x\frac{du}{dx}.$$

Podstawiamy obliczone wartości do równania (1); mamy

$$xu(x)+x^2\frac{du}{dx}-xu(x)=2x^3,$$

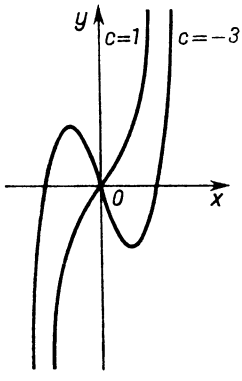
skąd po redukcji i podzieleniu przez x^2 otrzymujemy $\frac{du}{dx}=2x$, czyli, po całkowaniu:

$$u(x)=x^2+c. \tag{5}$$

Podstawiamy otrzymaną wartość $u(x)$ do równania (4) i otrzymujemy ostatecznie

$$y=x^3+cx. \tag{6}$$

Zauważmy, że każda krzywa całkowa (6) (rys. 9.1) przechodzi przez początek współrzędnych, który jest punktem przegięcia krzywej, gdyż



Rys. 9.1

$$y'=3x^2+c, \quad y''=6x, \quad y'''=6,$$

skąd

$$y'(0)=c, \quad y''(0)=0, \quad y'''(0)=6.$$

Stała c jest współczynnikiem kątowym stycznej do krzywej całkowej (6) w punkcie $O(0,0)$.

Przez każdy punkt płaszczyzny (x_0, y_0) z wyjątkiem osi Oy, czyli dla $x_0\neq 0$, przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa typu (6), mianowicie

$$y=x^3+\frac{y_0-x_0^3}{x_0}x.$$

Przez początek współrzędnych przechodzi nieskończenie wiele linii (6), przez inne punkty osi Oy – żadna.

Zauważmy na koniec, że prosta $x=0$ jest linią całkową równania ogólniejszego niż (1), mianowicie równania

$$xdy=(y+2x^3)dx. \tag{7}$$

ZADANIE 9.10. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$\frac{dy}{dx}\sin x+y\cos x=\sin 2x. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Aby sprowadzić dane równanie do postaci badanej, musimy je podzielić przez $\sin x$, a więc założyć, że $\sin x\neq 0$, czyli $x\neq k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Po podzieleniu przez $\sin x$ i podstawieniu $\sin 2x=2\sin x\cos x$ otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx}+y\operatorname{ctg}x=2\cos x. \tag{2}$$

Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$\frac{dy}{dx}+y\operatorname{ctg}x=0. \tag{3}$$

Rozdzielamy zmienne

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg}x \quad (y\neq 0).$$

Całkowanie daje

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\operatorname{ctg}x\,dx+C, \quad \text{czyli} \quad \ln|y|=-\ln|\sin x|+C.$$

Przyjmujemy $C=\ln|C_1|$, $C_1\neq 0$, i uwalniamy się od logarytmów

$$y=\frac{C_1}{\sin x}. \tag{4}$$

Uzmienniamy stałą C_1 podstawiając $C_1=u(x)$; mamy

$$y=\frac{u(x)}{\sin x}. \tag{5}$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}\sin x-u(x)\cos x}{\sin^2 x}.$$

Otrzymane wartości wstawiamy do równania (1); mamy

$$\sin x\,\frac{\frac{du}{dx}\sin x-u(x)\cos x}{\sin^2 x}+\cos x\,\frac{u(x)}{\sin x}=\sin 2x,$$

skąd po redukcji otrzymujemy $\frac{du}{dx}=\sin 2x$. Całkujemy

$$u(x)=-\tfrac{1}{2}\cos 2x+C_2.$$

Podstawiamy wartość $u(x)$ do równania (5); otrzymujemy

$$y=-\frac{\cos 2x}{2\sin x}+\frac{C_2}{\sin x}. \tag{6}$$

Całkę tę jeszcze nieco uprościmy, stosując wzór $\cos 2x=1-2\sin^2 x$. Wtedy otrzymujemy

$$y=\frac{2\sin^2 x-1}{2\sin x}+\frac{C_2}{\sin x}, \quad \text{czyli} \quad y=\sin x+\frac{C_2-\frac{1}{2}}{\sin x}.$$

Oznaczając $C_2-\frac{1}{2}=C_3$ otrzymujemy ostatecznie

$$y=\sin x+\frac{C_3}{\sin x}. \tag{7}$$

Przez punkt (x_0, y_0) nie leżący na prostej $x=k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, przechodzi krzywa całkowa

$$y=\sin x+\frac{(y_0-\sin x_0)\sin x_0}{\sin x}. \tag{8}$$

Proste o równaniu

$$x=k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{9}$$

są asymptotami krzywych (7).

Proste (8) są liniami całkowymi równania ogólniejszego niż (1), mianowicie równania

$$\sin x\, dy=(\sin 2x-y\cos x)\, dx. \tag{10}$$

ZADANIE 9.11. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$\cos x\frac{dy}{dx}+2y\sin x=2\sin x. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Aby sprowadzić równanie do postaci badanej, musimy je podzielić przez $\cos x$. W tym celu zakładamy, że $\cos x\neq 0$, czyli $x\neq\frac{1}{2}(2k+1)\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Po podzieleniu otrzymujemy

$$\frac{dy}{dx}+2y\operatorname{tg}x=2\operatorname{tg}x. \tag{2}$$

Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$\frac{dy}{dx}+2y\operatorname{tg}x=0. \tag{3}$$

Rozdzielamy zmienne

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=-2\operatorname{tg}x \quad (y\neq 0).$$

Całkowanie daje

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int\operatorname{tg}x\,dx, \quad \text{skąd} \quad \ln|y|=2\ln|\cos x|+C.$$

Przyjmujemy $C=\ln|C_1|$, $C_1\neq 0$, i uwalniamy się od logarytmów

$$y=C_1\cos^2 x. \tag{4}$$

Uzmienniamy stałą C_1 przyjmując $C_1=u(x)$; mamy

$$y=u(x)\cos^2 x. \tag{5}$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cos^2 x-2u(x)\cos x\sin x.$$

Podstawiamy wartości y i y' do równania (1); mamy

$$\frac{du}{dx}\cos^3 x - 2u(x)\sin x\cos^2 x + 2u(x)\sin x\cos^2 x = 2\sin x,$$

skąd po redukcji

$$\frac{du}{dx} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Całkujemy

$$u(x) = \int \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{1}{\cos^2 x} + C_2. \tag{6}$$

Podstawiamy otrzymaną wartość do wzoru (5); otrzymujemy

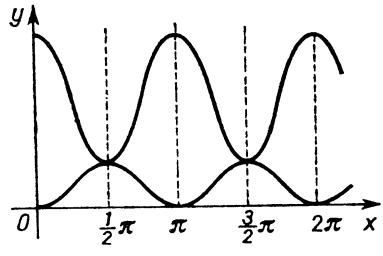
$$y = 1 + C_2\cos^2 x. \tag{7}$$

Przez każdy punkt (x_0, y_0) płaszczyzny Oxy z wyjątkiem punktów leżących na prostych

$$y = \tfrac{1}{2}(2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{8}$$

gdzie k jest liczbą całkowitą, przechodzi linia całkowa

$$y = 1 + \frac{y_0 - 1}{\cos^2 x_0}\cos^2 x. \tag{9}$$



Rys. 9.2

Każda krzywa całkowa (7) przecina każdą prostą (8) w punkcie o rzędnej równej 1 (rys. 9.2), a przez pozostałe punkty prostych (8) nie przechodzi żadna krzywa (7). Rysunek 9.2 przedstawia krzywe całkowe dla $C_2 = -1$ i $C_2 = 3$.

Zauważmy na koniec, że proste (8) są liniami całkowymi równania ogólniejszego niż równanie (1), mianowicie równania

$$\cos x\,dy = 2(1-y)\sin x\,dx. \tag{10}$$

ZADANIE 9.12. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3\cos x. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x \neq 0$, i dzielimy równanie przez x; mamy

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = x^2\cos x. \tag{2}$$

Rozwiązujemy równanie liniowe jednorodne

$$\frac{dy}{dx}-2\frac{y}{x}=0. \tag{3}$$

Rozdzielamy zmienne

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x} \quad (y\neq 0).$$

Całkowanie daje

$$\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x}, \quad \text{skąd} \quad \ln|y|=2\ln|x|+C.$$

Przyjmujemy $C=\ln|C_1|$, $C_1\neq 0$, i uwalniamy się od logarytmów

$$y=C_1x^2. \tag{4}$$

Uzmienniamy stałą C_1 przyjmując $C_1=u(x)$; mamy

$$y=x^2u(x). \tag{5}$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx}=2xu(x)+x^2\frac{du}{dx}.$$

Podstawiamy powyższe wartości y i y' do równania (1); mamy

$$2x^2u(x)+x^3\frac{du}{dx}-2x^2u(x)=x^3\cos x.$$

Po redukcji i uproszczeniu otrzymujemy $\frac{du}{dx}=\cos x$. Całkujemy

$$u(x)=\sin x+C_2. \tag{6}$$

Podstawiamy otrzymaną wartość do wzoru (5); otrzymujemy

$$y=x^2\sin x+C_2x^2. \tag{7}$$

Przez punkt (x_0, y_0), gdzie $x_0\neq 0$, przechodzi krzywa całkowa

$$y=x^2\sin x+\left(\frac{y_0}{x_0^2}-\sin x_0\right)x^2. \tag{8}$$

Wszystkie linie (7) przechodzą przez początek współrzędnych, a w żadnym innym punkcie nie przecinają prostej

$$x=0. \tag{9}$$

Prosta (8) jest linią całkową równania ogólniejszego niż (1), mianowicie równania

$$x\,dy=(x^3\cos x+2y)\,dx. \tag{10}$$

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 9.13 - 9.48):

9.13. $\frac{dy}{dx}-3y=2$.

9.14. $\frac{dy}{dx}-2xy=x-x^3$.

9.15. $\frac{dy}{dx}+2xy=xe^{-x^2}$.

9.16. $\frac{dy}{dx}+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

9.17. $\frac{dy}{dx}+y\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

9.18. $\frac{dy}{dx}-y\operatorname{tg}x=2\cos^2 x$.

9.19. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=2$.

9.20. $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$.

9.21. $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1+x^2}=\frac{1}{x(1+x^2)}$.

9.22. $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1+x^2}=-\frac{1}{2x(1+x^2)}$.

9.23. $\frac{dy}{dx}+\frac{ay}{1+x^2}=\frac{b}{1+x^2}$.

9.24. $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1-x^2}=\frac{ax}{1-x^2}$.

9.25. $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{a^2+x^2}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}$.

9.26. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{\sin x}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

9.27. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\operatorname{arctg}x$.

9.28. $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1+x^2}=\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$.

9.29. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{\sqrt{1+x^2}}=a\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

9.30. $x\frac{dy}{dx}-2y=x+1$.

9.31. $x\frac{dy}{dx}+3y=x^2$.

9.32. $x\frac{dy}{dx}+y=x\sin x$.

9.33. $x\frac{dy}{dx}-2y=xe^{-1/x}$.

9.34. $2x\frac{dy}{dx}-y=\frac{3}{2}x^2$.

9.35. $x^2\frac{dy}{dx}-2xy=3$.

9.36. $x^2\frac{dy}{dx}-2xy=3y$.

9.37. $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=a$.

9.38. $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+x(y-a)=0$.

9.39. $(y^2-6x)\frac{dy}{dx}+2y=0$.

Wskazówka (do zad. 9.39). Przyjąć y za zmienną niezależną, a x za zmienną zależną.

9.40. $x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+(2x^2-1)y=ax^3$.

9.41. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=\operatorname{arctg} x$.

9.42. $\frac{dy}{dx}\cos x+y\sin x=1$.

9.43. $\frac{dy}{dx}\cos x-y\sin x=\sin 2x$.

9.44. $\frac{dy}{dx}\cos x-y\sin x=\cos^2 x$.

9.45. $\frac{dy}{dx}\cos x+y\sin x=x\cos x+\frac{1}{2}x^2\sin x$.

9.46. $\frac{dy}{dx}\operatorname{tg} x-y=\frac{1}{4}x(2\operatorname{tg} x-x)$.

9.47. $\frac{dy}{dx}\operatorname{ctg} x-y=2\cos^2 x\operatorname{ctg} x$.

9.48. $(1-x^2)^{3/2}\frac{dy}{dx}=xy+(1-x^2)^{3/2}e^{1/\sqrt{1-x^2}}\cos^2 x$.

§ 9.4. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE NIEJEDNORODNE (cd.)

Rozwiązując równanie liniowe metodą uzmiennienia stałej otrzymaliśmy całkę ogólną (9.3.7):

$$y=y_1+y_2$$

jako sumę całki szczególnej $y_1=Q(x)\,e^{-P(x)}$ równania niejednorodnego (9.3.1) oraz całki ogólnej $y_2=C_1\,e^{-P(x)}$ równania jednorodnego (9.3.2). Tak np. w zadaniu 9.8 mieliśmy $y_1=e^{x^2}$, $y_2=C_1\,e^{\frac{1}{2}x^2}$, a w zadaniu 9.9 mieliśmy $y_1=x^3$, $y_2=C_1x$.

Przedstawienie takie nie jest jednak jednoznaczne, bo np. w zadaniu 9.11 otrzymaliśmy całkę ogólną $y=1+C_1\cos^2 x$, która na podstawie związku $1=\sin^2 x+\cos^2 x$ może być przedstawiona w postaci $y=\sin^2 x+C_2\cos^2 x$, gdzie $C_2=C_1+1$.

Jeżeli funkcja $y_1(x)$ jest całką szczególną równania różniczkowego liniowego niejednorodnego

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x), \tag{9.4.1}$$

a funkcja $y_2(x)$ jest całką ogólną jego równania jednorodnego

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0, \tag{9.4.2}$$

tzn. są spełnione tożsamościowo równania

$$\frac{dy_1}{dx}+p(x)y_1(x)=q(x), \qquad \frac{dy_2}{dx}+p(x)y_2(x)=0$$

to funkcja

$$y=y_1(x)+y_2(x), \tag{9.4.3}$$

jest całką ogólną równania niejednorodnego (9.3.1).

Jeżeli funkcja $y_2(x)$ nie jest tożsamościowo równa zeru, to wzór (9.4.3) *wyczerpuje wszystkie rozwiązania równania* (9.4.1).

Na tym twierdzeniu opiera się inna metoda rozwiązywania równania różniczkowego liniowego (9.4.1), zwana *metodą przewidywania*:

Jeżeli uda się znaleźć w jakiś sposób (np. przez odgadnięcie) całkę szczególną równania niejednorodnego (9.4.1), to wystarczy do niej dodać całkę ogólną równania jednorodnego (9.4.2) (którą znajdujemy stosunkowo łatwo), aby otrzymać wszystkie możliwe rozwiązania równania niejednorodnego.

Omówimy poniżej kilka typów równań liniowych, w których stosunkowo łatwo można odgadnąć całkę szczególną równania niejednorodnego. W każdym przypadku, jeżeli „przewidywanie" się nam nie powiedzie, możemy stosować metodę uzmienniania stałej.

Wadą metody przewidywań jest niepewność dojścia do celu, zaletą – szybkie otrzymanie wyniku i uniknięcie żmudnych nieraz całkowań.

Równanie różniczkowe typu $y'+ay=be^{cx}$, gdzie a, b, c, są stałe

Przewidujemy w tym przypadku rozwiązanie szczególne w postaci $y_1=me^{cx}$, gdzie stała m musi być odpowiednio dobrana.

ZADANIE 9.49. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$\frac{dy}{dx}-2y=2e^{3x}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Przewidujemy rozwiązanie szczególne równania (1) w postaci

$$y_1=me^{3x}. \tag{2}$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dy_1}{dx}=3me^{3x}.$$

Wartości y_1 i dy_1/dx podstawiamy do równania (1); mamy

$$3me^{3x}-2me^{3x}=2e^{3x}.$$

Stąd po uproszczeniu przez e^{3x} znajdujemy $m=2$. Podstawiając wartość m do równania (2) otrzymujemy całkę szczególną równania (1):

$$y_1(x)=2e^{3x}. \tag{3}$$

Obliczamy teraz całkę ogólną równania uproszczonego

$$\frac{dy}{dx}-2y=0, \tag{4}$$

czyli

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=2.$$

Całkowanie daje

$$\int\frac{dy}{y}=2\int dx, \quad \text{czyli} \quad \ln|y|=2x+C.$$

Przyjmując $C=\ln|C_1|$, $C_1\neq 0$, otrzymujemy $y=C_1e^{2x}$. A więc całka ogólna równania (4) ma postać

$$y_2(x)=C_1e^{2x}. \tag{5}$$

Całka ogólna równania (1) na podstawie wzoru (9.4.3) jest więc równa

$$y=2e^{3x}+C_1e^{2x}. \tag{6}$$

ZADANIE 9.50. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$\frac{dy}{dx}-4y=2e^{4x}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Przewidujemy całkę szczególną równania (1) w postaci

$$y_1=me^{4x}. \tag{2}$$

Różniczkujemy

$$\frac{dy_1}{dx}=3me^{4x}. \tag{3}$$

Wartość (2) i (3) podstawiamy do równania (1) i otrzymujemy

$$4me^{4x}-4me^{4x}=2e^{4x},$$

co jest równością niemożliwą.

Pierwsza próba w postaci całki szczególnej $y_1=me^{4x}$ zawiodła. Robimy drugą próbę przewidując całkę w postaci

$$y_1=(mx+n)e^{4x}. \tag{4}$$

Różniczkujemy

$$\frac{dy_1}{dx}=(4mx+4n+m)e^{4x}. \tag{5}$$

Podstawiamy wartości (4) i (5) do równania (1) i otrzymujemy równość

$$me^{4x}=2e^{4x},$$

skąd znajdujemy $m=2$, natomiast z powyższego rachunku widać, że wartość n może być dowolna. Podstawiając w równaniu (4) wartość $m=2$ i zastępując n literą C, a y_1 literą y, otrzymujemy całkę równania (1) w postaci

$$y=(2x+C)e^{4x}. \tag{6}$$

Jest to całka ogólna równania (1).

Uwaga. Gdy pierwsza próba zawiodła, mogliśmy też zastosować metodę uzmiennienia stałej. Wykonamy to dla kontroli znalezionego rozwiązania (6).

Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$\frac{dy}{dx}-4y=0. \tag{7}$$

Rozdzielamy zmienne

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=4.$$

Stąd po scałkowaniu otrzymujemy (podobnie jak w zadaniu 9.49) całkę równania jednorodnego

$$y_2=Ce^{4x}. \tag{8}$$

Uzmienniamy stałą

$$y=u(x)e^{4x} \tag{9}$$

i obliczamy pochodną

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}e^{4x}+4u(x)e^{4x}. \tag{10}$$

Wartości (9) i (10) wstawiamy do równania (1); mamy

$$\frac{du}{dx}e^{4x}+4u(x)e^{4x}-4u(x)e^{4x}=2e^{4x}.$$

Stąd po redukcji i uproszczeniu przez e^{4x} otrzymujemy $\frac{du}{dx}=2$ i po scałkowaniu mamy

$$u(x)=2x+C_1.$$

Podstawiając obliczoną wartość $u(x)$ do wzoru (9) otrzymujemy ostatecznie

$$y=(2x+C_1)e^{4x}.$$

Równanie różniczkowe typu $y'+ay=W_n(x)$, gdzie a jest liczbą stałą, a $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia n

Przewidujemy w tym przypadku rozwiązanie szczególne w postaci wielomianu stopnia n.

ZADANIE 9.51. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$\frac{dy}{dx}+2y=x^2. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Przewidujemy rozwiązanie szczególne w postaci

$$y_1=ax^2+bx+c, \quad \text{gdzie} \quad a, b, c \text{ są stałe}. \tag{2}$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dy_1}{dx}=2ax+b\,.$$

Podstawiamy powyższe wartości do równania (1); otrzymujemy tożsamość

$$2ax+b+2ax^2+2bx+2c=x^2\,.$$

Przyrównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x otrzymujemy związki

$$2a=1\,,\quad 2a+2b=0\,,\quad b+2c=0\,,$$

skąd znajdujemy $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$. Podstawiamy powyższe wartości do wzoru (2); otrzymujemy

$$y_1=\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\,.$$

Rozwiązując teraz równanie jednorodne

$$\frac{dy}{dx}+2y=0\,, \tag{3}$$

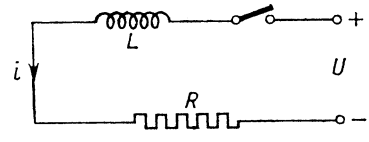
podobnie jak w poprzednich zadaniach, łatwo znajdujemy całkę ogólną tego równania

$$y_2=Ce^{-2x}.$$

Całka ogólna równania (1) jest więc

$$y=\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}+Ce^{-2x}. \tag{4}$$

ZADANIE 9.52. Do zacisków źródła o stałym napięciu U w chwili $t=0$ zostaje podłączony obwód (rys. 9.3) zawierający dławik o indukcyjności L i oporze rzeczywistym R. Wyznaczyć przebieg zmian natężenia prądu $i=f(t)$ po włączeniu obwodu do źródła. Wiemy, że dla $t=0$ jest $i=0$.



Rys. 9.3

Rozwiązanie. Na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

$$L\frac{di}{dt}+Ri=U\,. \tag{1}$$

Rozwiązujemy równanie różniczkowe liniowe jednorodne

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0\,, \tag{2}$$

skąd mamy

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int dt.$$

Rozwiązaniem ogólnym równania (2) jest

$$i_1 = Ce^{-Rt/L}.$$

Obecnie metodą przewidywań poszukujemy rozwiązania szczególnego równania różniczkowego (1). Przewidujemy $i_2 = A$; mamy $RA = U$, skąd $A = \frac{U}{R}$, zatem

$$i_2 = \frac{U}{R}.$$

Ostatecznie mamy

$$i = i_1 + i_2 = Ce^{-Rt/L} + \frac{U}{R}. \tag{3}$$

Ponieważ dla $t=0$ jest $i=0$, więc podstawiamy $C = -\frac{U}{R}$ i otrzymujemy

$$i = \frac{U}{R}(1 - e^{-Rt/L}). \tag{4}$$

Równania różniczkowe typu $y' + by = c \sin ax + d \cos ax$, gdzie a, b, c, d są stałe

Przewidujemy w tym przypadku rozwiązanie szczególne w postaci

$$y_1 = m \sin ax + n \cos ax,$$

gdzie m i n są stałe.

ZADANIE 9.53. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$\frac{dy}{dx} + y = 5 \sin 3x. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Przewidujemy całkę szczególną w postaci

$$y_1 = m \sin 3x + n \cos 3x, \tag{2}$$

gdzie m i n są stałe. Obliczamy pochodną

$$\frac{dy_1}{dx} = 3m \cos 3x - 3n \sin 3x. \tag{3}$$

Wstawiamy wartości (2) i (3) do równania (1); mamy

$$3m \cos 3x - 3n \sin 3x + m \sin 3x + n \cos 3x = 5 \sin 3x.$$

Przyrównując współczynniki przy $\sin 3x$ i przy $\cos 3x$ po obu stronach równości otrzymujemy związki

$$m-3n=5, \quad 3m+n=0,$$

skąd znajdujemy $m=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{3}{2}$. Zatem

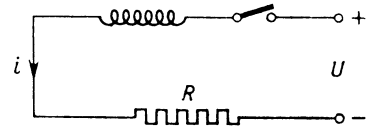
$$y_1=\tfrac{1}{2}\sin 3x-\tfrac{3}{2}\cos 3x. \tag{4}$$

Całkę równania jednorodnego obliczamy podobnie jak w poprzednich zadaniach; otrzymujemy $y_2=Ce^{-x}$.

Całka ogólna równania (1) jest więc

$$y=\tfrac{1}{2}\sin 3x-\tfrac{3}{2}\cos 3x+Ce^{-x}. \tag{5}$$

ZADANIE 9.54. Do zacisków źródła prądu zmiennego o napięciu $u=U\sin\omega t$ (ω – pulsacja, t – czas, U – napięcie maksymalne) zostaje włączony obwód zawierający dławik o indukcyjności L i oporze rzeczywistym R. Wyznaczyć przebieg zmian natężenia prądu $i=f(t)$ po włączeniu obwodu do źródła (rys. 9.4).



Rys. 9.4

Rozwiązanie. Wiemy na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa, że $i=f(t)$ spełnia równanie różniczkowe

$$L\frac{di}{dt}+Ri=U\sin\omega t \tag{1}$$

oraz że dla $t=0$ jest $i=0$. Po wyznaczeniu rozwiązania ogólnego $i_1=Ce^{-Rt/L}$ równania jednorodnego odpowiadającego równaniu (1) oraz rozwiązania

$$i_2=\frac{UR}{R^2+(\omega L)^2}\sin\omega t-\frac{U\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\cos\omega t$$

szczególnego równania różniczkowego (1), piszemy funkcję, która jest ogólnym rozwiązaniem równania różniczkowego (1):

$$i=i_1+i_2=Ce^{-Rt/L}+\frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\omega t-\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\omega t\right).$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}=\cos\varphi \quad \text{oraz} \quad \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}=\sin\varphi$$

możemy prościej zapisać wynik w postaci

$$i=Ce^{-Rt/L}+\frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi). \tag{2}$$

Jeżeli skorzystamy z warunków danych w zadaniu, że dla $t=0$ ma być $i=0$, to

$$C=\frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\varphi.$$

Wartość na C podstawiamy do rozwiązania ogólnego (2), otrzymując

$$i=\frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}(\sin\varphi\, e^{-Rt/L}+\sin(\omega t-\varphi)).$$

Równania różniczkowe liniowe innych typów

ZADANIE 9.55. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$\frac{dy}{dx}+2y=25x^2e^{3x}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Całkę szczególną równania (1) przewidujemy w postaci

$$y_1=(ax^2+bx+c)e^{3x}, \tag{2}$$

gdzie a, b, c są stałe. Obliczamy pochodną

$$\frac{dy_1}{dx}=(2ax+b)e^{3x}+3(ax^2+bx+c)e^{3x}. \tag{3}$$

Wartości (2) i (3) wstawiamy do równania (1), dzieląc to równanie jednocześnie przez e^{3x}; otrzymujemy

$$2ax+b+3(ax^2+bx+c)+2(ax^2+bx+c)\equiv 25x^2.$$

Przyrównując współczynniki przy równych potęgach zmiennej x, otrzymujemy związki

$$5a=25,\quad 5b+2a=0,\quad 5c+b=0,$$

skąd znajdujemy $a=5$, $b=-2$, $c=\frac{2}{5}$. Obliczone wartości wstawiamy do wzoru (2); mamy

$$y_1=(5x^2-2x+\tfrac{2}{5})e^{3x}. \tag{4}$$

Łatwo znajdujemy całkę ogólną równania jednorodnego $y_2=Ce^{-2x}$. A więc całka ogólna równania (1) ma postać

$$y=(5x^2-2x+\tfrac{2}{5})e^{3x}+Ce^{-2x}. \tag{5}$$

ZADANIE 9.56. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$\frac{dy}{dx}+y=2x\cos x. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Całkę szczególną równania (1) przewidujemy w postaci

$$y_1=(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x, \tag{2}$$

gdzie a, b, c, d są stałe. Obliczamy pochodną

$$\frac{dy_1}{dx}=a\sin x+(ax+b)\cos x+c\cos x-(cx+d)\sin x. \tag{3}$$

Wartości (2) i (3) wstawiamy do równania (1); otrzymujemy

$$a\sin x+(ax+b)\cos x+c\cos x-(cx+d)\sin x+(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x\equiv 2x\cos x.$$

Przyrównując kolejno współczynniki przy $x\sin x$, $x\cos x$, $\sin x$, $\cos x$, otrzymujemy związki

$$-c+a=0,\quad a+c=2,\quad a-d+b=0,\quad b+c+d=0,$$

skąd znajdujemy $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $d=0$. Podstawiamy obliczone wartości do wzoru (2); mamy

$$y_1=(x-1)\sin x+x\cos x. \tag{4}$$

Łatwo znajdujemy całkę ogólną równania jednorodnego $y_2=Ce^{-x}$. A więc całką ogólną równania (1) jest

$$y=(x-1)\sin x+x\cos x+Ce^{-x}. \tag{5}$$

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 9.57 - 9.81):

9.57. $\frac{dy}{dx}-y=2e^x$.

9.58. $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$.

9.59. $\frac{dy}{dx}+3y=e^{7x}$.

9.60. $\frac{dy}{dx}-6y=-2e^{4x}$.

9.61. $\frac{dy}{dx}+2y=-2e^{6x}$.

9.62. $\frac{dy}{dx}-2y=3e^{2x}$.

9.63. $\frac{dy}{dx}+2y=4x$.

9.64. $\frac{dy}{dx}+y=2x$.

9.65. $\frac{dy}{dx}+2y=x^2-x-1$.

9.66. $\frac{dy}{dx}+y=2x^2-2x+1$,

9.67. $\frac{dy}{dx}-3y=x^2-5x$.

9.68. $\frac{dy}{dx}+\frac{7}{4}y=\frac{7}{2}x^2-\frac{11}{4}x+\frac{9}{2}$.

9.69. $\frac{dy}{dx}+y=x^3+x^2+x+1$.

9.70. $\frac{dy}{dx}-2y=x^4$.

9.71. $\frac{dy}{dx}-y=5\cos 2x$.

9.72. $\frac{dy}{dx}+2y=5\cos x$.

9.73. $\frac{dy}{dx}-y=\sin x$.

9.74. $\frac{dy}{dx}+4y=5\sin 3x$.

9.75. $\frac{dy}{dx}+2y=4\sin x+2\cos x$.

9.76. $\frac{dy}{dx}+\frac{5}{2}y=\frac{5}{2}\sin x+2\cos x$.

9.77. $\frac{dy}{dx}-y=xe^{2x}$.

9.78. $\frac{dy}{dx}-y=(3x^2+8x+3)e^{2x}$.

9.79. $\frac{dy}{dx}+y=2x\sin x$.

9.80. $\frac{dy}{dx}-y=2x\sin x$.

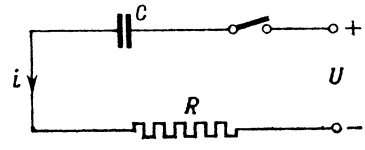
9.81. $\frac{dy}{dx}-2y=6(\cos 2x-\sin 2x)e^{4x}$.

9.82. Znaleźć krzywą całkową równania różniczkowego $y'-2y+3=0$ przechodzącą przez punkt (0, 1).

9.83. Znaleźć krzywą całkową równania różniczkowego $y'-5y=e^{5x}$ przechodzącą przez punkt $(\frac{1}{5}, e)$.

9.84. Znaleźć krzywą całkową równania różniczkowego $y+y'=\sin x$ przechodzącą przez punkt $(\pi, \frac{1}{2})$.

9.85. Znaleźć krzywą całkową równania różniczkowego $y'=e^{ax}+by$ przechodzącą przez punkt $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, gdzie $a\neq 0$.



Rys. 9.5

9.86. Wyznaczyć przebieg zmian natężenia prądu $i=f(t)$ w obwodzie (rys. 9.5) włączonym w chwili $t=0$ do źródła prądu zmiennego o napięciu $U=U\sin\omega t$. Obwód zawiera kondensator o pojemności C i opornik o oporze R. Wiemy, że szukana funkcja $i=f(t)$ spełnia równanie różniczkowe

$$R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=U\omega\cos\omega t.$$

§ 9.5. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE NIEJEDNORODNE (DOKOŃCZENIE)

W tym paragrafie zajmiemy się równaniem różniczkowym liniowym (9.3.1), w którym funkcja $q(x)=q_1(x)+q_2(x)$, a więc równaniem postaci

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q_1(x)+q_2(x). \tag{9.5.1}$$

Jeżeli $u(x)$ jest całką równania

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q_1(x), \tag{9.5.2}$$

a $v(x)$ jest całką równania

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q_2(x), \tag{9.5.3}$$

tzn. jeżeli

$$\frac{du}{dx}+p(x)u(x)\equiv q_1(x), \qquad \frac{dv}{dx}+p(x)v(x)\equiv q_2(x),$$

to suma $u(x)+v(x)$ jest całką równania (9.5.1).

Z twierdzenia tego wynika, że całkę ogólną równania (9.5.1) znajdujemy jako sumę całek szczególnych równań (9.5.2) i (9.5.3) oraz całki ogólnej odpowiedniego równania jednorodnego.

ZADANIE 9.87. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$\frac{dy}{dx}-2y=6\cos 2x-2\sin 2x+x-2x^3. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Zamiast danego równania rozwiązujemy następujące równania:

$$\frac{dy}{dx}-2y=6\cos 2x-2\sin 2x, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx}-2y=x-2x^3. \tag{3}$$

Jako całkę szczególną równania (2) przewidujemy

$$y_1=m\cos 2x+n\sin 2x. \tag{4}$$

Obliczamy pochodną

$$\frac{dy_1}{dx}=-2m\sin 2x+2n\cos 2x. \tag{5}$$

Wartości (4) i (5) wstawiamy do równania (2); mamy

$$-2m\sin 2x+2n\cos 2x-2(m\cos 2x+n\sin 2x)\equiv 6\cos 2x-2\sin 2x.$$

Przyrównując współczynniki przy $\cos 2x$ i $\sin 2x$ otrzymujemy

$$2n-2m=6, \qquad -2n-2m=-2,$$

skąd znajdujemy $m=-1$, $n=2$. Podstawiamy powyższe wartości do wzoru (4) i otrzymujemy całkę szczególną równania (2):

$$y_1=2\sin 2x-\cos 2x. \tag{6}$$

Całkę szczególną równania (3) przewidujemy w postaci

$$y_2=ax^3+bx^2+cx+d. \tag{7}$$

Po zróżniczkowaniu mamy

$$\frac{dy_2}{dx}=3ax^2+2bx+c. \tag{8}$$

Wartości (7) i (8) wstawiamy do równania (3); mamy

$$3ax^2+2bx+c-2(ax^3+bx^2+cx+d)\equiv x-2x^3.$$

Przyrównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x po dwu stronach tożsamości, otrzymujemy związki:

$$-2a=-2,\quad 3a-2b=0,\quad 2b-2c=1,\quad c-2d=0,$$

skąd znajdujemy $a=1$, $b=\frac{3}{2}$, $c=1$, $d=\frac{1}{2}$. Powyższe wartości wstawiamy do wzoru (7) i otrzymujemy całkę szczególną równania (3):

$$y_2=x^3+\tfrac{3}{2}x^2+x+\tfrac{1}{2}. \tag{9}$$

Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$\frac{dy}{dx}-2y=0.$$

Łatwo znajdujemy całkę tego równania $\bar{y}=Ce^{2x}$.

Ostatecznie całka ogólna równania (1) ma postać $y=y_1+y_2+\bar{y}$, czyli

$$y=2\sin 2x-\cos 2x+x^3+\tfrac{3}{2}x^2+x+\tfrac{1}{2}+Ce^{2x}.$$

ZADANIE 9.88. Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe

$$\frac{dy}{dx}+y=(x+1)\sin 3x+3x\cos 3x+x^2-2+2xe^{-x}. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Stosujemy dwukrotnie twierdzenie i zamiast równania (1) rozwiązujemy następujące równania:

$$\frac{dy}{dx}+y=(x+1)\sin 3x+3x\cos 3x, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx}+y=x^2-2, \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx}+y=2xe^{-x}. \tag{4}$$

Całkę równania (2) przewidujemy w postaci

$$y_1=(ax+b)\sin 3x+(cx+d)\cos 3x. \tag{5}$$

Obliczając pochodną y_1' i wstawiając do równania (2) y_1 i y_1' znajdujemy $a=1$, $b=c=d=0$ i otrzymujemy całkę szczególną równania (2) w postaci

$$y_1=x\sin 3x. \tag{6}$$

Całkę równania (3) przewidujemy w postaci

$$y_2=ex^2+fx+g. \tag{7}$$

Obliczamy pochodną y_2' i wstawiając do równania (3) y_2 i y_2' znajdujemy $e=1, f=-2, g=0$ i otrzymujemy całkę szczególną równania (3) w postaci

$$y_2=x^2-2x. \tag{8}$$

Całkę równania (4) możemy przewidywać w postaci $y_3=(ax+b)e^{-x}$, ale po obliczeniu pochodnej i wstawieniu do równania (4) otrzymujemy równanie sprzeczne. Robimy drugą próbę przypuszczając, że równanie (4) ma całkę postaci

$$y_3=(kx^2+lx+m)e^{-x}. \tag{9}$$

Różniczkujemy

$$\frac{dy_3}{dx}=(-kx^2+(2k-l)x+(l-m))e^{-x}.$$

Po podstawieniu powyższych wartości y_3 i y_3' do równania (4) otrzymujemy równość $(2kx+l)e^{-x}=2xe^{-x}$, z której znajdujemy $k=1$, $l=0$; natomiast wartość m pozostaje nieoznaczona. Wstawiając do równania (9) wartość $k=1$, $l=0$ i pisząc C zamiast m otrzymujemy całkę równania (4) w postaci

$$y_3=(x^2+C)e^{-x}. \tag{10}$$

Teraz możemy utworzyć całkę równania (1); mianowicie $y=y_1+y_2+y_3$, co daje

$$y=x\sin 3x+x^2-2x+(x^2+C)e^{-x}. \tag{11}$$

Jest to od razu całka ogólna równania (1). W naszym przypadku otrzymaliśmy bowiem $y_3=y_3'+\bar{y}$, gdzie, jak łatwo sprawdzić, $y_3'=x^2e^{-x}$, i jest to całka szczególna równania (4), a $\bar{y}=Ce^{-x}$ jest całką ogólną równania jednorodnego $y'+y=0$.

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 9.89 - 9.98):

9.89. $\dfrac{dy}{dx}-2y=3x^2-2x^3+(4x-2)\cos 2x-4x\sin 2x.$

9.90. $\frac{dy}{dx}+3y=\cos 3x-(6x+1)\sin 3x+e^{-3x}$

9.91. $\frac{dy}{dx}+y=(x+1)\cos 2x-2x\sin 2x+\sin x+\cos x+x^2$

9.92. $\frac{dy}{dx}+2y=-2\cos 4x+4\sin 4x+6e^{4x}$

9.93. $\frac{dy}{dx}-y=4e^{3x}(x+1)+6\cos 2x-3\sin 2x$.

9.94. $\frac{dy}{dx}+y=(2x^2+6x+6)e^x+4e^{3x}$

9.95. $\frac{dy}{dx}+3y=(2x^3+3x^2+2x+2)e^{2x}+(x+1)\sin 2x+2x\cos 2x$.

9.96. $\frac{dy}{dx}-y=-x\sin 2x+2(x+1)\cos 2x+(x^2+2)\cos x-(x^2-x+4)\sin x$.

9.97. $\frac{dy}{dx}+4y=4x^2+14x+3+10xe^x+2e^x$.

9.98. $\frac{dy}{dx}+y=(2x^2+9x+5)\cos x \quad (2x^2+5)\sin x+\sin 3x+3\cos 3x$.

Rozdział X

RODZINY LINII

§ 10.1. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE RODZINY LINII

Jeżeli dane jest *równanie rodziny linii z jednym parametrem*

$$F(x, y, C)=0, \tag{10.1.1}$$

to aby otrzymać *równanie różniczkowe* tej *rodziny linii*, należy zróżniczkować dane równanie (10.1.1) względem x i wyrugować parametr C z danego równania (10.1.1) oraz równania otrzymanego przez różniczkowanie.

Jeżeli *rodzina linii* jest *dwuparametrowa*, to różniczkujemy jej równanie dwukrotnie względem x i z trzech równań rugujemy oba parametry. Otrzymujemy wówczas równanie różniczkowe rzędu drugiego, tzn. zawierające drugą pochodną y'' (por. rozdz. XII i XIII).

ZADANIE 10.1. Wyznaczyć równanie różniczkowe rodziny linii

$$4x^3y-Cy^2=C. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Różniczkujemy stronami względem x równanie (1); mamy

$$4(3x^2y+x^3y')-2Cyy'=0. \tag{2}$$

Rugując parametr C z układu równań (1) i (2), tzn. z układu

$$4x^3y-Cy^2=C, \quad 6x^2y+2x^3y'-Cyy'=0,$$

łatwo otrzymujemy

$$x^3(1-y^2)y'+3x^2y(y^2+1)=0. \tag{3}$$

Jest to równanie różniczkowe rodziny linii (1).

Uwaga. Zauważmy, że parametr C w równaniu (1) występuje tylko w pierwszej potędze i można go łatwo wyznaczyć. Mamy

$$\frac{C}{4}=\frac{x^3y}{y^2+1}. \tag{4}$$

Różniczkując stronami (4) względem x, otrzymujemy zależność

$$0=\frac{(3x^2y+x^3y')(y^2+1)-x^3y\cdot 2yy'}{(y^2+1)^2},$$

już z wyrugowanym parametrem C. Stąd po łatwych przekształceniach otrzymujemy równanie (3).

ZADANIE 10.2. Wyznaczyć równanie różniczkowe rodziny linii (dwuparametrowej);

$$y=x^3+C_1x^2+C_2. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Różniczkujemy dwukrotnie względem x równanie (1). Mamy

$$y'=3x^2+2C_1x, \quad y''=6x+2C_1. \tag{2}$$

Rugując z układu równań (1) i (2) parametry C_1 i C_2, otrzymujemy

$$xy''-y'-3x^2=0.$$

Jest to równanie różniczkowe rzędu drugiego.

ZADANIE 10.3. Znaleźć równanie krzywej, mającej taką własność, że kąt między styczną a promieniem wodzącym punktu styczności ma stałą wartość α.

Rozwiązanie. Tangens kąta nachylenia φ_1 promienia wodzącego punktu (x, y) względem osi Ox jest $\operatorname{tg}\varphi_1=y/x$, a tangens kąta nachylenia φ_2 stycznej do krzywej $y=f(x)$ względem osi Ox jest $\operatorname{tg}\varphi_2=dy/dx$. Ze znanego wzoru na tangens kąta między dwiema prostymi:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}$$

otrzymujemy związek

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}},$$

czyli

$$\left(1+\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}\right)\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}. \tag{1}$$

Jest to równanie różniczkowe poszukiwanej krzywej.

Stwierdzamy, że jest to równanie jednorodne, a więc stosujemy podstawienie $y/x=u$, czyli $y=xu$, skąd

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u.$$

Podstawiając te wartości do równania (1) otrzymujemy

$$\left[1+u\left(x\frac{du}{dx}+u\right)\right]\operatorname{tg}\alpha=x\frac{du}{dx}.$$

Po rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\frac{1}{x}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-u}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Całkowanie daje

$$\int \frac{dx}{x} = \operatorname{ctg}\alpha \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u\,du}{1+u^2},$$

czyli

$$\ln|x| = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{arctg} u - \ln\sqrt{1+u^2} + C. \tag{2}$$

Wstawiając $u = \frac{y}{x}$ otrzymujemy

$$\ln|x| = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|} + C,$$

czyli

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C. \tag{3}$$

Jest to całka ogólna równania (1).

Wygodnie będzie wprowadzić współrzędne biegunowe według wzorów

$$\sqrt{x^2+y^2} = r, \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \theta. \tag{4}$$

Wówczas otrzymujemy równanie

$$\ln r = \theta \operatorname{ctg}\alpha + C.$$

Podstawiając $C = \ln C_1$, gdzie $C_1 > 0$, otrzymujemy

$$r = C_1 e^{\theta \operatorname{ctg}\alpha}. \tag{5}$$

Jest to równanie rodziny *spiralnych logarytmicznych.*

Uwaga. Wynik ten natychmiast otrzymujemy na podstawie wzoru na cotangens kąta stycznej z przedłużeniem promienia wodzącego:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta}.$$

Ponieważ kąt α jest stały, więc po scałkowaniu otrzymujemy $\theta \operatorname{ctg}\alpha = \ln r + C$, czyli $r = e^{\theta \operatorname{ctg}\alpha - C}$. Oznaczając $e^{-C} = C_1$ mamy ostatecznie $r = C_1 e^{\theta \operatorname{ctg}\alpha}$.

Zadania

Znaleźć równanie różniczkowe rodziny linii (zad. 10.4 - 10.19):

10.4. Prostych $y - ax = a - 1$,

10.5. Prostych $\frac{x}{c} + \frac{y}{m-c} = 1$.

10.6. Okręgów $x^2 + y^2 = a^2$.

10.7. Okręgów $x^2 + (y-a)^2 = a^2$.

10.8. Parabol $y^2=2px$, $p\neq 0$.

10.9. Parabol $y=ax^2+x-1$, $a\neq 0$.

10.10. Parabol $x^2=2a(y-x\sqrt{3})$.

10.11. Parabol $y^2=2ax-a^2$.

10.12. Elips $y^2=2px-2x^2$, $p\neq 0$.

10.13. Hiperbol $y=\dfrac{ax-1}{x+a}$, $a\neq 1$, $a\neq -1$.

10.14. Hiperbol $xy-a^2=0$.

10.15. Krzywych $\sqrt{4y}=(x-a)^3$.

10.16. Krzywych $\sqrt{y}=x+3ae^{-x/3}$.

10.17. Krzywych $\sqrt{y}=\dfrac{(x-4)^3}{a^2}$.

10.18. Krzywych $\sqrt{y}=x+2ae^{-x/a}$.

10.19. Przekrojów stożkowych $\dfrac{x^2}{a+1}+\dfrac{y^2}{a}=1$.

10.20. Znaleźć równanie różniczkowe rodziny linii, których styczna zawiera z osiami współrzędnych powierzchnię o stałym polu $\frac{1}{2}a^2$.

10.21. Znaleźć równanie krzywej mającej własność, że współczynnik kątowy stycznej jest proporcjonalny do rzędnej punktu styczności.

10.22. Znaleźć równanie krzywej mającej własność, że współczynnik kątowy stycznej jest odwrotnie proporcjonalny do odciętej punktu styczności.

10.23. Znaleźć równanie krzywej mającej własność, że rzut na oś Ox odcinka stycznej zawartego między osią Ox i punktem styczności ma stałą długość a.

10.24. Znaleźć równanie krzywej mającej własność, że rzut na oś Ox odcinka normalnej zawartego między osią Ox i punktem styczności ma stałą długość a.

10.25. Wyznaczyć równanie rodziny linii, mających własność, że odcinek każdej stycznej zawarty między punktem styczności a punktem przecięcia z osią odciętych jest dzielony na połowy przez oś rzędnych.

10.26. Znaleźć równanie rodziny linii, dla których długość odcinków normalnych zawartych między punktem przecięcia z linią i osią odciętych jest wielkością stałą i wynosi a.

§ 10.2. RODZINA LINII ORTOGONALNYCH

ZADANIE 10.27. Znaleźć równanie rodziny linii ortogonalnych względem rodziny linii

$$x^n+y^n=C, \quad \text{gdzie} \quad n\neq 0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Jeżeli n jest liczbą całkowitą ujemną, to $x\neq 0$ i $y\neq 0$. Jeżeli n jest liczbą całkowitą parzystą, to należy przyjąć, że $C>0$. Jeżeli n nie jest liczbą całkowitą, to przyjmujemy $x>0$, $y>0$, $C>0$.

Znajdujemy najpierw równanie różniczkowe danej rodziny. Przez zróżniczkowanie otrzymujemy

$$nx^{n-1}+ny^{n-1}y'=0.$$

Dzielimy przez n; mamy

$$x^{n-1}+y^{n-1}y'=0. \tag{2}$$

Funkcja y wyrażona równaniem (1) nie jest stała, więc pochodna y' nie jest identycznie równa zeru.

Jeżeli w równaniu (2) zastąpimy y' przez $-\frac{1}{y'}$ (warunek prostopadłości), to otrzymamy równanie różniczkowe rodziny linii ortogonalnych względem rodziny (1):

$$x^{n-1}-\frac{y^{n-1}}{y'}=0,$$

czyli

$$x^{n-1}\frac{dy}{dx}=y^{n-1}. \tag{3}$$

Zakładamy teraz, że $x\neq 0$, $y\neq 0$, a następnie równanie (3) piszemy w postaci

$$y^{1-n}\frac{dy}{dx}=x^{1-n}. \tag{4}$$

Rozróżniamy teraz przypadki:

1° $n\neq 2$. Całkowanie daje

$$\frac{y^{2-n}}{2-n}=\frac{x^{2-n}}{2-n}+C,$$

czyli

$$y^{2-n}=x^{2-n}+(2-n)C_1.$$

Przyjmując $(2-n)C_1=-C_2$, otrzymujemy $y^{2-n}-x^{2-n}=-C_2$, czyli

$$\frac{1}{x^{n-2}}-\frac{1}{y^{n-2}}=C_2. \tag{5}$$

2° $n=2$. W tym przypadku równanie (4) daje

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\ln|y|=\ln|x|+C_3.$$

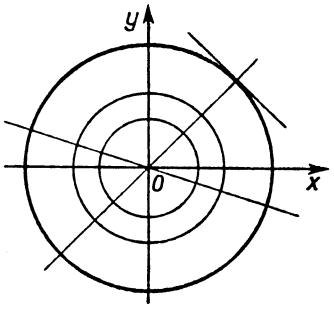
Przyjmując $C_3=\ln|C_4|$, $C_4\neq 0$, lub $C_3=-\ln|C_5|$, $C_5\neq 0$, otrzymujemy

$$y=C_4x \quad \text{lub} \quad y=\frac{x}{C_5}. \tag{6}$$

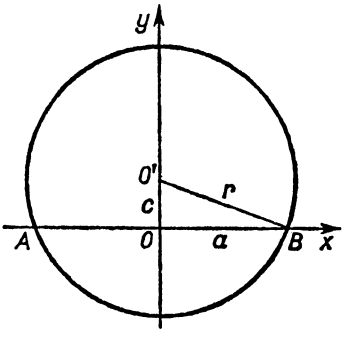
W tym przypadku wynik interpretować można bardzo prosto. Rodzina linii (1) jest wówczas rodziną

$$x^2+y^2=C \tag{7}$$

przedstawiającą dla $C>0$ okręgi o wspólnym środku w początku układu współrzędnych. Rodziną linii ortogonalnych jest rodzina linii prostych przechodzących przez początek współrzędnych (rys. 10.1)



Rys. 10.1



Rys. 10.2

W przypadku 2° założenia $x\neq 0$ oraz $y\neq 0$ możemy odrzucić, jeżeli w rodzinie $y=C_4x$ przyjmiemy, że C_4 może też być równe zeru, oraz jeśli do rodziny tej dołączymy prostą $x=0$, którą zresztą otrzymujemy z postaci $x=C_5y$ przyjmując $C_5=0$.

ZADANIE 10.28. Znaleźć równanie rodziny linii ortogonalnych do rodziny okręgów przechodzących przez dwa dane punkty.

Rozwiązanie. Umieśćmy stałe punkty A i B na osi Ox i niech współrzędnymi będą $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, gdzie $a>0$. Wówczas środki okręgów przechodzących przez punkty A i B będą położone na osi Oy (rys. 10.2).

Oznaczając współrzędne dowolnego punktu osi Oy (środka okręgu) przez $O'(0, c)$, otrzymujemy równanie rodziny okręgów w postaci

$$x^2+(y-c)^2=r^2, \quad \text{gdzie} \quad r^2=a^2+c^2$$

(z trójkąta $CO'B$) lub po wstawieniu wartości r i po redukcji

$$x^2+y^2-2cy-a^2=0. \tag{1}$$

Parametr c występuje w pierwszej potędze, więc łatwo możemy rozwiązać równanie (1) względem stałej c zakładając, że $y\neq 0$ (por. uwagę do zadania 10.1); mamy

$$2c=\frac{x^2+y^2-a^2}{y}. \tag{2}$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\frac{y(2x+2yy')-(x^2+y^2-a^2)y'}{y^2}=0;$$

po redukcji i uproszczeniu mamy

$$2xy+(y^2-x^2+a^2)y'=0. \tag{3}$$

Funkcja y wyrażona równaniem (1) nie jest stała, a więc pochodna y' nie jest identycznie równa zeru.

Zastępując w równaniu (3) y' przez $-\frac{1}{y'}$ otrzymujemy

$$2xy+(y^2-x^2+a^2)\left(-\frac{1}{y'}\right)=0,$$

czyli

$$2xyy'-y^2+x^2-a^2=0. \tag{4}$$

Podstawiamy $y^2=z$, skąd $2yy'=z'$. Wstawiamy powyższe wartości do równania (4); mamy

$$x\frac{dz}{dx}-z+x^2-a^2=0.$$

Zakładając, że $x\neq 0$, piszemy

$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x}=\frac{a^2-x^2}{x} \tag{5}$$

i otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe.

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$\frac{dz}{dx}-\frac{z}{x}=0.$$

Po rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x},$$

skąd po scałkowaniu $\ln|z|=\ln|x|+C$. Przyjmując $C=\ln|C_1|$, $C_1\neq 0$, otrzymujemy

$$z=C_1x.$$

Uzmienniając stałą załóżmy, że całka równania (5) jest postaci

$$z=xu(x). \tag{6}$$

Różniczkujemy obie strony $\frac{dz}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$ i podstawiamy do równania (5); mamy

$$x\frac{du}{dx}+u-u=\frac{a^2-x^2}{x},$$

czyli

$$\frac{du}{dx}=\frac{a^2}{x^2}-1.$$

Całkując otrzymujemy

$$u(x)=-\frac{a^2}{x}-x+A,$$

gdzie A jest stałą dowolną. Wstawiamy obliczoną wartość $u(x)$ do równania (6); otrzymujemy

$$z=-a^2-x^2+Ax.$$

Ponieważ $y^2=z$, więc $y^2=-a^2-x^2+Ax$ albo ostatecznie

$$x^2+y^2-Ax+a^2=0. \tag{7}$$

Równanie to przedstawia rodzinę okręgów, których środki leżą na osi Ox:

$$(x-\tfrac{1}{2}A)^2+y^2=\tfrac{1}{4}A^2-a^2. \tag{8}$$

Zakładamy przy tym, że $A^2>4a^2$, czyli $A<-2a$ lub $A>2a$. Geometrycznie oznacza to, że odległość środka $S(\frac{1}{2}A, 0)$ okręgu (7) od początku współrzędnych musi być większa od a.

Każdy okrąg (7) jest ortogonalny do każdego okręgu (1), co łatwo jest sprawdzić. W samej rzeczy, środkiem okręgu (7) jest $S(\frac{1}{2}A, 0)$, a promień okręgu R jest wyznaczony wzorem $R^2=\frac{1}{4}A^2-a^2$. Potęgą punktu S względem okręgu (1) jest $\frac{1}{4}A^2-a^2=R^2$(1), co właśnie dowodzi ortogonalności.

ZADANIE 10.29. W płaszczyźnie $z=0$, w punkcie $A(1, 2)$ znajduje się odosobniony ładunek elektryczny q. Równanie więc rodziny linii sił pola wytworzonego przez ten ładunek w płaszczyźnie $z=0$ jest $y=m(x-1)+2$.

Wyznaczyć równanie rodziny linii ekwipotencjalnych w płaszczyźnie $z=0$.

Rozwiązanie. Linie ekwipotencjalne stanowią rodzinę linii ortogonalnych do rodziny linii $y=m(x-1)+2$. Piszemy równanie różniczkowe rodziny linii danych

$$y=y'(x-1)+2.$$

Równanie różniczkowe szukanej rodziny jest

$$-(y-2)y'=x-1,$$

skąd po scałkowaniu otrzymujemy rodzinę okręgów współśrodkowych

$$(x-1)^2+(y-2)^2=C.$$

---

(1) Jeżeli okrąg K dany jest równaniem

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0,$$

to potęgą punktu $M(x_0, y_0)$ względem okręgu K nazywamy wyrażenie

$$x_0^2+y_0^2-2ax_0-2by_0+c.$$

Interpretacja geometryczna: Jeżeli punkt M leży zewnątrz okręgu K, to potęga punktu M względem okręgu K równa się kwadratowi odcinka wyprowadzonego z punktu M stycznie do okręgu K. Jeżeli punkt M leży wewnątrz okręgu K, to potęga punktu M względem okręgu K jest ujemna i co do wartości bezwzględnej równa się kwadratowi połowy najmniejszej cięciwy przechodzącej przez punkt M (czyli cięciwy prostopadłej do średnicy przechodzącej przez punkt M).

Zadania

Znaleźć rodziny ortogonalne do krzywych danej rodziny (zad. 10.30 - 10.44):

10.30. Okręgów $x^2+y^2-2ax=0$.

10.31. Parabol $y^2=2(x-c)$.

10.32. Parabol $(y-2)^2=2px, p\neq 0$.

10.33. Parabol $y=ax^2$.

10.34. Elips $y^2=\lambda^2(a^2-x^2)$.

10.35. Krzywych $x^2+ny^2=a$.

10.36. Hiperbol równoosiowych $xy=k$, $k\neq 0$.

10.37. Krzywych wykładniczych $y=ce^{-x}$, $c\neq 0$.

10.38. Lemniskat $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $a\neq 0$.

10.39. Krzywych $r^m=C\sin m\varphi$.

10.40. Kardioid $r=a(1+\cos\varphi)$.

10.41. Cisoid $(2a-x)y^2=x^3$.

10.42. Krzywych $ax^\sigma=y$ przy danym σ.

10.43. Krzywych $r^2(\pi-\varphi)=a^2\varphi$.

10.44. Strofoid $x(x^2+y^2)=a^2(x^2-y^2)$.

Rozdział XI

NIEKTÓRE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE NIELINIOWE RZĘDU PIERWSZEGO

§ 11.1. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE BERNOULLIEGO

Równaniem różniczkowym Bernoulliego nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y+q(x)\,y^n=0, \tag{11.1.1}$$

gdzie funkcje $p(x)$ i $q(x)$ są funkcjami ciągłymi w pewnym wspólnym przedziale $a<x<b$, a n jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Dla $n=0$ otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe. Dla $n=1$ otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe jednorodne względem y i y', a więc równanie, w którym zmienne dadzą się rozdzielić. Przypadki takie poniżej pominiemy. Zauważmy, że przy $n>0$ całką równania (11.1.1) jest zawsze $y=0$.

Równanie (11.1.1) przez podstawienie

$$y^{1-n}=z \tag{11.1.2}$$

sprowadza się do równania różniczkowego liniowego.

ZADANIE 11.1. Rozwiązać równanie

$$y'+y+y^2\sin x=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Jest to równanie Bernoulliego przy $n=2$. Jedną z całek równania (1) jest, wobec $n=2$, całka $y=0$. Przy poszukiwaniu innych całek tego równania zakładamy, że $y\neq 0$.

Dzielimy obie strony równania (1) przez y^2:

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{y}+\sin x=0. \tag{2}$$

Zgodnie ze wzorem (11.1.2) podstawiamy $y^{-1}=z$, skąd

$$-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}. \tag{3}$$

Równanie (2) przekształca się więc w równanie

$$-\frac{dz}{dx}+z+\sin x=0, \tag{4}$$

tj. na równanie różniczkowe liniowe. Rozwiązując je metodą przewidywań otrzymujemy

$$z=C_1 e^x-\tfrac{1}{2}(\sin x+\cos x).$$

Wobec związku $z=y^{-1}$ rozwiązanie ogólne równania (1) przyjmie ostatecznie postać

$$y=\frac{2}{Ce^x-\sin x-\cos x}, \tag{5}$$

gdzie przez C oznaczono $2C_1$. Całkę $y=0$ można otrzymać ze wzoru (5) przy przejściu do granicy dla $C\to\infty$.

ZADANIE 11.2. Rozwiązać równanie

$$y'+y+x\sqrt{y}=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Jest to równanie Bernoulliego przy $n=\frac{1}{2}$. Zakładamy, że $y>0$, i dzielimy przez $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}}+\sqrt{y}+x=0. \tag{2}$$

Podstawiamy $\sqrt{y}=u$, skąd po zróżniczkowaniu $\frac{y'}{2\sqrt{y}}=u'$. Po podstawieniu do równania (2) otrzymujemy

$$2u'+u+x=0, \quad \text{czyli} \quad 2u'+u=-x. \tag{3}$$

Przewidujemy rozwiązanie postaci

$$u=ax+b, \quad \text{skąd} \quad u'=a.$$

Podstawiamy do (3); mamy

$$2a+ax+b+x=0,$$

skąd $a+1=0$, $a=-1$, oraz $2a+b=0$, $b=+2$, a więc

$$u_1=-x+2.$$

Równanie jednorodne $2u'+u=0$ po scałkowaniu daje $u_2=Ce^{-\frac{1}{2}x}$.
Całka ogólna równania (3):

$$u=-x+2+Ce^{-\frac{1}{2}x}.$$

Ale $\sqrt{y}=u$, tzn. $y=u^2$, ostatecznie więc

$$y=(-x+2+Ce^{-\frac{1}{2}x})^2.$$

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 11.3 - 11.28):

11.3. $\frac{dy}{dx}+xy=xy^3$.

11.4. $\frac{dy}{dx}+2xy=2x^3y^3$.

11.5. $\frac{dy}{dx}+\frac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}$.

11.6. $x\frac{dy}{dx}-4y=x^2\sqrt{y}$.

11.7. $\frac{dy}{dx}-\frac{xy}{2(x^2-1)}=\frac{x}{2y}$. Znaleźć krzywą całkową przechodzącą przez punkt (0, 1).

11.8. $x\frac{dy}{dx}-y=y^2$.

11.9. $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$.

11.10. $x\frac{dy}{dx}+y=xy^2\ln x$.

11.11. $\frac{dy}{dx}+2y\operatorname{tg}x=ay^2\operatorname{ctg}x$.

11.12. $\frac{dy}{dx}-(\frac{1}{3}-y^3)y\sin x=0$.

11.13. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=ay^2\ln x$.

11.14. $(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=axy^2$.

11.15. $2xy\frac{dy}{dx}+x=y^2$.

11.16. $x^2y^2\frac{dy}{dx}+xy^3=a^2$.

11.17. $(x-2xy-y^2)\frac{dy}{dx}+y^2=0$.

11.18. $(x^2y^3+xy)\frac{dy}{dx}-1=0$.

11.19. $\frac{dy}{dx}-\frac{3y}{x}=-x^3y^2$.

11.20. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x+1}=-\frac{(x+1)^3}{2}y^3$.

11.21. $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{3}y\sin x=-y^4\sin x$.

11.22. $(1+x^2)\frac{dy}{dx}-xy=x^2y^2$.

11.23. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}+\frac{y^3}{2\sqrt{1-x^2}}=0$.

11.24. $2y\frac{dy}{dx}-x-y^2=0$.

11.25. $\left(\frac{x^2}{y}-y^3\right)\frac{dy}{dx}=x$.

11.26. $\frac{y'}{\sqrt{y}}+4\sqrt{y}x=2xe^{-x^2}$.

11.27. $\frac{dy}{dx}-9x^2y+3(x^5-x^2)\sqrt[3]{y^2}=0$

11.28. $\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{x^2+a^2}y=\frac{2\sqrt{y}}{x^3}$.

§ 11.2. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE RICCATIEGO

Równaniem różniczkowym Riccatiego nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+r(x), \tag{11.2.1}$$

w którym $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ są funkcjami ciągłymi w pewnym wspólnym przedziale $a<x<b$. W przypadku $p(x)\equiv 0$ otrzymalibyśmy równanie liniowe, a w przypadku $r(x)\equiv 0$ – równanie Bernoulliego. Można wykazać, że *w ogólnym przypadku rozwiązanie równania Riccatiego nie daje się sprowadzić do obliczania pewnej (skończonej) liczby całek nieoznaczonych.*

Jeżeli jednak znamy jedną całkę szczególną $y_1(x)$ równania (11.2.1), to przez podstawienie

$$y=y_1(x)+\frac{1}{u}, \tag{11.2.2}$$

gdzie u jest nową zmienną zależną, równanie Riccatiego przekształca się w równanie liniowe. Po zróżniczkowaniu (11.2.2), podstawieniu do równania (11.2.1) i uwzględnieniu, że

$$y_1'=p(x)y_1^2+q(x)y_1+r(x),$$

otrzymujemy równanie liniowe

$$\frac{du}{dx}+(2p(x)y_1+q(x))u=p(x), \tag{11.2.3}$$

w którym funkcja $r(x)$ jawnie nie występuje.

ZADANIE 11.29. Rozwiązać równanie Riccatiego

$$\frac{dy}{dx}=y^2-(4x+1)y+4x^2+2x+2, \tag{1}$$

znając jego całkę szczególną $y_1=2x$.

Rozwiązanie. Według wzoru (11.2.2) przyjmujemy

$$y=2x+\frac{1}{u}, \quad \text{skąd} \quad \frac{dy}{dx}=2-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{2}$$

Po podstawieniu do (1) otrzymujemy równanie liniowe

$$\frac{du}{dx}-u=-1, \tag{3}$$

którego całką ogólną jest $u=Ce^x+1$. Na podstawie (2) otrzymujemy ogólne rozwiązanie równania (1):

$$y=2x+\frac{1}{Ce^x+1}. \tag{4}$$

ZADANIE 11.30. Rozwiązać równanie Riccatiego

$$\frac{dy}{dx}+y^2-1=x^2, \tag{1}$$

wiedząc, że ma całkę szczególną $y_1=x$.

Podstawiając

$$y=x+\frac{1}{u}, \quad \text{skąd} \quad \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{dx},$$

do równania (1), otrzymujemy równanie liniowe

$$\frac{du}{dx}-2xu=1,$$

którego całką ogólną jest [1]

$$u=e^{x^2}(C+\int e^{-x^2}dx).$$

Zatem całką ogólną równania (1) jest

$$y=x+\frac{e^{-x^2}}{C+\int e^{-x^2}dx}.$$

Zadania

Wyznaczyć całki ogólne równań różniczkowych, przy danych całkach szczególnych (zad. 11.31 - 11.43):

11.31. $\frac{dy}{dx}=y^2-xy-x$ $(y=ax+b)$.

11.32. $\frac{dy}{dx}=y^2-(2x+1)y+x^2+x+1$ $(y=x)$.

11.33. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}y^2+\frac{2}{3x^2}$ $\left(y=\frac{a}{x}\right)$.

11.34. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2x^2}$ $\left(y=\frac{a}{x}\right)$.

11.35. $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{x^2}$ $\left(y=\frac{a}{x}\right)$.

11.36. $\frac{dy}{dx}=-y^2+\frac{2}{x^2}$ $\left(y=\frac{a}{x}\right)$.

11.37. $\frac{dy}{dx}=y^2+\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}$ $\left(y=-\frac{1}{x}\right)$.

11.38. $\frac{dy}{dx}=-y^2-\frac{y}{x}+\frac{4}{x^2}$ $\left(y=\frac{a}{x}\right)$.

11.39. $\frac{dy}{dx}=xy^2-\frac{2x^2+1}{x}y+\frac{x^2+1}{x}$ $(y=1)$.

11.40. $\frac{dy}{dx}=-(y-x)^2-\frac{2(y-x)}{x}+1$ $(y=x)$.

---

[1] Przypominamy, że całka $\int e^{-x^2}dx$ nie da się wyrazić za pomocą skończonej liczby funkcji elementarnych.

11.41. $x\frac{dy}{dx}=y^2-(2x+1)y+x^2+2x$ $(y=ax+b)$.

11.42. $x^2\frac{dy}{dx}=x^2y^2+xy+1$ $\left(y=\frac{a}{x}\right)$. **11.43.** $x^2\frac{dy}{dx}+(xy-2)^2=0$ $\left(y=\frac{a}{x}\right)$.

§ 11.3. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE CLAIRAUTA

Równaniem różniczkowym Clairauta nazywamy równanie postaci

$$y=xy'+f(y'), \tag{11.3.1}$$

w którym o funkcjach y' oraz f zakładamy różniczkowalność w pewnych przedziałach (pierwszej względem x, drugiej względem y').

Różniczkując równanie (11.3.1) stronami względem x, otrzymujemy

$$y'=y'+xy''+f'(y')y'',$$

skąd

$$y''(x+f'(y'))=0. \tag{11.3.2}$$

Należy więc rozpatrzyć dwa przypadki:

$$y''=0 \quad \text{lub} \quad x+f'(y')=0.$$

Jeżeli $y''=0$, to

$$y'=C. \tag{11.3.3}$$

Poszukiwana całka powinna spełniać równanie (11.3.1); z podstawienia (11.3.3) do (11.3.1) otrzymujemy całkę ogólną równania (11.3.1):

$$y=Cx+f(C). \tag{11.3.4}$$

Jest to jednoparametrowa rodzina linii prostych.

Niech teraz

$$x+f'(y')=0. \tag{11.3.5}$$

Jeśli to równanie ma całkę spełniającą również równanie (11.3.1), to równanie linii całkowej odpowiadającej tej całce otrzymamy w postaci równań parametrycznych (11.3.1) i (11.3.5) traktując y' jako parametr. Linia ta jest obwiednią rodziny linii prostych (11.3.4) i jest całką osobliwą równania Clairauta (por. § 7.1).

ZADANIE 11.44. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y=xy'+y'^4. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Różniczkujemy obie strony $y'=y'+xy''+4y'^3y''$, skąd po redukcji

$$y''(x+4y'^3)=0,$$

a więc $y''=0$ albo $x+4y'^3=0$. Rozpatrujemy te przypadki kolejno:

Jeżeli $y''=0$, to $y'=C$, czyli $y=Cx+C_1$. Równanie różniczkowe rzędu pierwszego ma rozwiązania zależne tylko od jednej stałej, co dowodzi, że stałe C i C_1 są od siebie zależne. Podstawiając do równania (1) otrzymujemy $Cx+C_1=Cx+C^4$, skąd $C_1=C^4$. Rozwiązaniem ogólnym jest więc rodzina linii prostych

$$y=Cx+C^4. \tag{2}$$

Jeżeli $x+4y'^3=0$, to $y'=\sqrt[3]{-\frac{1}{4}x}$. Podstawiając do równania (1), otrzymujemy $y=-x\sqrt[3]{\frac{1}{4}x}+\frac{1}{4}x\sqrt[3]{\frac{1}{4}x}$, skąd ostatecznie

$$y=-\tfrac{3}{8}x\sqrt[3]{2x}. \tag{3}$$

Jest to rozwiązanie osobliwe, gdyż nie zawiera się ono w rozwiązaniu ogólnym (2), co jest bezpośrednio widoczne: przez żadne bowiem podstawienie na C szczególowej wartości do rozwiązania ogólnego (2) liniowego względem x, nie otrzymamy rozwiązania osobliwego (3).

Przypominamy, że linia krzywa odpowiadająca rozwiązaniu osobliwemu (3) jest obwiednią rodziny prostych przedstawionych rozwiązaniem ogólnym (2).

ZADANIE 11.45. Znaleźć równanie linii, do której styczne tworzą z osiami współrzędnych trójkąt o stałym polu S.

Rozwiązanie. Niech równaniem stycznej będzie

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{1}$$

Mamy warunek $ab=2S$, skąd $b=\frac{2S}{a}$. Po podstawieniu do (1) otrzymujemy $\frac{x}{a}+\frac{ay}{2S}=1$, skąd

$$2Sx+a^2y=2aS. \tag{2}$$

Jest to równanie jednoparametrowej rodziny linii prostych.

Różniczkując względem x mamy $2S+a^2y'=0$, skąd wyznaczamy parametr a:

$$a=\sqrt{-\frac{2S}{y'}}.$$

Zauważmy, że y' musi być ujemne, gdyż $2S$ jest dodatnie. Po podstawieniu do równania (2) mamy

$$2Sx-\frac{2Sy}{y'}=2S\sqrt{-\frac{2S}{y'}}.$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe rodziny prostych (1); równanie to, po podzieleniu przez $2S$ i pomnożeniu przez y' zapiszemy w postaci

$$y=xy'+\sqrt{-2Sy'}, \tag{3}$$

przy czym przy wnoszeniu y' pod znak pierwiastka zmieniliśmy znak przed pierwiastkiem, gdyż y' jest ujemne.

Równanie (3) jest to równanie Clairauta. Różniczkujemy je

$$y'=y'+xy''+\sqrt{2S}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-y'}}\cdot(-y'')$$

i otrzymujemy

$$y''\left(x-\frac{\sqrt{2S}}{2\sqrt{-y'}}\right)=0. \tag{4}$$

Z treści zadania wynika, że poszukiwana linia jest całką osobliwą równania (3). Aby je znaleźć, przyrównujemy wyrażenie w nawiasie równania (4) do zera; otrzymujemy

$$x-\frac{\sqrt{2S}}{2\sqrt{-y'}}=0,$$

skąd $y'=-\frac{S}{2x^2}$ i po podstawieniu do (3) mamy $y=-\frac{S}{2x}+\frac{S}{x}$. Ostatecznie więc

$$y=\frac{S}{2x}. \tag{5}$$

Jest to równanie hiperboli równoosiowej. Znaną własnością dowolnej hiperboli jest stałość pola zawartego między asymptotami (tutaj osiami współrzędnych), a styczną do hiperboli.

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 11.46 - 11.57):

11.46. $y=xy'+y'^2$.

11.47. $y=xy'-y'^2$.

11.48. $y=xy'+y'-y'^2$.

11.49. $y=2xy'+y^2y'^3$.

Wskazówka (do zad. 11.49). Pomnożyć stronami przez y i przyjąć $y^2=t$.

11.50. $y=xy'+\frac{1}{2y'}$.

11.51. $y=xy'+\frac{1}{2y'^2}$.

11.52. $y=xy'+\sqrt{1+y'}$.

11.53. $y=xy'-a\sqrt{1+y^2}$, $a>0$.

11.54. $y=xy'+\sqrt{1+y'^2}$.

11.55. $y=xy'+\sqrt{1-y'^2}$.

11.56. $y=xy'+2\sqrt{-y'}$.

11.57. $x=\frac{y}{y'}+\frac{1}{y'^2}$.

Wskazówka (do zad. 11.57). Przyjąć x za zmienną zależną, a y za zmienną niezależną.

§ 11.4. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LAGRANGE'A-D'ALEMBERTA

Równaniem różniczkowym Lagrange'a-d'Alemberta nazywamy równanie postaci

$$y=xf(y')+g(y'), \tag{11.4.1}$$

w którym o funkcjach f i g zakładamy, że są danymi funkcjami klasy C^1 w pewnym przedziale oraz $f(y')\neq y'$ (tzn. że równanie (11.4.1) nie jest równaniem Clairauta (11.3.1)). Poszukujemy rozwiązań równania różniczkowego (11.4.1) posiadających drugie pochodne ciągłe.

Po zróżniczkowaniu stronami względem x mamy

$$y'=f(y')+xf'(y')\,y''+g'(y')\,y''. \tag{11.4.2}$$

Podstawiając $y'=p$, $y''=\dfrac{dp}{dx}$, przy założeniu, że $xf'(p)+g'(p)\neq 0$, otrzymujemy

$$\frac{dp}{dx}=\frac{p-f(p)}{xf'(p)+g'(p)}. \tag{11.4.3}$$

Jeżeli licznik $p-f(p)$ jest równy zeru przy wartościach $p_1, p_2, \ldots, p_k$, to przedział zmienności p rozbijamy na rozłączne przedziały nie zawierające punktów p_i $(i=1, 2, \ldots, k)$. W każdym z nich pochodna dp/dx zachowuje stały znak, co oznacza, że p jest funkcją ściśle monotoniczną zmiennej x. Istnieje więc funkcja odwrotna $x=x(p)$ różniczkowalna w odpowiednim przedziale; ponieważ zaś $\dfrac{dx}{dp}=1:\dfrac{dp}{dx}$ przy założeniu, że $\dfrac{dp}{dx}\neq 0$, które jest według (11.4.3) spełnione, więc traktując w równaniu (11.4.3) x jako zmienną zależną, a p jako zmienną niezależną otrzymujemy równanie

$$\frac{dx}{dp}-\frac{f'(p)}{p-f(p)}x=\frac{g'(p)}{p-f(p)}, \tag{11.4.4}$$

które jest liniowe. Z rozwiązania tego równania otrzymujemy x jako jawną funkcję p i stałej dowolnej C, tzn.

$$x=h(p, C). \tag{11.4.5}$$

Równanie (11.4.1) zapisać teraz możemy w postaci $y=xf(p)+g(p)$, a po uwzględnieniu (11.4.5) w postaci

$$y=h(p, C)f(p)+g(p). \tag{11.4.6}$$

Równania (11.4.5) i (11.4.6) określają rozwiązanie równania (11.4.1) w postaci parametrycznej (parametrem jest p).

Rozpatrzymy na koniec wartości p_i, przy których zachodzi równość $p_i-f(p_i)=0$; wówczas równanie (11.4.3) ma całkę $p=p_i$, a równanie (11.4.1) ma całkę

$$y=f(p_i)x+g(p_i), \tag{11.4.7}$$

której wykresem jest prosta.

Można wykazać, że całki (11.4.7) dla $i=1, 2, \ldots, k$ nie są szczególnymi przypadkami rozwiązania ogólnego wyrażonego wzorami (11.4.5) i (11.4.6).

ZADANIE 11.58 Rozwiązać równanie

$$2yy'=x(1+y'^2)+y'^4+3y'^2. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Przy założeniu, że $y'\neq 0$, piszemy równanie (1) w postaci

$$y=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{y'}+y'\right)+\frac{1}{2}(y'^3+3y'). \tag{2}$$

Obie strony tego równania różniczkujemy; mamy

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y'}+y'\right)+\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{y'^2}+1\right)y''+\frac{1}{2}(3y'^2+3)y'',$$

skąd po podstawieniu $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}$ otrzymujemy

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+p\right)+\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{p^2}+1\right)\frac{dp}{dx}+\frac{1}{2}(3p^2+3)\frac{dp}{dx},$$

czyli

$$p-\frac{1}{p}=\left(x\cdot\frac{p^2-1}{p^2}+3(p^2+1)\right)\frac{dp}{dx}.$$

Zmieniając rolę zmiennych, przy założeniu, że $p^2-1\neq 0$, mamy

$$\frac{dx}{dp}-\frac{x}{p}=\frac{3p(p^2+1)}{p^2-1}. \tag{3}$$

Z rozwiązania równania tego metodą uzmiennienia stałej otrzymujemy

$$x=3p^2+3p\ln\left|\frac{p-1}{p+1}\right|+C_1 p. \tag{4}$$

Wartość na y otrzymujemy podstawiając do zależności (2) p zamiast y', a zamiast x obliczoną powyżej wartość. Wtedy otrzymujemy

$$y=2p^3+\frac{C_1}{2}p^2+3p+\frac{3}{2}(p^2+1)\ln\left|\frac{p-1}{p+1}\right|+\frac{C_1}{2}. \tag{5}$$

Równania (4) i (5) określają rozwiązanie równania (1) w postaci parametrycznej, z parametrem p.

Oddzielnie rozpatrzmy teraz szczególne przypadki. Przy otrzymaniu równania (3) założyliśmy, że $p^2-1\neq 0$.

Jeśli $p=1$, to z równania (2) otrzymujemy całkę $y=x+2$; w przypadku $p=-1$ w ten sam sposób otrzymujemy całkę $y=-x-2$.

Rozwiązania te nie mieszczą się w rozwiązaniu ogólnym danym przez równania (4) i (5).

ZADANIE 11.59. Jaki kształt powinien mieć południk powierzchni obrotowej, aby promienie światła padające na tę powierzchnię, równoległe do osi obrotu, po odbiciu skupiały się w jednym punkcie na osi obrotu.

Rozwiązanie. Niech ognisko będzie początkiem naszego układu współrzędnych. Promień P pada na powierzchnię w punkcie M, a po odbiciu przechodzi przez ognisko F. W punkcie M kreślimy styczną przecinającą oś Ox w punkcie Q i normalną przecinającą Ox w punkcie S.

Oznaczmy kąt, jaki tworzy styczna z dodatnim kierunkiem osi Ox, przez α. Wtedy $\sphericalangle FSM=\alpha-\sphericalangle SMQ=\alpha-\frac{1}{2}\pi$ (kąt zewnętrzny w trójkącie równa się dwom kątom wewnętrznym jemu nieprzyległym), $\sphericalangle SMP=\sphericalangle FSM=\alpha-\frac{1}{2}\pi$ (kąty naprzemianległe przy równoległych), $\sphericalangle SMF=\sphericalangle SMP=\alpha-\frac{1}{2}\pi$ (twierdzenie o kącie padania i odbicia), $\sphericalangle QFM=$ $=\sphericalangle FSM+\sphericalangle SMF=\alpha-\frac{1}{2}\pi+\alpha-\frac{1}{2}\pi=2\alpha-\pi$ (twierdzenie o kącie zewnętrznym w trójkącie).

Oznaczając współrzędne punktu M przez x, y mamy

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}(2\alpha-\pi)=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Z drugiej strony, wiemy, że $\operatorname{tg}\alpha=y'$; mamy więc $\frac{y}{x}=\frac{2y'}{1-y'^2}$, czyli

$$y=2x\frac{y'}{1-y'^2}; \tag{1}$$

jest to równanie Lagrange'a-d'Alemberta.

Różniczkujemy obustronnie

$$y'=2\frac{y'}{1-y'^2}+2x\frac{1-y'^2+2y'^2}{(1-y'^2)^2}y''.$$

Przyjmujemy $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}$ i otrzymujemy

$$\frac{dx}{dp}=-\frac{2x}{p(1-p^2)}, \quad \text{czyli} \quad \int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2dp}{p(1-p^2)}. \tag{2}$$

Obliczamy

$$\int\frac{2dp}{p(p^2-1)}=\int\frac{2pdp}{p^2(p^2-1)}.$$

Po podstawieniu $p^2=t$, skąd $2pdp=dt$, mamy

$$\int\frac{2dp}{p(p^2-1)}=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln\frac{t-1}{t}=\ln\frac{p^2-1}{p^2}.$$

Wstawiając do równania (2), całkując je i oznaczając stałą całkowania $C=-\ln a$ otrzymujemy

$$\ln x-\ln a=\ln\frac{p^2-1}{p^2},\quad \text{czyli}\quad \frac{x}{a}=\frac{p^2-1}{p^2},$$

skąd

$$x=a\frac{p^2-1}{p^2}. \tag{3}$$

Ze wzoru (1) otrzymujemy $y=2x\frac{p}{1-p^2}$. Wstawiając wartość na x mamy

$$y=2a\frac{p^2-1}{p^2}\cdot\frac{p}{1-p^2},$$

stąd po uproszczeniu $p=-\frac{2a}{y}$. Wstawiamy do równania (3), otrzymując

$$x=a\cdot\frac{\frac{4a^2}{y^2}-1}{\frac{4a^2}{y^2}};$$

stąd po uproszczeniu:

$$y^2=-4ax+4a^2.$$

Jest to równanie paraboli, której osią symetrii jest oś Ox.

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 11.60 - 11.74):

11.60. $y=2xy'-y'^2$.

11.61. $y=2xy'+\frac{1}{y'^2}$.

11.62. $y=2xy'+\frac{1}{2}x^2+y'^2$.

11.63. $y=-xy'-\frac{1}{2}y'^2$.

11.64. $y=2xy'+\sqrt{1+y'^2}$.

11.65. $y=x(y'-\sqrt{1+y'^2})$.

11.66. $y=(1+y')x+y'^2$.

11.67. $y=y'\ln y'$.

11.68. $y=\frac{xy'^2}{2(y'+2)}$.

11.69. $y=\frac{(x+yy')k}{\sqrt{1+y'^2}}$.

11.70. $y=xy'^2-y'$.

11.71. $y=xy'^2+y'^2$.

11.72. $y=xy'^2+y'^3$.

11.73. $yy'=2xy'^2+1$.

11.74. $yy'=x-ay'^2$.

§ 11.5. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE ZUPEŁNE

Równaniem różniczkowym zupełnym nazywamy równanie różniczkowe rzędu pierwszego postaci

$$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0, \tag{11.5.1}$$

w którym funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są ciągłe w pewnym obszarze D i takie, że wyrażenie

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \tag{11.5.2}$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji dwóch zmiennych $F(x, y)$ określonej w obszarze D (por. § 6.7). Oznacza to, że w obszarze D istnieje taka różniczkowalna funkcja $F(x, y)$, że zachodzą związki

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y) \tag{11.5.3}$$

w każdym punkcie tego obszaru.

Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D, to *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wyrażenie* (11.5.2) *było różniczką zupełną w tym obszarze, jest spełnienie równości*

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{11.5.4}$$

w każdym punkcie obszaru D.

Jeżeli wyrażenie (11.5.2) *jest przy podanych założeniach różniczką zupełną funkcji* $F(x, y)$, *to równanie*

$$F(x,y)=C, \tag{11.5.5}$$

gdzie C jest stałą dowolną, a punkty (x, y) *należą do obszaru D, określa wszystkie rozwiązania równania zupełnego* (11.5.1) (por. też § 6.7).

ZADANIE 11.75. Rozwiązać równanie

$$4x^3+6xy^3+(9x^2y^2+3)\,y'=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Najpierw sprawdzamy, czy równanie (1) jest różniczką zupełną; mamy $P(x, y)=4x^3+6xy^3$, $Q(x, y)=9x^2y^2+3$, skąd

$$\frac{\partial P}{\partial y}=18xy^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=18xy^2, \tag{2}$$

a więc warunek (11.5.4) jest spełniony dla każdej pary liczb (x, y), tzn. obszarem D może być każdy jednospójny obszar płaski, w szczególności cała płaszczyzna.

Z pierwszego z warunków (11.5.3) mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4x^3+6xy^3, \quad \text{skąd} \quad F(x,y)=\int(4x^3+6xy^3)\,dx,$$

to znaczy

$$F(x,y)=x^4+3x^2y^3+\varphi(y),$$

gdzie zamiast stałej dowolnej całkowania C (liczbowej) użyliśmy symbolu $\varphi(y)$, dowolnej różniczkowalnej funkcji $\varphi(y)$. Funkcję $\varphi(y)$ wyznaczymy z drugiego z warunków (11.5.3); mamy

$$\frac{\partial F}{\partial y}=9x^2y^2+\varphi'(y)\equiv 9x^2y^2+3,$$

skąd $\varphi'(y)=3$, tzn. $\varphi(y)=3y$.

Otrzymaliśmy więc

$$F(x,y)=x^4+3x^2y^3+3y,$$

a więc wszystkie krzywe całkowe równania (1) tworzą rodzinę linii

$$x^4+3x^2y^3+3y=C.$$

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 11.76 - 11.106):

11.76. $x-y+(2y-x)\frac{dy}{dx}=0.$

11.77. $2x-y+(4y-x)\frac{dy}{dx}=0.$

11.78. $x+y+(2y+x)\frac{dy}{dx}=0.$

11.79. $x+y+(x-y)\frac{dy}{dx}=0.$

11.80. $x^2+y+(x-2y)\frac{dy}{dx}=0.$

11.81. $3x^2-2y+(3y^2-2x)\frac{dy}{dx}=0.$

11.82. $3x^2+y^2+2y(x-1)\frac{dy}{dx}=0.$

11.83. $2xy+3y^2+(x^2+6xy-3y^2)\frac{dy}{dx}=0.$

11.84. $x^2-4xy-2y^2+(y^2-4xy-2x^2)\frac{dy}{dx}=0.$

11.85. $3x^2+6xy^2+(6x^2y+4y^3)\frac{dy}{dx}=0.$

11.86. $y^3+2xy^2+(2x^2y+3xy^2)\frac{dy}{dx}=0.$

11.87. $xy^2+(2y^3+3y^2-8y+x^2y-9)\frac{dy}{dx}=0.$

11.88. $x\left((x^2+y^2)-4\right)+y\left((x^2+y^2)+4\right)\frac{dy}{dx}=0.$

11.89. $e^y-(2y-xe^y)\frac{dy}{dx}=0.$

11.90. $e^x(1+e^y)+e^y(1+e^x)\frac{dy}{dx}=0.$

11.91. $\frac{1}{y}+x-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$ **11.92.** $\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$

11.93. $\frac{x-y}{x^2+y^2}+\frac{x+y}{x^2+y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$ **11.94.** $\frac{x+2y}{(x+y)^2}+\frac{y}{(x+y)^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$

11.95. $\frac{1}{x}\ \frac{y^2}{(x-y)^2}+\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}=0.$

11.96. $x+\frac{y}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{x}{x^2+y^2}\right)\frac{dy}{dx}=0.$

11.97. $\ln y-2x+\left(\frac{x}{y}-2y\right)\frac{dy}{dx}=0.$ **11.98.** $\frac{2x}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$

11.99. $\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$ **11.100.** $\frac{x}{x^2+y^2}+y+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)\frac{dy}{dx}=0.$

11.101. $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}+\frac{e^y}{1+x^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$ **11.102.** $1+e^{x/y}+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx}=0.$

11.103. $2x\sin y-y^2\sin x+(x^2\cos y+2y\cos x+1)\frac{dy}{dx}=0.$

11.104. $\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1=0.$

11.105. $\frac{y}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}+\operatorname{ctg} y+\left(\operatorname{tg} x-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x}{\sin^2 y}\right)\frac{dy}{dx}=0.$

11.106. $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0.$

§ 11.6. CZYNNIK CAŁKUJĄCY

Wróćmy do równania różniczkowego postaci (11.5.1), czyli do równania postaci

$$P(x,y)+Q(x,y)\frac{dy}{dx}=0, \tag{11.6.1}$$

gdzie P i Q są klasy C^1 w badanym obszarze.

Jeżeli nie jest spełniony warunek (11.5.4), czyli warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{11.6.2}$$

to równanie (11.6.1) nie jest równaniem zupełnym. Może jednak istnieć taka funkcja $\mu(x, y)\neq 0$ w rozpatrywanym obszarze, że jeżeli pomnożymy przez nią obie strony równania różniczkowego (11.6.1), to otrzymane w ten sposób równanie

$$\mu(x, y)P(x, y)+\mu(x, y)Q(x, y)\frac{dy}{dx}=0 \tag{11.6.3}$$

jest już równaniem zupełnym, tzn. spełniony jest warunek (11.6.2) dla równania (11.6.1), tzn.

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{11.6.4}$$

w obszarze D. Taką funkcję $\mu(x, y)$ nazywamy *czynnikiem całkującym równania* (11.6.1). Można wykazać, że dla każdego równania różniczkowego postaci (11.6.1) istnieje nieskończenie wiele czynników całkujących; znalezienie ich jednak w ogólnym przypadku prowadzi do rozwiązania równania różniczkowego (11.6.4) rzędu pierwszego o pochodnych cząstkowych, z funkcją niewiadomą $\mu(x, y)$, które jest na ogół trudniejsze do rozwiązania niż równanie (11.6.1). W pewnych specjalnych przypadkach jednak łatwo jest znaleźć czynnik całkujący. Wymienimy tutaj kilka najprostszych.

Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D, $Q(x, y)\neq 0$ oraz wyrażenie

$$\frac{1}{Q(x, y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{11.6.5}$$

jest funkcją tylko zmiennej x, to istnieje czynnik całkujący $\mu(x)$ równania (11.6.1), *który jest funkcją tylko zmiennej x, określony równością* [1]

$$\mu(x)=\exp\left\{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\right\}. \tag{11.6.6}$$

Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D, $P(x, y)\neq 0$ oraz wyrażenie

$$\frac{1}{P(x, y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{11.6.7}$$

jest funkcją tylko zmiennej y, to istnieje czynnik całkujący $\mu(y)$ równania (11.6.1), *który jest funkcją tylko zmiennej y, określony równością*

$$\mu(y)=\exp\left\{\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy\right\}. \tag{11.6.8}$$

Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są klasy C^1 w obszarze jednospójnym D oraz istnieją takie dwie funkcje $f(x)$ i $g(y)$ spełniające tożsamościowo równość

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv Q(x, y)f(x)-P(x, y)g(y), \tag{11.6.9}$$

[1] Przypominamy, że symbol $\exp\mu$ oznacza e^{μ}.

to istnieje czynnik całkujący $\mu(x, y)$ będący iloczynem dwóch funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(y)$ określonych równościami

$$\varphi(x)=\exp\left(\int f(x)\,dx\right), \quad \psi(y)=\exp\left(\int g(y)\,dy\right). \tag{11.6.10}$$

ZADANIE 11.107. Rozwiązać równanie

$$(1-x^2y)+x^2(y-x)\frac{dy}{dx}=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Mamy

$$P(x, y)=1-x^2y, \quad Q(x, y)=x^2(y-x),$$

skąd

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2xy-3x^2,$$

zatem równanie (1) nie jest równaniem zupełnym. Badamy, czy istnieje czynnik całkujący zależny tylko od jednej zmiennej. Obliczamy

$$\frac{1}{Q(x, y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{x^2(y-x)}(-x^2-2xy+3x^2)=-\frac{2}{x}. \tag{2}$$

Wyrażenie (2) zależy tylko od x, a więc czynnik całkujący istnieje i wyraża się równością

$$\mu(x)=\exp\left\{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx\right\}=\exp\left\{-\int\frac{2}{x}dx\right\}=\frac{1}{x^2}.$$

Mnożąc równanie (1) stronami przez czynnik całkujący $\mu(x)$ otrzymujemy równanie

$$\left(\frac{1}{x^2}-y\right)+(y-x)\frac{dy}{dx}=0, \tag{3}$$

które, jak łatwo sprawdzić, jest już równaniem zupełnym.

Czytelnik sprawdzi, że całka równania (3), a więc i (1) ma postać

$$-\frac{1}{x}-xy+\tfrac{1}{2}y^2=C. \tag{4}$$

ZADANIE 11.108. Rozwiązać równanie

$$(2x^2+3xy-4x)\frac{dy}{dx}+3y-2xy-3y^2=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Równanie to, jak łatwo sprawdzić, nie jest zupełne i nie ma czynnika całkującego będącego funkcją tylko jednej zmiennej. Zbadajmy, czy nie posiada ono czynnika całkującego będącego iloczynem dwóch funkcji $f(x)$ i $g(y)$. Mamy

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3-2x-6y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=4x+3y-4. \tag{2}$$

Równanie (11.6.9), po redukcji lewej strony, przybiera postać

$$-6x-9y+7\equiv(2x^2+3xy-4x)f(x)+(3y^2+2xy-3y)g(y). \tag{3}$$

Z porównania obu stron powstaje pomysł nadania funkcjom $f(x)$ i $g(y)$ postaci

$$f(x)=\frac{A}{x},\quad g(y)=\frac{B}{y}. \tag{4}$$

Aby wyznaczyć stałe A i B, jeśli takie istnieją, podstawiamy (4) do (3); po uporządkowaniu otrzymujemy

$$-6x-9y+7\equiv(2A+2B)x+(3A+3B)y-4A-3B.$$

Z przyrównania współczynników po obu stronach tej tożsamości otrzymujemy po rozwiązaniu $A=2$, $B=-5$. Z warunku (4) wyznaczamy teraz funkcje $f(x)=\frac{2}{x}$, $g(y)=-\frac{5}{y}$; następnie wyznaczamy

$$\int f(x)\,dx=2\ln|x|,\qquad \int g(y)\,dy=-5\ln|y|$$

i z warunku (11.6.10) wyznaczamy funkcje

$$\varphi(x)=\exp(2\ln|x|)=x^2,\qquad \psi(y)=\exp(-5\ln|y|)=y^{-5}.$$

Czynnikiem całkującym jest więc

$$\mu(x,y)=\varphi(x)\psi(y)=x^2y^{-5}.$$

Mnożąc obie strony równania (1) przez x^2y^{-5}, otrzymujemy równanie różniczkowe

$$(2x^4y^{-5}+3x^3y^{-4}-4x^3y^{-5})\frac{dy}{dx}+3x^2y^{-4}-2x^3y^{-4}-3x^2y^{-3}=0,$$

które jest zupełne. Rozwiązując, otrzymujemy ostatecznie

$$x^3y^{-4}-\tfrac{1}{2}x^4y^{-4}-x^3y^{-3}=C.$$

Zadania

Wyznaczyć czynnik całkujący zależny od jednej zmiennej oraz rozwiązać równania różniczkowe (zad. 11.109 - 11.124):

11.109. $x^2+y-x\frac{dy}{dx}=0.$

11.110. $x^2-y+x\frac{dy}{dx}=0.$

11.111. $xy^2+y-x\frac{dy}{dx}=0.$

11.112. $x^2+y^2+2x+2y\frac{dy}{dx}=0.$

11.113. $e^{2x}-y^2+y\frac{dy}{dx}=0.$

11.114. $x^2-3y^2+2xy\frac{dy}{dx}=0.$

11.115. $y^2+(yx-1)\frac{dy}{dx}=0$.

11.116. $y^2+(x^2-2xy)\frac{dy}{dx}=0$.

11.117. $2xy^2-y+(y^2+x+y)\frac{dy}{dx}=0$.

11.118. $y(2+xy^2)+x(1+xy^2)\frac{dy}{dx}=0$.

11.119. $2x^4+x^5+x^2y+y^3-x(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=0$.

11.120. $2x\operatorname{tg} y+(x^2-2\sin y)\frac{dy}{dx}=0$.

11.121. $1+3x^2\sin y-x\operatorname{ctg} y\frac{dy}{dx}=0$.

11.122. $x\sin y+y\cos y+(x\cos y-y\sin y)\frac{dy}{dx}=0$.

11.123. $\sin x+e^y+\cos x\frac{dy}{dx}=0$.

11.124. $x\sin y+y+(x^2\cos y+x\ln x)\frac{dy}{dx}=0$.

Wyznaczyć czynnik całkujący będący iloczynem funkcji, z których każda jest funkcją tylko jednej zmiennej, oraz rozwiązać równania różniczkowe (zad. 11.125 - 11.135):

11.125. $\left(\frac{x}{y}+\frac{2}{3x}\right)+\left(\frac{2}{3y}-\frac{1}{xy}\right)\frac{dy}{dx}=0$.

11.126. $(3x^3-4x^2y)+\left(\frac{x^4}{y}-4x^3+12xy^2\right)\frac{dy}{dx}=0$.

11.127. $\left(\frac{2x}{y^2}-\frac{1}{2x}\right)+\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$.

11.128. $\frac{x^2}{y}+3y+\left(\frac{y^2}{x}+3x\right)\frac{dy}{dx}=0$.

11.129. $3+\left(x-\frac{1}{x^2e^y}\right)\frac{dy}{dx}=0$.

11.130. $\frac{xy}{e^y}+\left(xy-\frac{x^2y}{e^y}\right)\frac{dy}{dx}=0$.

11.131. $\frac{2x(1+e^y)}{e^y(1+x^2)}+\frac{dy}{dx}=0$.

11.132. $\frac{1}{x}+\left(1-\frac{2y}{xe^y}\right)\frac{dy}{dx}=0$.

11.133. $\cos y+\left(\frac{y}{x\cos y}-x\sin y\right)\frac{dy}{dx}=0$.

11.134. $\left(\sin 4y+\frac{2}{x}\sin 2y\right)-2x\sin^2 2y\frac{dy}{dx}=0$.

11.135. $\left(2-\frac{y^2}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos y}\right)+\left(\frac{2y}{x}\cdot\frac{\cos x}{\cos y}-x\operatorname{tg} y\right)\frac{dy}{dx}=0$.

Rozdział XII

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU DRUGIEGO SPROWADZALNE DO RÓWNAŃ RZĘDU PIERWSZEGO

§ 12.1. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE TYPU $F(x,y',y'')=0$

Równanie różniczkowe typu

$$F(x, y', y'')=0, \tag{12.1.1}$$

tzn. *równanie różniczkowe rzędu drugiego, w którym y nie występuje w sposób wyraźny*, rozwiązujemy przez podstawienie

$$y'=p(x), \tag{12.1.2}$$

tzn. traktując pochodną y' jako funkcję x. Wówczas jest $y''=p'$ i otrzymujemy równanie różniczkowe rzędu pierwszego

$$F(x, p, p')=0. \tag{12.1.3}$$

ZADANIE 12.1. Rozwiązać równanie

$$(1+x)y''=y'. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Robiąc podstawienie $y'=p$, otrzymujemy

$$(1+x)\frac{dp}{dx}=p.$$

Rozdzielamy zmienne

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{1+x},$$

skąd mamy $\ln p=\ln(1+x)+\ln C$, a więc $p=C(1+x)$, to znaczy

$$\frac{dy}{dx}=C+Cx, \tag{2}$$

czyli $y=\int (Cx+C)dx$. Ostatecznie otrzymujemy

$$y=\tfrac{1}{2}Cx^2+Cx+C_1. \tag{3}$$

Jeżeli mamy dane początkowe np., że $y=0$ oraz $y'=1$, gdy $x=0$, to z równania (2) otrzymujemy

$$1=C+C\cdot 0, \quad \text{skąd} \quad C=1,$$

a z równania (3)

$$0=\tfrac{1}{2}G\cdot 0+C\cdot 0+C_1 \quad \text{skąd} \quad C_1=0.$$

Ostatecznie $y=\frac{1}{2}x^2+x$.

Zadania ([1])

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 12.2 - 12.35):

12.2. $y''=1-y'^2$.

12.3. $y''=1+y'^2$.

12.4. $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$.

12.5. $y''=(1+y'^2)^{3/2}$.

12.6. $y''=x+\sin x$.

12.7. $y''=\sin x\cos x$.

12.8. $y''=-y'\operatorname{tg}x+\sin 2x$.

12.9. $y''=\dfrac{y'}{x}+x\sin x$.

12.10. $y''=y'-x^2+2x$.

12.11. $ay''=y'(1+y'^2)$.

12.12. $y''=y'+e^x$.

12.13. $y''=-2y'+e^x$.

12.14. $xy''+y'=0$.

12.15. $xy''-y'=0$.

12.16. $xy''+y'=2x$.

12.17. $xy''+y'=x^2+1$.

12.18. $xy''-y'\ln\dfrac{y'}{x}=0$.

12.19. $xy''-y'=e^x x^2$.

12.20. $(1+2x)y''+2y'=0$.

12.21. $(1+x^2)y''+2xy'=x^3$.

12.22. $x^2y''-y'^2=0$.

12.23. $(1+x^2)y''+y'^2=-1$.

12.24. $xy''\ln x-y'=0$.

12.25. $y''\operatorname{tg}x-y'=1$.

12.26. $x^2y''+xy'=ax+1$.

12.27. $x^3y''+x^2y'=1$.

12.28. $\sqrt{1-x^2}\,y''+\sqrt{1-y'^2}=0$.

12.29. $y'y''-x=1$.

12.30. $y''^2-4y'=0$.

12.31. $y''^2-4y'=-4$.

12.32. $y''^2-5y'+6=0$.

12.33. $y''^2+y'^2-y'^4=0$.

12.34. $y''^2+xy''-y'=0$.

12.35. $xy'^2y''-y'^3-\frac{1}{3}x^4=0$.

([1]) Również niektóre zadania podane w §§ 12.2 i 12.3 można rozwiązać metodą podaną w tym paragrafie.

Rozwiązać równanie różniczkowe przy danym warunku początkowym (zad. 12.36-12.40):

12.36. $y''+2xy'=0$, przy czym a) $y=0$, $y'=-1$, gdy $x=0$, b) $y=0$, $y'=0$, gdy $x=0$.

12.37. $y''-\frac{y'}{x}-\frac{x^2}{y}=0$, przy czym $y=0$, $y'=4$, gdy $x=2$.

12.38. $y''-4\cos 2x=0$, przy czym $y=0$, $y'=1$, gdy $x=0$.

12.39. $y''-\frac{1}{\cos^2 x}=0$, przy czym $y=\frac{1}{2}\ln 2$, $y'=1$, gdy $x=\frac{1}{4}\pi$.

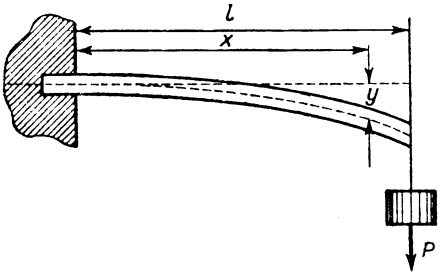
12.40. $y''^2-4xy''+4y'=0$, przy czym a) $y=0$, $y'=-1$, gdy $x=0$, b) $y=0$, $y'=0$, gdy $x=0$.

12.41. Belka zamocowana sztywno z jednej strony jest obciążona siłą P na przeciwległym krańcu (rys. 12.1). Wskutek działania siły P belka ugina się odchylając się od swego pierwotnego poziomego położenia. Równanie linii odchylonej belki pod wpływem siły P wyraża równanie różniczkowe

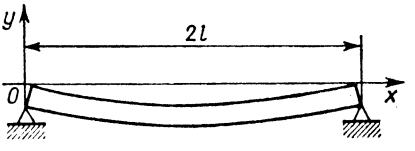
$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=-P(l-x),$$

gdzie E jest modułem Younga, J – momentem powierzchniowym bezwładności przekroju prostopadłego do osi belki, l – długością belki, y – odchyleniem, zaś x – odległością od zamocowania belki. Wiemy, że $y=0$ i $y'=0$ dla $x=0$. Znaleźć odchylenie y.

Uwaga. Belka jest obciążona w granicach sprężystości materiału.



Rys. 12.1



Rys. 12.2

12.42. Belka o długości $2l$ podparta na obu końcach ugina się pod własnym ciężarem (rys. 12.2). Ciężar belki przypadający na jednostkę jej długości wynosi w. Wyznaczyć równanie linii ugiętej belki, jeżeli wiemy, że spełnia ono równanie różniczkowe

$$JE\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}wx^2+wlx+\frac{1}{2}wl^2,$$

przy czym dla $x=l$ jest $y'=0$, a dla $x=0$ jest $y=0$; E oraz J stałe dla danej belki.

12.43. Wyznaczyć równanie ruchu, w którym przyspieszenie $\frac{d^2x}{dt^2}$ jest wielkością stałą i wynosi 10 m/sek^2. Wyznaczyć przebytą drogę do chwili $t=2$ sek, jeżeli w chwili $t=0$ przebyta droga $x=0$ i prędkość $v=5$ m/sek.

§ 12.2. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE TYPU $F(y, y', y'')=0$

Równanie różniczkowe typu

$$F(y, y', y'')=0, \tag{12.2.1}$$

tzn. *równanie różniczkowe rzędu drugiego, w którym x nie występuje w sposób wyraźny*, rozwiązujemy przez podstawienie

$$y'=u(y), \tag{12.2.2}$$

tzn. traktując pochodną y' jako funkcję zmiennej y. Wówczas jest

$$y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dy}u(y), \tag{12.2.3}$$

a równanie różniczkowe (12.2.1) przekształci się na równanie rzędu pierwszego.

ZADANIE 12.44. Rozwiązać równanie

$$y^3y''=-1 \tag{1}$$

z warunkiem początkowym: $y=1$, $y'=0$ dla $x=1$.

Rozwiązanie. Podstawiając $y'=u$ i uwzględniając związek (12.2.3), otrzymujemy $uy^3\frac{du}{dy}=-1$, a po rozdzieleniu zmiennych

$$u\frac{du}{dy}=-\frac{1}{y^3}.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy $u^2=\frac{1}{y^2}+C$, czyli

$$u^2=\frac{1+Cy^2}{y^2}. \tag{2}$$

Wracamy do zmiennej y; ze związku (12.2.2) mamy

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{1+Cy^2}}{y}. \tag{3}$$

Uwzględniając warunki początkowe, otrzymujemy

$$0=\pm\sqrt{1+C}, \quad \text{skąd} \quad C=-1.$$

Podstawiając tę wartość do wzoru (3) po rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\pm\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{dy}{dx}=1,$$

skąd po scałkowaniu otrzymujemy

$$\pm\sqrt{1-y^2}=x+C_1. \tag{4}$$

Uwzględniając ponownie warunki początkowe mamy

$$0=1+C_1, \quad \text{skąd} \quad C_1=-1.$$

Po podstawieniu do wzoru (4) i po przekształceniach otrzymujemy ostatecznie

$$(x-1)^2+y^2=1. \tag{5}$$

Zadania ([1])

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 12.45 - 12.74):

12.45. $y''=-y$.

12.46. $y''=a^2y$.

12.47. $y''=\frac{1}{3}y^{-5/3}$.

12.48. $y''=\frac{1}{8}y^{-1/2}$.

12.49. $y''=y'^2$.

12.50. $y''=1-y'^2$.

12.51. $y''=y'(y+a)$.

12.52. $y''=(1+y'^2)^{3/2}$.

12.53. $y''=\frac{3}{2}e^y$.

12.54. $y''=-y'^2+2e^{-y}$.

12.55. $y''=y'^3\ln y$.

12.56. $2y''=y'(1+y'^2)$.

12.57. $yy''-y'^2=0$.

12.58. $yy''-y'^2=y^2y'$.

12.59. $yy''-y'^2=1$.

12.60. $yy''-y'^2=y^2\ln y$.

12.61. $yy''-y'^3=0$.

12.62. $yy''=y'(a+y')$.

12.63. $2yy''=1+y'^2$.

12.64. $2yy''=3y'^2+4y^2$.

12.65. $2yy''+y'^2+y'^4=0$.

12.66. $y^3y''+1-y^4=0$.

12.67. $y''(1+y^2)=yy'^2$.

12.68. $y''(y-1)=2y'^2$.

12.69. $2y''(4-y)=1+y'^2$.

12.70. $y''(1+yy')=y'(1+y'^2)$.

12.71. $y''^2=4y'$.

12.72. $yy''^2=1$.

12.73. $y''\sqrt{y^2+y'^2}-y'y''-yy'=0$.

12.74. $y'\sqrt{y^2+y''^2}-yy''+y'^2=0$.

([1]) Również niektóre zadania podane po §§ 12.1 i 12.3 można rozwiązać metodą podaną w tym paragrafie.

Rozwiązać równanie różniczkowe przy danym warunku początkowym (zad. 12.75 - 12.78):

12.75. $3y'y''=y+y'^3+1$, przy czym $y=-2$, $y'=0$, gdy $x=0$.

12.76. $2yy''=-y^2+y'^2$, przy czym $y=1$, $y'=1$, gdy $x=0$.

12.77. $y''=e^{2y}$, przy czym $y=0$, $y'=1$, gdy $x=0$.

12.78. $y''+\frac{1}{y^2}e^{y^2}y'-2yy'^2=0$, przy czym $y=0$, $y'=e$, gdy $x=-\frac{1}{2e}$.

12.79. Znaleźć równanie linii mającej tę własność, że stosunek długości odcinka normalnej, zawartego między punktem styczności a osią Ox, do promienia krzywizny w tym samym punkcie jest wielkością stałą n, dodatnią lub ujemną. Rozpatrzyć poszczególne przypadki $n=1$, $n=-1$, $n=\frac{1}{2}$, $n=-\frac{1}{2}$.

§ 12.3. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE JEDNORODNE WZGLĘDEM y, y', y''

Równanie różniczkowe rzędu drugiego, jednorodne względem y, y', y'', rozwiązujemy przez podstawienie

$$y=e^{u(x)}, \tag{12.3.1}$$

gdzie u jest funkcją x, skąd

$$y'=e^u u', \quad y''=e^u u'^2+e^u u''=e^u(u'^2+u''). \tag{12.3.2}$$

Podstawienie (12.3.1) sprowadza dane równanie do równania postaci (12.1.1), tzn. równania rzędu drugiego, w którym zmienna zależna nie występuje w sposób wyraźny.

ZADANIE 12.80. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$2yy''+2y'^2+y^2=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Podstawiając y, y', y'' ze związków (12.3.1), i (12.3.2) otrzymujemy

$$2e^{2u}(u'^2+u'')+2e^{2u}u'^2+e^{2u}=0.$$

Dzielimy przez $e^{2u}\neq 0$ i redukujemy

$$2u''+4u'^2+1=0.$$

Jest to równanie typu (12.1.1). Podstawiając $u'=p(x)$, $u''=p'(x)$ (por. (12.1.2)) otrzymujemy

$$2\frac{dp}{dx}+4p^2+1=0.$$

Rozdzielamy zmienne

$$\frac{2}{4p^2+1}\cdot\frac{dp}{dx}=-1, \quad \text{skąd} \quad \int\frac{2}{4p^2+1}\,dp=-\int dx.$$

Stąd mamy

$$\operatorname{arctg}2p=-x-C, \quad \text{czyli} \quad -\operatorname{tg}(x+C)=2p.$$

Ponieważ $p=\frac{du}{dx}$, więc

$$u=-\tfrac{1}{2}\int\operatorname{tg}(x+C)\,dx, \quad \text{skąd} \quad u=\ln\sqrt{C_1\cos(x+C)}.$$

Ponieważ z kolei $y=e^u$ oraz $e^{\ln a}=a$, ostatecznie więc

$$y=\sqrt{C_1\cos(x+C)}.$$

Równanie różniczkowe rzędu drugiego jednorodne względem y, y', y'' można też rozwiązać podstawiając

(12.3.3) $$y'=yz, \quad \text{skąd} \quad y''=y(z^2+z').$$

Podstawienie to sprowadza dane równanie od razu do równania rzędu pierwszego.

ZADANIE 12.81. Rozwiązać równanie różniczkowe

(1) $$xyy''-xy'^2-yy'=0.$$

Rozwiązanie. Sprawdzamy, że

(2) $$y=0$$

jest całką równania (1). W dalszym ciągu zakładamy, że $y\neq 0$. Podstawiając y' i y'' ze wzorów (12.3.3) mamy

$$xy^2(z^2+z')-xy^2z^2-y^2z=0.$$

Dzieląc przez $y^2\neq 0$ otrzymujemy

$$x(z^2+z')-xz^2-z=0, \quad \text{skąd} \quad xz'-z=0.$$

Jest to równanie różniczkowe rzędu pierwszego. Rozdzielamy zmienne

$$x\frac{dz}{dx}=z, \quad \text{skąd} \quad z=C_1x.$$

Ponieważ $z=\frac{y'}{y}$, mamy

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=C_1x, \quad \text{skąd} \quad y=C_2e^{\frac{1}{2}C_1x^2}.$$

Zauważmy, że jest to ogólne rozwiązanie, gdyż obejmuje ono również całkę $y=0$ (przy $C_2=0$).

Zadania ([1])

Rozwiązać następujące równania różniczkowe (zad. 12.82 - 12.97):

12.82. $yy''-y'^2=0$.

12.83. $yy''-2y'^2=0$.

12.84. $yy''-y'^2=6xy^2$.

12.85. $yy''-y'^2=15y^2\sqrt{x}$.

12.86. $2yy''+y'^2=0$.

12.87. $2yy'-3y'^2=4y^2$.

12.88. $xyy''-yy'-y'^2=0$.

12.89. $xyy''-yy'-xy'^2=0$.

12.90. $x^2yy''-2x^2y'^2+xyy'+y^2=0$.

12.91. $x^2yy''-x^2y'^2+2xyy'-y^2=0$.

12.92. $x^2(y'^2-2yy'')=y^2$,

12.93. $x^2(yy''-y'^2)+xyy'=y\sqrt{x^2y'^2+y^2}$.

12.94. $(y'+2y)y''=y'^2$.

12.95. $y(xy''+y')=xy'^2(1-x)$.

12.96. $(x^2+1)(y'^2-yy'')=xyy'$.

12.97. $y''+\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{y'^2}{y}$.

([1]) Również niektóre zadania podane po §§ 12.1 i 12.2 można rozwiązać metodą podaną w tym paragrafie.

Rozdział XIII

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE O WSPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE EULERA

§ 13.1. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE RZĘDU DRUGIEGO

Równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego o współczynnikach stałych ma postać

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x) \quad (a\neq 0). \tag{13.1.1}$$

Równanie to jest liniowe względem y i jej pochodnych, natomiast funkcja f zmiennej x może być w dowolnej postaci, a litery a, b, c oznaczają dowolne stałe.

Jeżeli w równaniu (13.1.1) jest $f(x)\equiv 0$, czyli równanie ma postać

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \quad (a\neq 0), \tag{13.1.2}$$

to równanie (13.1.2) nazywamy *równaniem jednorodnym* (lub *uproszczonym*); w przypadku przeciwnym nazywamy *równaniem niejednorodnym* (lub *w postaci ogólnej*).

Jeżeli znamy rozwiązanie ogólne $y_1(x; C_1, C_2)$ *równania jednorodnego* (13.1.2) *oraz jakieś rozwiązanie szczególne* $y_2(x)$ *równania niejednorodnego* (13.1.1), *to rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego* (13.1.1) *wyraża się wzorem*

$$y=y_1(x; C_1, C_2)+y_2(x). \tag{13.1.3}$$

Jeżeli znamy dwa rozwiązania szczególne $u_1(x)$ *i* $u_2(x)$ *równania jednorodnego* (13.1.2) *to rozwiązanie ogólne tego równania wyraża się wzorem*

$$y(x; C_1, C_2)=C_1u_1(x)+C_2u_2(x), \tag{13.1.4}$$

przy założeniu, że funkcje $u_1(x)$ *i* $u_2(x)$ *są liniowo niezależne.*

§ 13.2. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE JEDNORODNE

Jak już stwierdziliśmy (por. 13.1.2), *równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego o współczynnikach stałych* ma postać

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \quad (a\neq 0). \tag{13.2.1}$$

Dla równań tej postaci zachodzi następujące twierdzenie:

Przez każdy punkt (x_0, y_0) *płaszczyzny Oxy przechodzi dokładnie jedna linia całkowa o równaniu* $y=g(x)$ *taka, że styczna do niej w tym punkcie tworzy z dodatnim zwrotem osi Ox dany z góry kąt* φ $(\varphi \neq \frac{1}{2}\pi)$.

Mówiąc inaczej, *rozwiązanie równania* (13.2.1) *otrzymujemy zawsze w postaci funkcji jawnej* $y=g(x)$, *spełniającej przy dowolnych wartościach* x_0, y_0, y_1 *warunki początkowe*

$$y_0=g(x_0), \quad y_1=g'(x_0). \tag{13.2.2}$$

Jeżeli w równaniu (13.2.1) podstawimy

$$y=e^{rx}, \quad \text{skąd} \quad y'=re^{rx}, \quad y''=r^2e^{rx}, \tag{13.2.3}$$

to po podzieleniu przez e^{rx} otrzymamy równanie

$$ar^2+br+c=0 \quad (a\neq 0), \tag{13.2.4}$$

zwane *równaniem charakterystycznym* równania (13.2.1).

Jeżeli $b^2-4ac>0$, czyli równanie (13.2.4) ma dwa różne pierwiastki r_1 i r_2, to równanie jednorodne (13.2.1) ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}. \tag{13.2.5}$$

Jeżeli $b^2-4ac=0$, czyli równanie (13.2.4) ma jeden pierwiastek podwójny $r_1=r_2$, to równanie jednorodne (13.2.1) ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y=(C_1x+C_2)e^{r_1x}. \tag{13.2.6}$$

Jeżeli zaś $b^2-4ac<0$, czyli równanie (13.2.4) ma dwa różne pierwiastki zespolone $r_1=\alpha-\beta i$, $r_2=\alpha+\beta i$, to równanie jednorodne (13.2.1) ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x), \tag{13.2.7}$$

gdzie $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

ZADANIE 13.1. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$2y''-5y'-3y=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Jest to równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego o współczynnikach stałych. Tworzymy równanie charakterystyczne

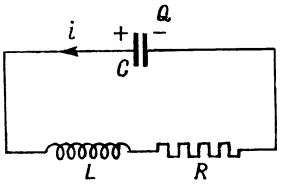
$$2r^2-5r-3=0, \tag{2}$$

z którego otrzymujemy $r_1=-\frac{1}{2}$, $r_2=3$. Zgodnie ze wzorem (13.2.5) rozwiązaniem ogólnym równania (1) jest

$$y=C_1e^{-\frac{1}{2}x}+C_2e^{3x}.$$

ZADANIE 13.2. Kondensator o pojemności $C=10^{-7}$ F naładowany elektrycznie ładunkiem $Q=10^{-4}$ Cul został zwarty poprzez oporność rzeczywistą $R=500\ \Omega$ i induk-

cyjność $L=4\cdot 10^{-3}$ H. Wyznaczyć przebieg zmian natężenia prądu elektrycznego $i=\frac{dQ}{dt}$, jeżeli w chwili zamknięcia obwodu kondensatora, tzn. dla $t=0$, natężenie prądu w obwodzie $i=0$ (rys. 13.1).



Rys. 13.1

Rozwiązanie. Suma różnic potencjałów na poszczególnych elementach obwodu równa się zero, zatem możemy napisać

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{Q}{C}=0, \quad \text{gdzie} \quad i=\frac{dQ}{dt}.$$

Mamy więc rozwiązać równanie różniczkowe

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=0$$

liniowe jednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach.

Piszemy równanie charakterystyczne

$$Lr^2+Rr+\frac{1}{C}=0,$$

dla którego wyróżnik $\Delta=R^2-4\frac{L}{C}=500^2-4\frac{4\cdot 10^{-3}}{10^{-7}}=9\cdot 10^4$; stąd

$$r_1=\frac{-R-\sqrt{\Delta}}{2L}=\frac{-500-300}{2\cdot 4\cdot 10^{-3}}=-10^5, \quad r_2=\frac{-R+\sqrt{\Delta}}{2L}=\frac{-500+300}{2\cdot 4\cdot 10^{-3}}=-25\cdot 10^3.$$

Przebieg zmian ładunku wyrazi się więc funkcją

$$Q=C_1e^{-10^5t}+C_2e^{-25\cdot 10^3t},$$

natomiast przebieg zmian natężenia prądu i jest

$$i=\frac{dQ}{dt}=-10^5C_1e^{-10^5t}-25\cdot 10^3C_2e^{-25\cdot 10^3t}.$$

Ponieważ dla $t=0$ jest $Q=10^{-4}$, $i=0$, stałe C_1 i C_2 wyznaczamy z układu równań

$$C_1+C_2=10^{-4}, \quad -10^5C_1-25\cdot 10^3C_2=0,$$

skąd $C_1=-\frac{1}{8}\cdot 10^{-4}$, $C_2=\frac{4}{3}\cdot 10^{-4}$. Przebieg zmian natężenia prądu $i=f(t)$ dla warunków w zadaniu wyraża się więc funkcją

$$i=10(\tfrac{1}{3}e^{-10^5 t}-\tfrac{1}{3}e^{-25\cdot 10^3 t}).$$

ZADANIE 13.3. Rozwiązać równanie różniczkowe

(1) $$4y''+12y'+9y=0.$$

Rozwiązanie. Tworzymy równanie charakterystyczne

$$4r^2+12r+9=0.$$

Równanie to ma pierwiastek podwójny $r_1=r_2=-\frac{3}{2}$. A więc rozwiązaniem ogólnym równania (1) jest (por. wzór (13.2.6)):

$$y=(C_1x+C_2)e^{-\frac{3}{2}x}.$$

ZADANIE 13.4. Rozwiązać równanie różniczkowe

(1) $$y''+4y'+13y=0.$$

Rozwiązanie. Tworzymy równanie charakterystyczne

$$r^2+4r+13=0,$$

z którego otrzymujemy $r_1=-2-3i$, $r_2=-2+3i$. A więc całką ogólną równania (1) jest (por. wzór (13.2.7)):

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

ZADANIE 13.5. Wyznaczyć równanie ruchu prostoliniowego $x=f(t)$, jeżeli wiemy, że droga x jest wprost proporcjonalna do przyśpieszenia $\frac{d^2x}{dt^2}$, lecz ma zwrot przeciwny (współczynnikiem proporcjonalności jest $K^2\neq 0$).

Rozwiązanie. Piszemy dany związek między drogą x i przyśpieszeniem $\frac{d^2x}{dt^2}$ i stąd otrzymujemy równanie różniczkowe

$$x=-K^2\frac{d^2x}{dt^2};$$

po przeniesieniu na jedną stronę mamy

$$K^2\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+x=0.$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu drugiego o stałych współczynnikach. Piszemy równanie charakterystyczne

$$K^2r^2+1=0,$$

skąd $r=\pm i/K$. Jako rozwiązanie otrzymujemy rodzinę linii

$$x=C_1\sin kt+C_2\cos kt,\quad \text{gdzie}\quad k=\frac{1}{K}.$$

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 13.6 - 13.37):

13.6. $y''=0$.

13.7. $y''+y=0$.

13.8. $y''-2y'=0$.

13.9. $y''-4y=0$.

13.10. $y''-9y=0$.

13.11. $y''+\frac{1}{3}y=0$.

13.12. $y''+y'+y=0$.

13.13. $y''+y'+\frac{1}{4}y=0$.

13.14. $y''+y'-2y=0$.

13.15. $y''-y'-2y=0$.

13.16. $y''+2y'+y=0$.

13.17. $y''-2y'+y=0$.

13.18. $y''+2y'+5y=0$.

13.19. $y''+6y'+10y=0$.

13.20. $y''+6y'+9y=0$.

13.21. $y''-3y'+2y=0$.

13.22. $y''+2y'+2y=0$.

13.23. $y''-2y'+2y=0$.

13.24. $y''-5y'-6y=0$.

13.25. $y''-5y'+6y=0$.

13.26. $y''+4y'+3y=0$.

13.27. $y''-4y'+4y=0$.

13.28. $y''+2y'+10y=0$.

13.29. $y''-4y'+5y=0$.

13.30. $y''-6y'+13y=0$.

13.31. $y''-10y'+25y=0$.

13.32. $y''+2\sqrt{2}y'+2y=0$.

13.33. $y''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=0$.

13.34. $2y''-5y'+2y=0$.

13.35. $9y''-6y'+y=0$.

13.36. $y''+4y=0$, jeżeli $y=0$, $y'=2$, gdy $x=0$.

13.37. $y''+\pi^2y=0$, jeżeli $y=0$, gdy $x=0$.

13.38. W pewnym ruchu prostoliniowym przyśpieszenie $\frac{d^2x}{dt^2}$ jest proporcjonalne do prędkości $\frac{dx}{dt}$, tzn. $\frac{d^2x}{dt^2}=k\frac{dx}{dt}$. Wyznaczyć równanie tego ruchu $x=f(t)$, przyjmując $k=2$.

13.39. W pewnym ruchu stosunek przyśpieszenia $\frac{d^2x}{dt^2}$ do przebytej drogi x jest wielkością stałą i wynosi -9. Wyznaczyć równanie tego ruchu.

13.40. Wyznaczyć równanie ruchu, w którym stosunek przyśpieszenia do prędkości jest wielkością stałą i wynosi -3.

§ 13.3. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE NIEJEDNORODNE

Jak wiemy (por. § 13.1), *równanie różniczkowe liniowe niejednorodne rzędu drugiego o współczynnikach stałych* ma postać

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x) \quad (a\neq 0,\ f(x)\not\equiv 0). \tag{13.3.1}$$

Dla równań tej postaci zachodzi następujące twierdzenie:

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $\alpha<x<\beta$, to przez każdy punkt (x_0, y_0), gdzie $\alpha<x_0<\beta$, płaszczyzny Oxy przechodzi dokładnie jedna linia całkowa o równaniu $y=g(x)$ taka, że styczna do niej tworzy z dodatnim zwrotem osi Ox dany z góry kąt φ $(\varphi\neq\frac{1}{2}\pi)$.

Mówiąc inaczej, *rozwiązanie równania* (13.3.1), *gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $\alpha<x<\beta$, otrzymujemy w postaci funkcji jawnej $y=g(x)$ spełniającej przy dowolnych wartościach x_0, y_0, y_1 (byle tylko $\alpha<x_0<\beta$) warunki początkowe*

$$y_0=g(x_0), \quad y_1=g'(x_0). \tag{13.3.2}$$

Jak podaliśmy w § 13.1, całkę ogólną równania (13.3.1) otrzymujemy jako sumę

$$y=y_1(x; C_1, C_2)+y_2(x), \tag{13.3.3}$$

gdzie y_1 jest całką ogólną równania jednorodnego (13.2.1), a y_2 jakimś rozwiązaniem szczególnym równania (13.3.1). Rozwiązanie y_2 znajdujemy zazwyczaj bądź *metodą przewidywania* (por. § 9.4 oraz zad. 13.41), bądź *metodą uzmienniania stałej* (por. § 9.3 oraz zad. 13.42).

ZADANIE 13.41. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y''-4y'+4y=8x^3-36x. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$y''-4y'+4y=0. \tag{2}$$

Równanie charakterystyczne $r^2-4r+4=0$ ma pierwiastek podwójny $r_1=r_2=2$, wobec tego całka ogólna równania (2) jest

$$y_1(x; C_1, C_2)=(C_1x+C_2)e^{2x}. \tag{3}$$

Następnie przewidujemy jako całkę szczególną równania (1) wielomian stopnia trzeciego, ponieważ funkcja $f(x)$ jest w naszym przykładzie wielomianem stopnia trzeciego. Niech

$$y_2=ax^3+bx^2+cx+d. \tag{4}$$

Wtedy

$$y_2'=3ax^2+2bx+c, \quad y_2''=6ax+2b. \tag{5}$$

Podstawiając powyższe wartości do równania (1) otrzymujemy

$$6ax+2b-12ax^2-8bx-4c+4ax^3+4bx^2+4cx+4d\equiv 8x^3-36x,$$

a po uporządkowaniu

$$4ax^3+(4b-12a)x^2+(6a-8b+4c)x+(2b-4c+4d)\equiv 8x^3-36x.$$

Stąd otrzymujemy związki:

$$4a=8, \quad 4b-12a=0, \quad 6a-8b+4c=-36, \quad 2b-4c+4d=0.$$

Znajdujemy $a=2$, $b=6$, $c=0$, $d=-3$, a więc

$$y_2=2x^3+6x^2-3. \tag{6}$$

Zgodnie ze wzorem (13.3.3), całką ogólną równania (1) jest $y=y_1(x, C_1, C_2)+y_2(x)$, czyli

$$y=2x^3+6x^2-3+(C_1x+C_2)e^{2x}. \tag{7}$$

ZADANIE 13.42. Rozwiązać i przedyskutować ze względu na parametr m równanie różniczkowe

$$y''+4y=\sin mx. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Tworzymy równanie jednorodne

$$y''+4y=0, \tag{2}$$

a następnie piszemy równanie charakterystyczne $r^2+4=0$. Równanie to ma pierwiastki $r_1=2i$, $r_2=-2i$. Całką równania (2) jest więc

$$y_1=A\cos 2x+B\sin 2x. \tag{3}$$

Szukamy całki szczególnej równania (1), stosując metodę przewidywań, postaci

$$y_2=a\sin mx+b\cos mx,$$

skąd

$$y_2'=am\cos mx-bm\sin mx, \qquad y_2''=-am^2\sin mx-bm^2\cos mx.$$

Wstawiając powyższe wartości do równania (1), otrzymujemy

$$-am^2\sin mx-bm^2\cos mx+4a\sin mx+4b\cos mx\equiv\sin mx,$$

a po redukcji

$$(4a-am^2)\sin mx+(4b-bm^2)\cos mx\equiv\sin mx.$$

Porównując współczynniki po obu stronach ostatniej tożsamości, otrzymujemy

$$4a-am^2=1, \qquad 4b-bm^2=0.$$

Jeżeli $m\neq 2$ i $m\neq -2$, to $a=\dfrac{1}{4-m^2}$, $b=0$, skąd

$$y_2=\frac{1}{4-m^2}\sin mx. \tag{4}$$

Całką ogólną równania (1) w tym przypadku jest

$$y=\frac{1}{4-m^2}\sin mx+A\cos 2x+B\sin 2x. \tag{5}$$

Weźmy teraz pod uwagę przypadek $m=2$. Gdy $m=2$, równanie (1) przyjmuje postać

$$y''+4y=\sin 2x. \tag{6}$$

Aby znaleźć całkę szczególną $y_2(x)$ równania (6), stosujemy metodę uzmiennienia stałych; mamy

$$y_2(x)=A(x)\cos 2x+B(x)\sin 2x, \tag{7}$$

przy czym funkcje $A(x)$ i $B(x)$ wyznaczamy ze związków, jakie muszą spełniać ich pochodne.

Ogólnie, jeżeli całkami szczególnymi równania jednorodnego (13.2.1) są $\bar{y}(x)$ i $\bar{\bar{y}}(x)$, to muszą zachodzić związki

$$A'(x)\bar{y}(x)+B'(x)\bar{\bar{y}}(x)=0, \tag{13.3.4}$$

$$A'(x)\bar{y}'(x)+B'(x)\bar{\bar{y}}'(x)=\frac{f(x)}{a}. \tag{13.3.5}$$

W naszym przypadku

$$\bar{y}(x)=\cos 2x, \quad \bar{\bar{y}}(x)=\sin 2x.$$

Mamy więc

$$A'(x)\cos 2x+B'(x)\sin 2x=0, \tag{8}$$

$$A'(x)(-2\sin 2x)+B'(x)(2\cos 2x)=\sin 2x. \tag{9}$$

Mnożąc pierwsze z tych równań przez $2\cos 2x$, a drugie przez $-\sin 2x$ dodając stronami otrzymujemy $2A'(x)(\cos^2 2x+\sin^2 2x)=-\sin^2 2x$, skąd

$$A'(x)=-\tfrac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Całkowanie daje

$$A(x)=-\tfrac{1}{4}(x-\tfrac{1}{4}\sin 4x). \tag{10}$$

Analogicznie, obliczamy $B(x)$ mnożąc równanie (8) przez $2\sin 2x$, a równanie (9) przez $\cos 2x$ i dodając stronami otrzymujemy $2B'(x)=\sin 2x\cos 2x$, skąd

$$B'(x)=\tfrac{1}{4}\sin 4x.$$

Całkując otrzymujemy

$$B(x)=-\tfrac{1}{16}\cos 4x. \tag{11}$$

Podstawiamy obliczone wartości $A(x)$ i $B(x)$ do wzoru (7); mamy

$$\begin{aligned} y_2(x) &= -\tfrac{1}{4}(x-\tfrac{1}{4}\sin 4x)\cos 2x-\tfrac{1}{16}\cos 4x\sin 2x= \\ &= -\tfrac{1}{4}x\cos 2x+\tfrac{1}{16}(\sin 4x\cos 2x-\cos 4x\sin 2x)= \\ &= -\tfrac{1}{4}x\cos 2x+\tfrac{1}{16}\sin(4x-2x)= \\ &= -\tfrac{1}{4}x\cos 2x+\tfrac{1}{16}\sin 2x. \end{aligned} \tag{12}$$

Całką ogólną równania (6) jest więc

$$y=-\tfrac{1}{4}x\cos 2x+\tfrac{1}{16}\sin 2x+A\cos 2x+B\sin 2x. \tag{13}$$

Przyjmując $B_1=\frac{1}{16}+B$ mamy ostatecznie całkę ogólną równania (1), w przypadku gdy $m=2$, w postaci

$$y=(-\tfrac{1}{4}x+A)\cos 2x+B_1\sin 2x. \tag{14}$$

Na koniec rozpatrzmy przypadek, gdy $m=-2$. Gdy $m=-2$, równanie (1) przybiera postać $y''+4y=\sin(-2x)$, czyli

$$y''+4y=-\sin 2x. \tag{15}$$

Postępując analogicznie jak w poprzednim przypadku otrzymamy całkę ogólną równania (1) w postaci

$$y=(\tfrac{1}{4}x+A)\cos 2x+B_1\sin 2x. \tag{16}$$

ZADANIE 13.43. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y''-y=2x\cos x+e^x. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Rozwiązujemy równanie jednorodne

$$y''-y=0. \tag{2}$$

Równanie charakterystyczne $r^2-1=0$ ma pierwiastki $r_1=1$, $r_2=-1$. Całka równania (2) ma więc postać

$$y_1(x)=Ae^x+Be^{-x}. \tag{3}$$

Szukamy teraz całki szczególnej równania (1). W tym celu znajdziemy całki szczególne równań (por. § 9.5);

$$y''-y=2x\cos x, \tag{4}$$

$$y''-y=e^x. \tag{5}$$

Suma całek szczególnych (4) i (5) jest całką szczególną równania (1).

Do znalezienia całki równania (4) stosujemy metodę przewidywań. Ponieważ prawa strona równania (4) jest iloczynem funkcji stopnia pierwszego przez $\cos x$, więc przewidujemy całkę szczególną tego równania w postaci

$$y_2=(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x. \tag{6}$$

Różniczkowanie daje

$$y_2'=a\sin x+(ax+b)\cos x+c\cos x-(cx+d)\sin x,$$

$$y_2''=a\cos x+a\cos x-(ax+b)\sin x-c\sin x-c\sin x-(cx+d)\cos x.$$

Podstawiając te wartości do równania (4) otrzymujemy

$$2a\cos x-(ax+b)\sin x-2c\sin x-(cx+d)\cos x-$$

$$-(ax+b)\sin x-(cx+d)\cos x\equiv 2x\cos x,$$

czyli

$$(2a-2d)\cos x-(2b+2c)\sin x-2ax\sin x-2cx\cos x\equiv 2x\cos x.$$

Przyrównując współczynniki przy odpowiednich wyrazach po obu stronach tej tożsamości, otrzymujemy

$$2a-2d=0,\quad 2b+2c=0,\quad -2a=0,\quad -2c=2,$$

skąd znajdujemy $a=0$, $b=1$, $c=-1$, $d=0$. A więc wyrażenie (6) przyjmuje postać

$$y_2(x)=\sin x-x\cos x. \tag{7}$$

Rozpatrzmy teraz równanie (5). Przewidując całkę równania (5) w postaci $y_3(x)=ae^x$, otrzymujemy sprzeczność, gdyż funkcja ae^x jest szczególnym przypadkiem funkcji (3), czyli jest całką równania (2), a więc nie może być całką równania (5). Przyjmujemy z kolei

$$y_3=(ax+b)e^x. \tag{8}$$

Skąd

$$y_3'=(ax+a+b)e^x,\quad y_3''=(ax+2a+b)e^x.$$

Podstawiając te wartości do równania (5) i dzieląc przez e^x otrzymujemy związek

$$(ax+2a+b)-(ax+b)=1,$$

skąd znajdujemy $a=\frac{1}{2}$, natomiast wartość b pozostaje nieoznaczona. Podstawiając w równaniu (8) wartość $a=\frac{1}{2}$ i zastępując b literą C, otrzymujemy całkę równania (5) w postaci

$$y_3=(\tfrac{1}{2}x+C)e^x. \tag{9}$$

Całka równania (1) jest równa $y=y_1+y_2+y_3$, czyli

$$y=Ae^x+Be^{-x}+\sin x-x\cos x+(\tfrac{1}{2}x+C)e^x. \tag{10}$$

Przyjmując $A_1=A+C$ i przestawiając wyrazy otrzymujemy ostatecznie

$$y=\sin x-x\cos x+(\tfrac{1}{2}x+A_1)e^x+Be^{-x}. \tag{11}$$

Uwaga. Do obliczenia całki równania (5) można zamiast metody prób zastosować też metodę uzmiennienia stałych (por. zad. 13.42).

Całka (3) równania uproszczonego jednorodnego (2) po zastąpieniu A przez $A(x)$ i B przez $B(x)$ przyjmuje postać

$$y_3=A(x)e^x+B(x)e^{-x}. \tag{12}$$

Pochodne $A'(x)$ i $B'(x)$ muszą spełniać związki

$$A'(x)e^x+B'(x)e^{-x}=0, \tag{13}$$

$$A'(x)e^x+B'(x)(-e^{-x})=e^x. \tag{14}$$

Dodając te równania stronami otrzymujemy $2A'(x)e^x=e^x$, czyli $A'(x)=\frac{1}{2}$, skąd

$$A(x)=\tfrac{1}{2}x.$$

Jeżeli zaś odejmiemy stronami równania (13) i (14), to otrzymamy $B'(x)\cdot 2e^{-x}=-e^{x}$, czyli $B'(x)=-\frac{1}{2}e^{2x}$, skąd

$$B(x)=-\tfrac{1}{4}e^{2x}.$$

Podstawiając obliczone wartości $A(x)$ i $B(x)$ do wyrażenia (12), otrzymujemy $y_3=\frac{1}{2}xe^{x}-\frac{1}{4}e^{2x}e^{-x}$, czyli

$$y_3=\tfrac{1}{2}xe^{x}-\tfrac{1}{4}e^{x}. \tag{15}$$

Całka ogólna równania (1) ma więc postać

$$y=Ae^{x}+Be^{-x}+\sin x-x\cos x+\tfrac{1}{2}xe^{x}-\tfrac{1}{4}e^{x}.$$

Oznaczając teraz $A-\frac{1}{4}=A_1$ otrzymujemy ostatecznie

$$y=\sin x-x\cos x+(\tfrac{1}{2}x+A_1)e^{x}+Be^{-x},$$

zgodnie z wynikiem (11) otrzymanym poprzednio.

ZADANIE 13.44. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y''+y=\operatorname{tg}x. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Równanie jednorodne ma postać

$$y''+y=0. \tag{2}$$

Piszemy równanie charakterystyczne $r^2+1=0$, skąd $r_1=i$, $r_2=-i$. A więc całką ogólną równania (2) jest

$$y_1=A\cos x+B\sin x. \tag{3}$$

Aby znaleźć całkę szczególną równania (1), stosujemy metodę uzmiennienia stałej; mamy

$$y_2=A(x)\cos x+B(x)\sin x. \tag{4}$$

Pochodne funkcji $A(x)$ i $B(x)$ muszą spełniać następujące związki:

$$A'(x)\cos x+B'(x)\sin x=0, \tag{5}$$

$$A'(x)(-\sin x)+B'(x)\cos x=\operatorname{tg}x. \tag{6}$$

Mnożąc równanie (5) przez $\cos x$, a równanie (6) przez $-\sin x$, i dodając stronami otrzymujemy $A'(x)(\cos^2x+\sin^2x)=\operatorname{tg}x\,(-\sin x)$, skąd

$$A'(x)=-\frac{\sin^2x}{\cos x}=-\frac{1-\cos^2x}{\cos x}=\cos x-\frac{1}{\cos x},$$

czyli

$$A'(x)=\cos x-\frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\pi+x)}.$$

Całkując i opierając się na wzorze $\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}u\right|$ (por. I, zad. 18.10) otrzymujemy

$$A(x)=\sin x-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)\right|.$$

Mnożąc zaś równanie (5) przez $\sin x$, a równanie (6) przez $\cos x$, i dodając stronami otrzymujemy $B'(x)=\operatorname{tg} x\cdot\cos x$, czyli $B'(x)=\sin x$, skąd

$$B(x)=-\cos x.$$

Podstawiając obliczone wartości na $A(x)$ i $B(x)$ do wzoru (4), otrzymujemy

$$y_2=\left(\sin x-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)\right|\right)\cos x+(-\cos x)\sin x=-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)\right|.$$

Całka ogólna równania (1) jest $y=y_1+y_2$, czyli

$$y=-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}x\right)\right|+A\cos x+B\sin x.$$

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 13.45 - 13.87):

13.45. $y''-7y'+12y=x$.

13.46. $y''+y'-2y=4x$.

13.47. $y''-4y'+4y=4x$.

13.48. $y''+6y'+10y=1-x$.

13.49. $y''-2y'+3y=x+1$.

13.50. $y''-4y'+4y=x^2$.

13.51. $y''-3y'+2y=x^2$.

13.52. $y''-\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}x^2$.

13.53. $y''-y=2\sin x$.

13.54. $y''+y=a\cos x$, $a\neq 0$.

13.55. $y''+9y=\sin 3x$.

13.56. $y''+y=2\sin x-\cos x$.

13.57. $y''+4y=2\cos x+\sin x$.

13.58. $y''+9y=2\cos 3x+5\sin 3x$.

13.59. $y''-2y'+2y=2\cos x+\sin x$.

13.60. $2y''-y'-y=3\cos 2x-\sin 2x$.

13.61. $y''+y=e^x$.

13.62. $y''+2y'+y=8e^x$.

13.63. $y''-4y=10e^{3x}$.

13.64. $y''-a^2y=e^{bx}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

13.65. $y''-4y'+4y=e^{2x}$.

13.66. $y''-5y'+6y=e^{nx}$.

13.67. $y''+9y=x\cos x$.

13.68. $y''+4y=x\sin 2x$

13.69. $y''-8y'+16y=xe^{2x}$.

13.70. $y''-3y'+2y=xe^{3x}$.

13.71. $y''-2y=4x^2e^{2x}$.

13.72. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

13.73. $y''-y'+12y=3x-\sin 2x$.

13.74. $y''+2y'-3y=3x+2-65\sin 2x$.

13.75. $y''-3y'+2y=x^3+\sin x$.

13.76. $y''+4y=x(1+\cos 2x)$.

13.77. $y''-6y'+8y=e^x+e^{2x}$.

13.78. $y''+2y'+y=e^x+e^{-x}$.

13.79. $y''+4y=\dfrac{1}{\cos 2x}$.

13.80. $y''-y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

13.81. $y''-2y'=(x+1)e^{2x}$.

13.82. $y''-3y'+2y=(x^2+x)e^{3x}$.

13.83. $y''-2y'+2y=e^x\cos x$.

13.84. $y''+y'+y=e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{1}{2}x\sqrt{3}$.

13.85. $2y''-5y'-7y=e^{2x}+\sin x$.

13.86. $y''+4y=\sin x$ przy warunkach początkowych $x=0$, $y=1$, $y'=1$.

13.87. $y''-4y'+3y=e^{2x}\sin x$ przy warunkach początkowych $x=0$, $y=0$, $y'=0$.

13.88. Wyznaczyć natężenie prądu w zależności od czasu $i=f(t)$ dla obwodu (rys. 9.4, str. 244) elektrycznego włączonego w chwili $t=0$ do źródła prądu zmiennego o napięciu $u=U\sin\omega t$. Obwód zawiera oporność R, indukcyjność L i pojemność C połączone w szereg. Wiemy, że szukana funkcja $i=f(t)$ spełnia równanie różniczkowe

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=U\omega\cos\omega t.$$

§ 13.4. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE EULERA

Uogólnieniem równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach rzędu drugiego jest równanie różniczkowe postaci

$$ax^2y''+bxy'+cy=f(x) \quad (a\neq 0), \tag{13.4.1}$$

zwane *równaniem różniczkowym Eulera*. W równaniu tym a, b, c są stałe, a równanie jest liniowe względem y i jej pochodnych.

Jeżeli $f(x)\equiv 0$, czyli równanie (13.4.1) ma postać

$$ax^2y''+bxy'+cy=0 \quad (a\neq 0), \tag{13.4.2}$$

nazywamy go *równaniem jednorodnym* (lub *uproszczonym*), w przypadku przeciwnym – *równaniem niejednorodnym* (lub *w postaci ogólnej*).

Jeżeli $u_1(x)$ i $u_2(x)$ są dwoma liniowo niezależnymi (por. § 13.1) rozwiązaniami szczególnymi równania jednorodnego (13.4.2), to rozwiązanie ogólne $y_1(x; C_1, C_2)$ otrzymujemy jako sumę

$$y_1(x; C_1, C_2)=C_1u_1(x)+C_2u_2(x), \tag{13.4.3}$$

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (13.4.1) otrzymujemy w postaci

$$y(x; C_1, C_2)=y_1(x; C_1, C_2)+y_2(x), \tag{13.4.4}$$

gdzie y_2 jest jakimś rozwiązaniem szczególnym równania (13.4.1). Rozwiązanie szczególne y_2 znajdujemy zazwyczaj *metodą przewidywań* lub *metodą uzmienniania stałych*.

Rozwiązanie równania jednorodnego (13.4.2) przewidujemy w postaci funkcji potęgowej

$$y=x^r, \quad \text{skąd} \quad y'=rx^{r-1}, \; y''=r(r-1)x^{r-2}. \tag{13.4.5}$$

Przy założeniu, że $x^r\neq 0$, po podstawieniu do równania (13.4.2) i po uproszczeniu otrzymujemy *równanie charakterystyczne*

$$ar(r-1)+br+c=0 \quad (a\neq 0), \tag{13.4.6}$$

czyli

$$ar^2-(a-b)r+c=0 \quad (a\neq 0). \tag{13.4.7}$$

Jeżeli $\Delta=(a-b)^2-4ac>0$, to równanie charakterystyczne (13.4.6) ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste r_1 i r_2, a równanie jednorodne (13.4.2) ma rozwiązanie ogólne w postaci

$$y(x; C_1, C_2)=C_1x^{r_1}+C_2x^{r_2}. \tag{13.4.8}$$

Jeżeli $\Delta=0$, to równanie (13.4.6) ma jeden pierwiastek rzeczywisty podwójny $r_1=r_2$, a równanie jednorodne (13.4.2) ma rozwiązanie ogólne w postaci

$$y(x; C_1, C_2)=C_1x^{r_1}+C_2x^{r_1}\ln x. \tag{13.4.9}$$

Jeżeli zaś $\Delta<0$, to równanie (13.4.6) ma dwa różne pierwiastki zespolone sprzężone $r_1=\alpha-\beta i$, $r_2=\alpha+\beta i$, a równanie jednorodne ma rozwiązanie ogólne w postaci

$$y(x; C_1, C_2)=x^{\alpha}(C_1\cos(\beta\ln x)+C_2\sin(\beta\ln x)). \tag{13.4.10}$$

ZADANIE 13.89. Rozwiązać równanie

$$3x^2y''-2xy'+2y=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Jest to równanie różniczkowe Eulera jednorodne (uproszczone). Tworzymy równanie charakterystyczne

$$3r(r-1)-2r+2=0, \tag{2}$$

w którym $\Delta>0$, skąd $r_1=\frac{2}{3}$, $r_2=1$. A więc rozwiązaniem ogólnym, zgodnie ze wzorem (13.4.8), jest

$$y(x; C_1, C_2)=C_1x^{\frac{2}{3}}+C_2x. \tag{3}$$

ZADANIE 13.90. Rozwiązać równanie

$$x^2y''+7xy'+9y=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Tworzymy równanie charakterystyczne

$$r(r-1)+7r+9=0, \tag{2}$$

w którym $\Delta=0$, skąd $r=-3$. Rozwiązaniem ogólnym, zgodnie ze wzorem (13.4.9), jest

$$y(x; C_1, C_2)=C_1x^{-3}+C_2x^{-3}\ln x.$$

ZADANIE 13.91. Rozwiązać równanie

$$2x^2y''-4xy'+7y=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Tworzymy równanie charakterystyczne

$$2r(r-1)-4r+7=0, \tag{2}$$

w którym $\Delta<0$, skąd $r_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{5}$, $r_2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{5}$. Rozwiązanie ogólne, zgodnie ze wzorem (13.4.10), ma postać

$$y(x; C_1, C_2)=x^{\frac{3}{2}}(C_1\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\ln x)+C_2\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\ln x)).$$

ZADANIE 13.92. Rozwiązać równanie

$$x^2y''+xy'-y=x^2. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Jest to równanie różniczkowe Eulera w postaci ogólnej (tzn. niejednorodne). Przy rozwiązaniu korzystamy ze wzoru (13.4.4). W tym celu rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$x^2y''+xy'-y=0. \tag{2}$$

Tworzymy równanie charakterystyczne

$$r(r-1)+r-1=0, \quad \text{czyli} \quad r^2-1=0,$$

skąd $r_1=1$, $r_2=-1$. Rozwiązaniem ogólnym równania (2) jest

$$y_1=Ax+Bx^{-1}. \tag{3}$$

Szukamy teraz jakiegoś rozwiązania szczególnego y_2 równania niejednorodnego (1). Stosujemy metodę przewidywań. Przypuszczamy, że rozwiązaniem jest wielomian stopnia drugiego (gdyż $f(x)=x^2$), czyli

$$y_2=ax^2+bx+c, \quad \text{skąd} \quad y_2'=2ax+b, \; y_2''=2a. \tag{4}$$

Po podstawieniu do równania (1) i po redukcji otrzymujemy $3ax^2-c=x^2$, skąd $3a=1$, $c=0$, czyli $a=\frac{1}{3}$, $c=0$, b dowolne. Mamy więc

$$y_2=\tfrac{1}{3}x^2+bx. \tag{5}$$

Zgodnie ze wzorem (13.4.4) rozwiązanie ogólne równania (1) ma postać $y=y_1+y_2$, czyli

$$y=Ax+Bx^{-1}+\tfrac{1}{3}x^2+bx. \tag{6}$$

Oznaczając $A+b=A_1$ otrzymujemy ostatecznie

$$y=\tfrac{1}{3}x^2+A_1x+Bx^{-1}. \tag{7}$$

ZADANIE 13.93. Rozwiązać równanie

$$x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x \quad (x>0). \tag{1}$$

Rozwiązanie. Równanie jednorodne ma postać

$$x^2y''-3xy'-5y=0. \tag{2}$$

Tworzymy równanie charakterystyczne

$$r(r-1)-3r-5=0, \quad \text{czyli} \quad r^2-4r-5=0,$$

skąd $r_1=-1$, $r_2=5$. Rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego (2) jest więc

$$y_1=Ax^5+Bx^{-1}. \tag{3}$$

Aby znaleźć rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (1), stosujemy metodę uzmienniania stałych. Mamy więc

$$y_1 = A(x)x^5 + B(x)x^{-1}, \tag{4}$$

przy czym funkcje $A(x)$ i $B(x)$ muszą spełniać warunki (por. wzory (13.3.4) i (13.3.5)):

$$A'x^5 + \frac{B'}{x} = 0, \quad 5A'x^4 - \frac{B'}{x^2} = \ln x. \tag{5}$$

Dzieląc pierwsze równanie przez x i dodając do drugiego po przekształceniach otrzymujemy

$$A' = \frac{\ln x}{6x^4} = \tfrac{1}{6}x^{-4}\ln x. \tag{6}$$

skąd

$$A(x) = \tfrac{1}{6}\int x^{-4}\ln x\,dx = -\tfrac{1}{18}x^{-3}\ln x - \tfrac{1}{54}x^{-3}. \tag{7}$$

Podstawiając wartość A' ze wzoru (6) do pierwszego równania układu (5) otrzymujemy

$$B' = -\tfrac{1}{6}x^2\ln x, \tag{8}$$

skąd

$$B(x) = -\tfrac{1}{6}\int x^2\ln x\,dx = -\tfrac{1}{18}x^3\ln x + \tfrac{1}{54}x^3. \tag{9}$$

Mamy więc

$$y_2 = \left(-\tfrac{1}{18}x^{-3}\ln x - \tfrac{1}{54}x^{-3}\right)x^5 + \left(-\tfrac{1}{18}x^3\ln x + \tfrac{1}{54}x^3\right)x^{-1} = -\tfrac{1}{9}x^2\ln x. \tag{10}$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (1) ma postać

$$y = y_1 + y_2 = C_1x^5 + C_2x^{-1} - \tfrac{1}{9}x^2\ln x. \tag{11}$$

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 13.94 - 13.113):

13.94. $x^2y'' + xy' - y = 0$.

13.95. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$.

13.96. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$.

13.97. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$.

13.98. $x^2y'' + 9xy' + 12y = 0$.

13.99. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$.

13.100. $x^2y'' + xy' + y = x$.

13.101. $x^2y'' - xy' + y = 2x$.

13.102. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x$.

13.103. $x^2y'' - xy' + y = 3x^3$.

13.104. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^5$.

13.105. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$.

13.106. $x^2y'' + xy' = 12\ln x$.

13.107. $x^2y'' + xy' + y = 6x\ln x$.

13.108. $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^5\ln x$.

13.109. $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$.

13.110. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2ax + 12\dfrac{b}{x}$.

13.111. $y'' + \dfrac{x}{1-x}y' - \dfrac{1}{1-x}y = x - 1$.

13.112. $(2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4$.

13.113. $x^2y'' - 2xy' - 4y = x\sin x + (x^2+16)\cos x$.

§ 13.5. RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE LINIOWE RZĘDU n

Równaniem różniczkowym liniowym rzędu n o współczynnikach stałych nazywamy równanie postaci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (a_n \neq 0). \tag{13.5.1}$$

Równanie to, będące bezpośrednim uogólnieniem równania rzędu drugiego (13.1.1), jest liniowe względem y i wszystkich jej pochodnych; występujące w równaniu współczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_n$ są stałe, a $f(x)$ jest dowolną funkcją. Jeżeli $f(x) \equiv 0$, równanie (13.5.1), czyli równanie postaci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (a_n \neq 0), \tag{13.5.2}$$

nazywamy *równaniem jednorodnym* (lub *uproszczonym*), a w przypadku przeciwnym – *równaniem niejednorodnym* (lub *w postaci ogólnej*).

Jeżeli $u_1, u_2, \ldots, u_n$ są dowolnymi, lecz niezależnymi liniowo rozwiązaniami równania jednorodnego, to rozwiązanie ogólne tego równania ma postać

$$y = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \ldots + C_n u_n(x). \tag{13.5.3}$$

Rozwiązanie ogólne $y(x; C_1, C_2, \ldots, C_n)$ równania niejednorodnego (13.5.1) *otrzymujemy jako sumę rozwiązania ogólnego $y_1(x; C_1, C_2, \ldots, C_n)$ równania jednorodnego* (13.5.2) *i jakiegoś rozwiązania szczególnego $y_2(x)$ równania niejednorodnego* (13.5.1), *czyli*

$$y(x; C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_1(x; C_1, C_2, \ldots, C_n) + y_2(x). \tag{13.5.4}$$

Rozwiązanie szczególne $y_2(x)$ znajdujemy zazwyczaj bądź *metodą przewidywania*, bądź *metodą uzmienniania stałych* (por. § 13.3).

Zajmiemy się rozwiązywaniem równania jednorodnego (13.5.2). Przewidujemy, że równanie to ma rozwiązanie szczególne postaci

$$y = e^{rx}, \quad \text{skąd} \quad y' = re^{rx}, \; y'' = r^2 e^{rx}, \; \ldots, \; y^{(n)} = r^n e^{rx}. \tag{13.5.5}$$

Po podstawieniu tych wartości do równania (13.5.2) i po podzieleniu przez $e^{rx} \neq 0$ otrzymujemy *równanie charakterystyczne*

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0). \tag{13.5.6}$$

Pierwiastki równania (13.5.6)([1]) nazywamy *pierwiastkami charakterystycznymi* równania (13.5.2).

Jeżeli równanie (13.5.6) ma n różnych (tzn. jednokrotnych) rzeczywistych pierwiastków $r_1, r_2, \ldots, r_n$, to równanie (13.5.2) ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y(x; C_1, C_2, \ldots, C_n) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}. \tag{13.5.7}$$

Jeżeli równanie (13.5.6) ma k różnych (jednokrotnych) pierwiastków rzeczywistych $r_1, r_2, \ldots, r_k$ oraz $n-k$ różnych (jednokrotnych) parami sprzężonych pierwiastków zespo-

([1]) Metody rozwiązywania takiego równania podane są w części I, § 8.2.

lonych $r_l=\alpha_l+i\beta_l$, $\bar{r}_l=\alpha_l-i\beta_l$ $(l=1,2,\ldots,\frac{1}{2}(n-k))$, to rozwiązanie ogólne równania (13.5.2) równa się sumie wyrażeń

$$C_1 e^{r_1 x}+C_2 e^{r_2 x}+\ldots+C_k e^{r_k x} \tag{13.5.8}$$

oraz wyrażeń

$$e^{\alpha_l x}(C_{k+(2l-1)}\cos\beta_l x+C_{k+2l}\sin\beta_l x) \quad \left(l=1,2,\ldots,\tfrac{1}{2}(n-k)\right). \tag{13.5.9}$$

Jest to możliwe wówczas, gdy $n-k$ jest liczbą parzystą. Rozwiązanie to możemy zapisać więc w postaci

$$y(x;C_1,C_2,\ldots,C_n)=\sum_{l=1}^{k} C_l e^{r_l x}+\sum_{l=1}^{\frac{1}{2}(n-k)} e^{\alpha_l x}(C_{k+(2l-1)}\cos\beta_l x+C_{k+2l}\sin\beta_l x). \tag{13.5.10}$$

Jeżeli wreszcie równanie (13.5.6) ma pierwiastki jednokrotne i wielokrotne (zarówno rzeczywiste jak i zespolone), to rozwiązanie ogólne równania (13.5.2) składa się z sumy wyrażeń postaci (13.5.8) (dla jednokrotnych pierwiastków rzeczywistych), wyrażeń postaci (13.5.9) (dla jednokrotnych pierwiastków zespolonych), wyrażeń postaci

$$e^{r_l x}(C_1^{(l)}+C_2^{(l)}x+\ldots+C_k^{(l)}x^{k-1}) \tag{13.5.11}$$

(dla k-krotnych pierwiastków rzeczywistych r_l) oraz wyrażeń postaci

$$e^{\alpha_l x}((C_1^{(l)}+C_2^{(l)}x+\ldots+C_k^{(l)}x^{k-1})\cos\beta_l x+ \\ +(C_{k+1}^{(l)}+C_{k+2}^{(l)}x+\ldots+C_{2k}^{(l)}x^{k-1})\sin\beta_l x) \tag{13.5.12}$$

(dla k-krotnych pierwiastków zespolonych parami sprzężonych $r_l=\alpha_l+i\beta_l$, $\bar{r}_l=\alpha_l-i\beta_l$).

ZADANIE 13.114. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y'''-2y''-5y'+6=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Jest to równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu trzeciego o stałych współczynnikach. Tworzymy równanie charakterystyczne

$$r^3-2r^2-5r+6=0. \tag{2}$$

Jednym z pierwiastków równania (2) jest $r_1=1$. Po podzieleniu przez $r-1$ otrzymujemy $r^2-r-6=0$, skąd $r_2=-2$, $r_3=3$. Zgodnie ze wzorem (13.5.7) rozwiązaniem ogólnym równania (1) jest

$$y(x;C_1,C_2,C_3)=C_1 e^{x}+C_2 e^{-2x}+C_3 e^{3x}. \tag{3}$$

ZADANIE 13.115. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y'''+8y=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Równanie charakterystyczne

$$r^3+8=0 \tag{2}$$

ma pierwiastki $r_1=-2$ oraz $r_2=1+i\sqrt{3}$, $r_3=1-i\sqrt{3}$ (zespolone sprzężone). Zatem rozwiązaniem ogólnym równania (1) zgodnie ze wzorem (13.5.10) jest

$$y(x; C_1, C_2, C_3)=C_1 e^{-2x}+e^{x}(C_2\cos x\sqrt{3}+C_3\sin x\sqrt{3}). \tag{3}$$

ZADANIE 13.116. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y^{(7)}-3y^{(6)}+5y^{(5)}-7y^{(4)}+7y'''-5y''+3y'-y=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Jest to równanie różniczkowe liniowe jednorodne rzędu siódmego o stałych współczynnikach. Tworzymy równanie charakterystyczne

$$r^7-3r^6+5r^5-7r^4+7r^3-5r^2+3r-1=0. \tag{2}$$

Jednym z pierwiastków jest $r_1=1$. Sprawdzamy, czy nie jest on pierwiastkiem wielokrotnym. Piszemy pochodną lewej strony ostatniego równania; mamy

$$7r^6-18r^5+25r^4-28r^3+21r^2-10r+3=0 \tag{3}$$

i stwierdzamy, że $r_2=1$ jest również pierwiastkiem równania (3). Z kolei różniczkujemy jeszcze jeden raz

$$42r^5-90r^4+100r^3-84r^2+42r-10=0 \tag{4}$$

i stwierdzamy, że $r_3=1$ jest również pierwiastkiem równania (4). Różniczkujemy jeszcze raz

$$210r^4-360r^3+300r^2-168r+42=0. \tag{5}$$

Ponieważ $r=1$ nie jest pierwiastkiem równania (5), więc $r=1$ jest potrójnym pierwiastkiem równania (1), a zatem lewa strona równania (2) dzieli się przez $(r-1)^3$. Po podzieleniu otrzymujemy $r^4+2r^2+1=0$, czyli $(r^2+1)^2=0$, skąd $r_{4,5}=i$, $r_{6,7}=-i$. Rozwiązanie ogólne równania (1) otrzymamy jako sumę składników postaci

$$e^{x}(C_1+C_2x+C_3x^2)$$

(dla $r=1$, krotność 3) oraz

$$(C_4+C_5x)\cos x+(C_6+C_7x)\sin x$$

(dla $r=i$, $r=-i$, $\alpha=0$, $\beta=1$, krotność 2). Zatem ostatecznie

$$y(x; C_1, C_2, \ldots, C_7)=e^{x}(C_1+C_2x+C_3x^2)+(C_4+C_5x)\cos x+(C_6+C_7x)\sin x.$$

ZADANIE 13.117. Rozwiązać równanie

$$y'''-7y''+19y'-13y=13x^3-57x^2-10x+70. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Jest to równanie niejednorodne. Rozpatrujemy więc najpierw równanie jednorodne

$$y'''-7y''+19y'-13y=0. \tag{2}$$

Równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$r^3-7r^2+19r-13=0. \tag{3}$$

Jednym z pierwiastków tego równania jest $r_1=1$. Dzieląc równanie (3) przez $r-1$ otrzymujemy $r^2-6r+13=0$, skąd $r_2=3+2i$, $r_3=3-2i$. Rozwiązaniem ogólnym równania (2) jest więc

$$y_1(x; A, B, C)=Ae^x+e^{3x}(B\cos 2x+C\sin 2x). \tag{4}$$

Szukamy teraz rozwiązania szczególnego równania (1). Ponieważ po prawej stronie tego równania występuje wielomian stopnia trzeciego, przewidujemy, że rozwiązanie szczególne ma postać

$$y_2(x)=ax^3+bx^2+cx+d, \tag{5}$$

skąd

$$y_2'=3ax^2+2bx+c, \quad y_2''=6ax+2b, \quad y_2'''=6a.$$

Podstawiając do równania (1), otrzymujemy

$$6a-7(6ax+2b)+19(3ax^2+2bx+c)-13(ax^3+bx^2+cx+d)\equiv 13x^3-57x^2-10x+70.$$

Przyrównując współczynniki otrzymujemy związki

$$6a-14b+19c-13d=70, \quad -42a+38b-13c=-10, \quad 57a-13b=-57,$$
$$-13a=13,$$

skąd $a=-1$, $b=0$, $c=4$, $d=0$. Mamy więc

$$y_2(x)=-x^3+4x. \tag{6}$$

Całką ogólną równania (1) na podstawie wzoru (13.5.4) jest więc

$$y(x; A, B, C)=-x^3+4x+Ae^x+e^{3x}(B\cos 2x+C\sin 2x). \tag{7}$$

Zadania

Rozwiązać równania różniczkowe (zad. 13.118 - 13.154):

13.118. $y'''-8y=0$.

13.119. $y'''-y''=0$.

13.120. $y'''+3y'-4y=0$.

13.121. $y'''-6y''+11y'-6y=0$.

13.122. $y'''-5y''+17y'-13y=0$

13.123. $y'''-6y''+12y'-8y=0$.

13.124. $y'''-2y''-3y'+10y=0$.

13.125. $y'''-5y''+8y'-4y=0$.

13.126. $y'''-7y''+16y'-12y=0$.

13.127. $y^{(4)}-16y=0$.

13.128. $y^{(4)}+4y=0$.

13.129. $y^{(4)}-5y''+4y=0$.

13.130. $y^{(4)}+5y''+4y=0$.

13.131. $y^{(4)}-\frac{3}{4}y''-\frac{1}{4}y=0$.

13.132. $y^{(4)}+2y'''+3y''+2y'+y=0$.

13.133. $y^{(4)}+4y'''+6y''+4y'+y=0$.

13.134. $y^{(4)}-y'''+y''-y'+12y=0$.

13.135. $y^{(4)}-2y'''+2y''-2y'+y=0$.

13.136. $y^{(5)}+8y'''+16y'=0$.

13.137. $y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0$.

13.138. $y^{(6)}+y=0$.

13.139. $y^{(7)}+3y^{(6)}+3y^{(5)}+y^{(4)}=0$.

13.140. $y'''+y''=x$.

13.141. $y'''-6y''+11y'-6y=x$.

13.142. $y'''-2y'+y=x^2$.

13.143. $y'''+y''+y'+y=x^3+3x^2+6x+6$.

13.144. $y'''-3y''+3y'-y=e^x$.

13.145. $y'''+y''=\sin 2x$.

13.146. $y'''-3y''+3y'+2y=(9x+1)e^x$.

13.147. $y'''-y''=6x+e^{-x}$.

13.148. $y'''-y''+4y'-4y=3e^{2x}-4\sin 2x$.

13.149. $y^{(4)}-y=x^3$.

13.150. $y^{(4)}+2y''+y=\cos x$.

13.151. $y^{(4)}+5y''+4y=3\sin x$.

13.152. $y^{(4)}-y=4\sin x-8e^{-x}+1$.

13.153. $y'''-y'=0$, przy warunkach początkowych: $x=2$, $y=1$, $y'=0$, $y''=0$.

13.154. $y^{(5)}-6y^{(4)}-3y=0$, przy warunkach początkowych: $x=1$, $y=0$, $y'=0$, $y''=0$, $y'''=0$, $y^{(4)}=0$.

Rozdział XIV

UKŁAD DWÓCH RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH RZĘDU PIERWSZEGO

§ 14.1. UWAGI OGÓLNE

Układem dwóch równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego nazywamy układ postaci

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,z), \quad \frac{dz}{dx}=g(x,y,z), \tag{14.1.1}$$

przy czym o funkcjach $f(x,y,z)$ i $g(x,y,z)$ zakładamy, że są ciągłe w pewnym obszarze trójwymiarowym V.

Rozwiązaniem układu (14.1.1) nazywamy każdy układ dwóch funkcji

$$y=y(x), \quad z=z(x) \tag{14.1.2}$$

określonych w pewnym przedziale (a,b), sprowadzający w tym przedziale (a,b) układ (14.1.1) w układ tożsamości. Krzywą w przestrzeni trójwymiarowej odpowiadającą rozwiązaniu (14.1.2) nazywamy *krzywą* (*linią*) *całkową* układu (14.1.1).

Rozwiązać (*scałkować*) *układ* (14.1.1) w przedziale (a,b) znaczy znaleźć wszystkie funkcje y i z będące rozwiązaniem układu (14.1.1) w tym przedziale. Funkcje te, jeżeli istnieją, zależą od dwóch stałych dowolnych C_1 i C_2. Dlatego możemy napisać

$$y=\varphi(x;C_1,C_2), \quad z=\psi(x;C_1,C_2). \tag{14.1.3}$$

Jeśli narzucimy warunek, aby dla pewnej wartości x_0 $(a<x_0<b)$ zmiennej niezależnej x funkcje (14.1.3) przybierały z góry podane wartości y_0, z_0, to problem wyznaczenia takiego rozwiązania układu nazywamy *zagadnieniem na wartości początkowe dla układu* (14.1.1).

Rozwiązaniem ogólnym układu (14.1.1) nazywamy takie rozwiązanie (14.1.3) tego układu, że dla każdej wartości x_0 przedziału $a<x<b$ jest rozwiązalne zagadnienie na wartości początkowe, tzn. jeśli równania

$$y_0=\varphi(x_0;C_1,C_2), \quad z_0=\psi(x_0;C_1,C_2) \tag{14.1.4}$$

są rozwiązalne względem C_1 i C_2 w sposób jednoznaczny, czyli przez punkt (x_0,y_0,z_0) przechodzi dokładnie jedna krzywa dwuparametrowej rodziny (14.1.3).

Jeśli więc wyrazimy rozwiązanie ogólne w postaci dwóch równań niezależnych powstałych przez rozwiązanie układu (14.1.3) względem C_1 i C_2, to otrzymamy dwa równania postaci

$$\Phi(x, y, z)=C_1, \quad \psi(x, y, z)=C_2. \tag{14.1.3}$$

Każdy z tych związków nazywamy *całką pierwszą układu równań różniczkowych* (14.1.1).

§ 14.2. ROZWIĄZYWANIE UKŁADU RÓWNAŃ

ZADANIE 14.1. Rozwiązać układ równań

$$\frac{dy}{dx}=2y+4z+e^{ax}, \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dx}=2z+4y+e^{ax}, \tag{2}$$

przy warunkach początkowych, że dla $x=0$ ma być $y=0$, $z=0$.

Rozwiązanie. Z równania (1) obliczamy

$$z=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{dy}{dx}-\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{4}e^{ax} \tag{3}$$

i po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\frac{dz}{dx}=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx}-\tfrac{1}{4}ae^{ax}.$$

Obliczone wartości na z i dz/dx wstawiamy do równania (2); mamy

$$\tfrac{1}{4}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{dy}{dx}-\tfrac{1}{4}ae^{ax}=2\left(\tfrac{1}{4}\cdot\frac{dy}{dx}-\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{4}e^{ax}\right)+4y+e^{ax},$$

skąd

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-12y=(a+2)e^{ax}. \tag{4}$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie różniczkowe liniowe z jedną niewiadomą funkcją y rzędu drugiego o współczynnikach stałych (patrz § 13.3).

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-12y=0. \tag{5}$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$r^2-4r-12=0, \quad \text{skąd} \quad r_1=-2, \; r_2=6. \tag{6}$$

Całką ogólną równania (5) jest więc

$$y_1=Ae^{-2x}+Be^{6x}. \tag{7}$$

Metodą przewidywań szukamy całki równania (4); przyjmujemy, że

$$y_2=\alpha e^{ax}, \quad \text{skąd} \quad y_2'=a\alpha e^{ax}, \; y_2''=a^2\alpha e^{ax}.$$

Podstawiając powyższe wartości do równania (4) otrzymujemy

$$a^2\alpha e^{ax}-4a\alpha e^{ax}-12\alpha e^{ax}\equiv(a+2)e^{ax},$$

czyli

$$\alpha(a+2)(a-6)e^{ax}\equiv(a+2)e^{ax}.$$

Przy założeniu, że $a\neq -2$, $a\neq 6$, otrzymujemy $\alpha=\dfrac{1}{a-6}$. Zatem

$$y_2(x)=\frac{1}{a-6}e^{ax}.$$

Całką ogólną równania (4) jest więc

$$y(x)=\frac{1}{a-6}e^{ax}+Ae^{-2x}+Be^{6x}. \tag{8}$$

Dla obliczenia funkcji z z równania (3) różniczkujemy (8); mamy

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{a-6}e^{ax}-2Ae^{-2x}+6Be^{6x}.$$

Podstawiając obliczone powyżej wartości do równania (3) otrzymujemy

$$z=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{a-6}e^{ax}-2Ae^{-2x}+6Be^{6x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a-6}e^{ax}+Ae^{-2x}+Be^{6x}\right)-\frac{1}{4}e^{ax},$$

skąd

$$z=\frac{1}{a-6}e^{ax}-Ae^{-2x}+Be^{6x}. \tag{9}$$

Układ (8) i (9) jest rozwiązaniem układu równań (1) i (2) w przypadku $a\neq -2$, $a\neq 6$.

Biorąc pod uwagę warunki początkowe $x=0$, $y=0$, $z=0$ i podstawiając powyższe wartości do (8) i (9) otrzymujemy związki, z których wyliczymy stałe A i B; mamy

$$0=\frac{1}{a-6}+A+B, \; 0=\frac{1}{a-6}-A+B, \quad \text{skąd} \quad A=0, \; B=-\frac{1}{a-6}.$$

Zatem

$$y=\frac{1}{a-6}(e^{ax}-e^{6x}), \quad z=\frac{1}{a-6}(e^{ax}-e^{6x}). \tag{10}$$

Weźmy teraz pod uwagę przypadek $a=-2$. Wtedy równanie (4) jest identyczne z równaniem (5), a więc całką ogólną równania (4) jest

$$y=Ae^{-2x}+Be^{6x}. \tag{11}$$

Chcąc znaleźć funkcję z, różniczkujemy (11); mamy

$$\frac{dy}{dx}=-2Ae^{-2x}+6Be^{6x}.$$

Wstawiając obliczone wartości do (3) otrzymujemy

$$z=-(A+\tfrac{1}{4})e^{-2x}+Be^{6x}. \tag{12}$$

Dla wartości początkowych $x=0$, $y=0$, $z=0$ z wyrażeń (11) i (12) otrzymujemy

$$0=A+B,\quad 0=-(A+\tfrac{1}{4})+B,\quad \text{skąd}\quad A=-\tfrac{1}{8},\ B=\tfrac{1}{8}.$$

Zatem

$$y=\tfrac{1}{8}(e^{6x}-e^{-2x}),\quad z=\tfrac{1}{8}(e^{6x}-e^{-2x}). \tag{13}$$

Pozostał nam jeszcze do rozpatrzenia przypadek $a=6$. Wtedy równanie (4) przyjmuje postać

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-12y=8e^{6x}. \tag{14}$$

Chcąc znaleźć całkę szczególną $y_2(x)$ równania (14) stosujemy metodę uzmienniania stałej. Ponieważ całką równania uproszczonego (5) jest $y_1(x)=Ae^{-2x}+Be^{6x}$, mamy

$$y_2(x)=A(x)e^{-2x}+B(x)e^{6x}. \tag{15}$$

Pochodne funkcji $A(x)$ i $B(x)$ muszą spełniać następujące związki:

$$A'(x)e^{-2x}+B'(x)e^{6x}=0,\quad A'(x)(-2e^{-2x})+B'(x)\cdot 6e^{6x}=8e^{6x}. \tag{16}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez -6 i dodając stronami do drugiego równania otrzymujemy $-8A'(x)e^{-2x}=8e^{6x}$, czyli

$$A'(x)=-e^{8x},\quad \text{skąd}\quad A(x)=-\tfrac{1}{8}e^{8x}.$$

Mnożąc zaś pierwsze równanie przez 2 i dodając stronami do drugiego równania układu (16), otrzymujemy $8B'(x)e^{6x}=8e^{6x}$, czyli

$$B'(x)=1,\quad \text{skąd}\quad B(x)=x.$$

Wstawiając powyższe wartości do wyrażenia (15) otrzymujemy

$$y_2(x)=-\tfrac{1}{8}e^{8x}e^{-2x}+xe^{6x}=(x-\tfrac{1}{8})e^{6x}, \tag{17}$$

a więc całką ogólną równania (14) jest

$$y=(x-\tfrac{1}{8})e^{6x}+Ae^{-2x}+Be^{6x}. \tag{18}$$

Oznaczając $B-\frac{1}{8}=B_1$ otrzymujemy ostatecznie

$$y=xe^{6x}+Ae^{-2x}+B_1e^{6x}. \tag{19}$$

Po zróżniczkowaniu mamy

$$\frac{dy}{dx}=6xe^{6x}+e^{6x}-2Ae^{-2x}+6B_1e^{6x}.$$

Podstawiając powyższe wartości do równania (3), otrzymujemy

$$z = xe^{6x} - Ae^{-2x} + B_1 e^{6x}. \tag{20}$$

Biorąc pod uwagę warunki początkowe $x=0$, $y=0$, $z=0$, otrzymujemy z zależności (19) i (20):

$$0 = A + B_1, \quad 0 = -A + B_1, \quad \text{skąd} \quad A = B_1 = 0,$$

czyli ostatecznie

$$y = xe^{6x}, \quad z = xe^{6x}. \tag{21}$$

Zadania

Rozwiązać układy równań różniczkowych (zad. 14.2 - 14.10):

14.2. $\frac{dy}{dx} = y + z$, $\frac{dz}{dx} = y + z + x$.

14.3. $\frac{dx}{dt} = x + 5y$, $\frac{dy}{dt} = -x - 3y$.

14.4. $\frac{dx}{dt} + y = 0$, $\frac{dy}{dt} + 4x = 0$.

14.5. $\frac{dx}{dt} - 3x - 8y = 0$, $\frac{dy}{dt} + x + 3y = 0$.

14.6. $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}$.

14.7. $\frac{dx}{dt} - x - y = t$, $\frac{dy}{dt} + 4x + 3y = 2t$.

14.8. $\frac{dx}{dt} + 2x + 4y = 4t + 1$, $\frac{dy}{dt} + x - y = \frac{1}{2}t^2$,

14.9. $\frac{dz}{dt} + 7z - y = 0$, $\frac{dy}{dt} + 2z + 5y = 0$, przy czym $z = y = 1$ przy $t = 0$.

14.10. $\frac{dy}{dx} + 3y + z = 0$, $\frac{dz}{dx} - y + z = 0$, przy czym $y = z = 1$ przy $x = 0$.

Rozdział XV

SZEREGI TRYGONOMETRYCZNE

§ 15.1. UWAGI OGÓLNE

Szeregiem trygonometrycznym nazywamy szereg funkcyjny (por. I, § 11.1) postaci

$$a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+ \tag{15.1.1}$$

$$+\ldots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

w którym współczynniki a_n, b_n są stałe.

Jeżeli szereg ten jest jednostajnie zbieżny w przedziale $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, to suma jego $f(x)$ jest w tym przedziale funkcją ciągłą i wówczas wszystkie współczynniki tego szeregu dadzą się wyrazić przez następujące całki funkcji $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx, \tag{15.1.2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\qquad (n=1,2,\ldots),$$

Wzory (15.1.2) noszą nazwę *wzorów Eulera-Fouriera.*

Uwaga. Wyrażenie

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}g(x)\,dx \tag{15.1.3}$$

nazywa się *średnią wartością funkcji* $g(x)$, całkowalnej w przedziale $\langle a,b\rangle$. Łatwo zauważyć, że współczynnik a_0 jest średnią wartością funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$.

Przypuśćmy teraz, że $f(x)$ jest daną funkcją całkowalną w przedziale $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. Jeżeli obliczymy współczynniki $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ ze wzorów (15.1.2) i podstawimy do wzoru (15.1.1), to otrzymamy szereg, który nazywamy *szeregiem Fouriera* danej funkcji $f(x)$. Szereg Fouriera nie zawsze jest jednak zbieżny, a jeśli jest zbieżny, to niekoniecznie do funkcji $f(x)$.

Szereg Fouriera można również napisać w postaci

$$A_0+A_1\sin(x+\varphi_1)+A_2\sin(2x+\varphi_2)+\ldots+A_n\sin(nx+\varphi_n)+\ldots= \tag{15.1.4}$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n),$$

przy czym związki pomiędzy współczynnikami a_n, b_n szeregu (14.1.4) a wartościami A_n, φ_n są następujące:

$$(15.1.5) \qquad a_0 = A_0, \quad a_n = A_n \sin \varphi_n, \quad b_n = A_n \cos \varphi_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

oraz na odwrót

$$(15.1.6) \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \sin \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Mówimy, że funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ *warunki Dirichleta*, jeżeli

1. *Przedział* $\langle -\pi, \pi \rangle$ *da się podzielić na skończoną ilość przedziałów takich, że w każdym z nich dana funkcja* $f(x)$ *jest monotoniczna.*

2. *W każdym punkcie wewnętrznym przedziału* $\langle -\pi, \pi \rangle$ *funkcja* $f(x)$ *przybiera wartość równą średniej arytmetycznej swej granicy lewostronnej i prawostronnej w tymże punkcie* (por. I, § 5.1), *tzn.*

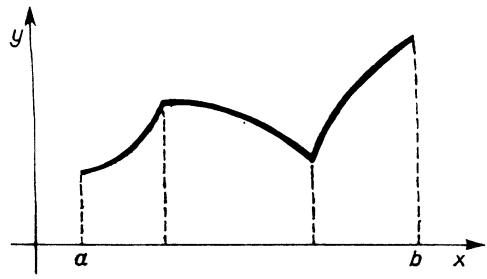
$$(15.1.7) \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}\big(f(x-0) + f(x+0)\big) \quad \textit{dla} \quad -\pi < x < \pi,$$

a dla punktów końcowych przedziału, czyli dla $x = -\pi$ *i* $x = \pi$, *funkcja* $f(x)$ *jest równa średniej arytmetycznej granicy prawostronnej w punkcie* $x = -\pi$ *i granicy lewostronnej w punkcie* $x = \pi$, *tzn.*

$$(15.1.8) \qquad f(-\pi) = f(\pi) = \tfrac{1}{2}\big(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\big).$$

Zachodzi twierdzenie:

(15.1.9) *Jeżeli funkcja* $f(x)$ *spełnia w przedziale* $\langle -\pi, \pi \rangle$ *warunki Dirichleta, to* $f(x)$ *jest w tym przedziale sumą odpowiadającego jej szeregu Fouriera.*



Rys. 15.1

Wprowadzimy teraz jeszcze dodatkowe definicje:

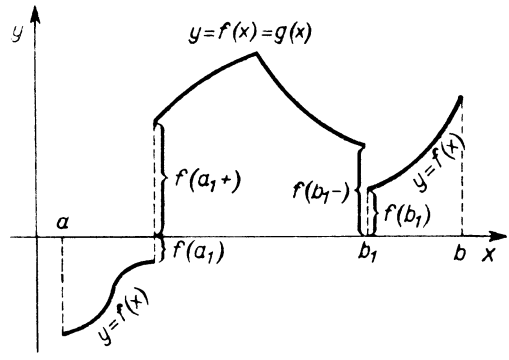
Funkcję $f(x)$ ciągłą w przedziale $\langle a, b \rangle$ nazywamy *funkcją przedziałami klasy* C^1 (por. § 1.9), jeżeli przedział $\langle a, b \rangle$ da się podzielić na skończoną ilość przedziałów domkniętych takich, że w każdym z nich funkcja jest klasy C^1 (rys. 15.1).

Mówimy, że funkcja $f(x)$ nieciągła w punkcie x_0 ma w tym punkcie *nieciągłość pierwszego rodzaju*, jeżeli w tym punkcie istnieją obie granice jednostronne skończone.

Funkcję $f(x)$ nieciągłą w przedziale $\langle a, b\rangle$ nazywamy *funkcją przedziałami klasy* C^1, jeżeli w tym przedziale ma skończoną liczbę punktów x_i nieciągłości pierwszego rodzaju i w każdym w ten sposób powstałym częściowym przedziale domkniętym $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ funkcja ciągła $g_i(x)$, określona wzorem

$$g_i(x)=\begin{cases} f(x_i+0), & \text{gdy} \quad x=x_i, \\ f(x), & \text{gdy} \quad x_i<x<x_{i+1}, \\ f(x_{i+1}-0), & \text{gdy} \quad x=x_{i+1}, \end{cases} \tag{15.1.10}$$

jest funkcją przedziałami klasy C^1 (rys. 15.2).



Rys. 15.2

Mówimy, że funkcja $f(x)$ określona dla $x\in(-\infty, +\infty)$, ciągła lub nieciągła, jest *przedziałami klasy* C^1 *w przedziale nieskończonym*, jeżeli jest przedziałami klasy C^1 w każdym przedziale skończonym.

Zachodzi następujące *twierdzenie o rozwijalności funkcji w szereg Fouriera:*

(15.1.11) *Jeżeli funkcja $f(x)$ przedziałami klasy C^1 (ciągła lub nieciągła) jest okresowa o okresie 2π, to szereg Fouriera odpowiadający tej funkcji jest zbieżny dla wszelkich wartości x, przy czym suma $s(x)$ tego szeregu jest równa*

$$s(x)=\begin{cases} f(x) & \text{w każdym punkcie ciągłości,} \\ \frac{1}{2}(f(x-0)+f(x-0)) & \text{w każdym punkcie nieciągłości.} \end{cases}$$

Jeżeli ponadto funkcja jest ciągła dla wszelkich wartości x, to odpowiadający jej szereg Fouriera jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny.

Ze wzorów (15.1.2) wynika, że jeżeli funkcja $f(x)$ jest funkcją parzystą, tzn. jeżeli spełnia warunek $f(-x)=f(x)$, to w rozwinięciu funkcji w szereg Fouriera występują tylko wyrazy zawierające funkcje $\cos nx$ (cosinus jest funkcją parzystą), gdyż wszystkie współczynniki b_n są równe zeru. Istotnie,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

W pierwszej całce robimy zamianę zmiennych $x=-u$; wtedy $f(x)=f(-u)=f(u)$, $\sin nx=-\sin nu$, $dx=-du$, skąd

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(u)\sin nu\,du+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

Mówimy wówczas o rozwinięciu funkcji $f(x)$ według cosinusów.

Jeżeli zaś funkcja $f(x)$ jest nieparzysta, tzn. jeżeli $f(-x)=-f(x)$, to wszystkie współczynniki a_n muszą być równe zeru i wtedy mówimy o rozwinięciu funkcji $f(x)$ według sinusów.

Jeżeli zachodzi potrzeba rozwinięcia w szereg trygonometryczny funkcji $g(t)$ o okresie $2l$, to przez podstawienie $t=lx/\pi$ otrzymujemy funkcję $f(x)=g(lx/\pi)$ o okresie 2π. Wówczas funkcji $g(t)$ odpowiada szereg trygonometryczny

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nt}{l}+b_n\sin\frac{\pi nt}{l}\right), \tag{15.1.12}$$

w którym współczynniki wyznaczamy według wzorów

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(u)\,du,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos\frac{\pi nu}{l}\,du,\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\sin\frac{\pi nu}{l}\,du\qquad (n=1,2,\ldots). \tag{15.1.13}$$

Może się również zdarzyć, że chcemy rozwinąć w szereg Fouriera (15.1.1) funkcję ciągłą $f(x)$ i przedziałami klasy C^1 w przedziale $\langle a,b\rangle$ zawartym w przedziale $\langle -\pi,\pi\rangle$. Wówczas przedłużamy funkcję $f(x)$ na cały przedział, tzn. określamy taką funkcję $g(x)$ w przedziale $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, że $g(x)\equiv f(x)$ dla $a\leqslant x\leqslant b$. Przedłużenia takiego można dokonać różnymi sposobami; na ogół jednak wybieramy taki sposób, aby funkcja $g(x)$ była też przedziałami klasy C^1, przyjmując np.

$$g(x)=\begin{cases} f(a) & \text{dla} \quad -\pi\leqslant x<a,\\ f(x) & \text{dla} \quad a\leqslant x\leqslant b,\\ f(b) & \text{dla} \quad b<x\leqslant\pi. \end{cases}$$

Specjalnie ważny przypadek zachodzi wtedy, gdy funkcja $f(x)$ jest określona w przedziale $0\leqslant x\leqslant\pi$. Wówczas przedłużamy funkcję $f(x)$ na cały przedział $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ w taki sposób, aby przedłużona funkcja była funkcją nieparzystą albo też funkcją parzystą. W pierwszym przypadku przedłużenie polega na tym, że dla $x<0$ określamy funkcję według wzoru $f(x)=-f(-x)$ oraz przyjmujemy $f(0)=0$; wówczas dla współczynników b_n otrzymujemy wzory

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{15.1.14}$$

a wszystkie współczynniki a_n są tutaj oczywiście równe zeru. Otrzymany szereg dla $x=0$ oraz dla $x=\pi$ jest zbieżny do zera.

W drugim przypadku przedłużenie polega na tym, że dla $x<0$ określamy funkcję według wzoru $f(x)=f(-x)$; wówczas wszystkie współczynniki b_n są równe zeru, a współczynniki a_n obliczamy według wzorów:

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\,dx,$$

(15.1.15)

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Szereg ten dla $x=0$ jest zbieżny do $f(0)$, a dla $x=\pi$ jest zbieżny do $f(\pi)$.

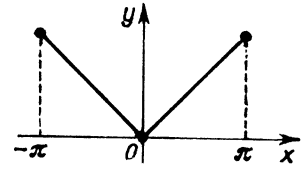
Widzimy więc, że tę samą funkcję całkowalną w przedziale $0\leqslant x\leqslant\pi$ można rozwinąć zarówno według sinusów jak i według cosinusów (patrz np. zad. 15.11).

§ 15.2. ROZWIJANIE FUNKCJI W SZEREG FOURIERA

ZADANIE 15.1. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x)=|x|$ w przedziale $\langle-\pi,\pi\rangle$.

Rozwiązanie. Zgodnie z definicją wartości bezwzględnej (por. I, § 1.6) mamy

(1)
$$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{gdy} \quad -\pi\leqslant x<0,\\ 0, & \text{gdy} \quad x=0,\\ x, & \text{gdy} \quad 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$$



Rys. 15.3

Z wykresu funkcji (rys. 15.3) widzimy, że pierwszy warunek Dirichleta jest spełniony, gdyż przedział $\langle-\pi,\pi\rangle$ da się podzielić na dwa przedziały takie, że w pierwszym $\langle-\pi,0\rangle$ funkcja jest malejąca, a w drugim $\langle0,\pi\rangle$ funkcja jest rosnąca. Co do warunku drugiego wystarczy stwierdzić, że rozpatrywana funkcja jest ciągła dla każdego x, więc we wszystkich punktach wewnętrznych przedziału warunek ten jest spełniony. Ponieważ jednocześnie jest $f(-\pi)=\pi=f(\pi)$, więc drugi warunek Dirichleta jest również spełniony na końcach tego przedziału.

Współczynniki szeregu obliczamy według wzorów (15.1.2) Eulera-Fouriera. Zauważmy, że ponieważ $f(x)$ jest funkcją parzystą, wszystkie współczynniki b_n $(n=1, 2, \ldots)$ są równe zeru. Ponadto mamy od razu

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx+\int_{0}^{\pi}x\,dx\right]=\tfrac{1}{2}\pi. \tag{2}$$

Obliczamy z kolei

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x\cos nx)\,dx+\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx)\right]. \tag{3}$$

W pierwszej całce dokonujemy podstawienia $x=-u$; otrzymujemy

$$\int_{-\pi}^{0}(-x\cos nx)\,dx=\int_{\pi}^{0}u\cos nu\,(-du)=\int_{0}^{\pi}u\cos nu\,du.$$

Mamy więc

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx. \tag{4}$$

Całkując przez części otrzymujemy

$$\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx=\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}.$$

Gdy $x=0$, wyrażenie w nawiasie jest równe $1/n^2$; gdy $x=\pi$, pierwszy wyraz jest równy zeru, gdyż sinus dowolnej wielokrotności π jest równy zeru, natomiast wartość drugiego wyrazu przy n parzystym wynosi $\frac{1}{n^2}(+1)$, a przy n nieparzystym wynosi $\frac{1}{n^2}(-1)$. W ten sposób

$$\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx=\begin{cases}0, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste},\\ -\dfrac{2}{n^2}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste}.\end{cases}$$

Mamy więc na podstawie (4)

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste},\\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste}.\end{cases} \tag{5}$$

Otrzymujemy więc następujące rozwinięcie funkcji $f(x)=|x|$:

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4\cos x}{\pi\cdot 1^2}-\frac{4\cos 3x}{\pi\cdot 3^2}-\frac{4\cos 5x}{\pi\cdot 5^2}-\ldots \tag{6}$$

Po wyniesieniu czynnika $-4/\pi$ przed nawias z wyrazów od drugiego począwszy otrzymujemy

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right) \tag{7}$$

lub krócej

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}. \tag{8}$$

Jest to rozwinięcie funkcji $f(x)=|x|$ w szereg Fouriera w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$.

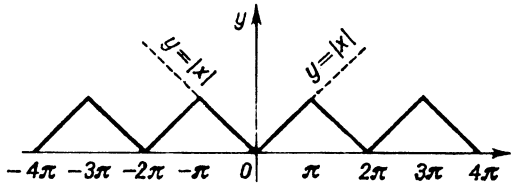
Przyjmując $x=0$, otrzymujemy

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right).$$

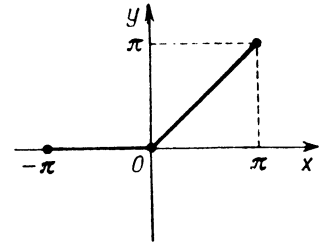
Z tego natychmiast wynika interesująca równość

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}. \tag{9}$$

Poza przedziałem $\langle -\pi, \pi\rangle$ suma szeregu znajdującego się po prawej stronie równości (7) nie jest już równa funkcji znajdującej się po lewej stronie tej równości, tj. nie równa się $|x|$, gdyż prawa strona w równości (7), ze względu na okresowość funkcji trygonometrycznych ma przebieg okresowy (okres wynosi 2π), a strona lewa $|x|$ nie jest funkcją okresową (patrz rys. 15.4).



Rys. 15.4



Rys. 15.5

ZADANIE 15.2. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję (rys. 15.5):

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ x & \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases} \tag{1}$$

Rozwiązanie. Stosujemy wzory (15.1.2), rozbijając przedział $\langle -\pi, \pi\rangle$ na przedziały $\langle -\pi, 0\rangle$ i $\langle 0, \pi\rangle$. Mamy od razu

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{4}. \tag{2}$$

Obliczamy współczynniki a_n; mamy

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,dx.$$

Całkę tę obliczyliśmy w poprzednim zadaniu, a więc

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste},\\ -\dfrac{2}{\pi n^2}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste}.\end{cases} \tag{3}$$

Następnie obliczamy współczynniki b_n; mamy

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx= \tag{4}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=$$

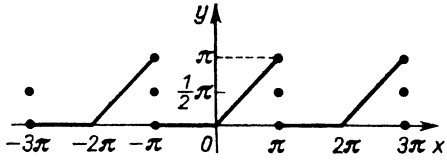
$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{n}, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste},\\ +\dfrac{1}{n}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste}.\end{cases}$$

Otrzymujemy więc następujące rozwinięcie:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)+\left(-\frac{\sin 2x}{2}\right)+\left(-\frac{2}{9\pi}\cos 3x+\frac{\sin 3x}{3}\right)+\left(-\frac{\sin 4x}{4}\right)+ \tag{5}$$

$$+\ldots+\left(-\frac{2}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\right)+\left(-\frac{\sin 2nx}{2n}\right)+\ldots$$

Jest to rozwinięcie w szereg Fouriera (rys. 15.6) funkcji (1) wewnątrz przedziału $\langle-\pi,\pi\rangle$.



Rys. 15.6

Dla $x=\pi$ suma szeregu nie jest równa π, jakby się wydawało na podstawie równości $f(x)=x$ w przedziale $\langle 0,\pi\rangle$, lecz na podstawie drugiego warunku Dirichleta jest równa $\frac{1}{2}(0+\pi)$, tj. $\frac{1}{2}\pi$, i podobnie dla $-\pi$.

Kładąc więc w (5) $x=\pi$, otrzymujemy

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{9\pi}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)^2\pi}+\ldots,$$

czyli

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots\right),$$

skąd łatwo otrzymujemy, że

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}, \tag{6}$$

zgodnie z równością (9) w poprzednim zadaniu.

Uwaga. Funkcję daną możemy przedstawić jako sumę następujących szeregów:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}. \tag{7}$$

Istotnie, zauważmy najpierw, że szeregi występujące po prawej stronie równości są zbieżne, a mianowicie szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}. \tag{8}$$

jest bezwzględnie zbieżny, gdyż

$$\left|\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(2n-1)^2}\leqslant\frac{1}{n^2},$$

a szereg $\sum\frac{1}{n^2}$ jako szereg harmoniczny rzędu $\alpha=2$, jest zbieżny (por. I, § 3.1, wzór (3.1.5)), szereg zaś

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \tag{9}$$

jest zbieżny, jako szereg Fouriera odpowiadający funkcji $g(x)=\frac{1}{2}x$ (por. zadanie 15.3), która oczywiście spełnia warunki Dirichleta. Oznaczmy teraz sumę cząstkową szeregu (8) przez $u_n(x)$, sumę cząstkową szeregu (9) przez $v_n(x)$, a sumę cząstkową szeregu stojącego po prawej stronie (5) przez $w_n(x)$, łatwo zauważyć, że

$$w_n(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}u_n(x)+v_n(x),$$

skąd przechodząc do granicy wraz z $n\to\infty$ (wszystkie ciągi są zbieżne), otrzymujemy równość (7).

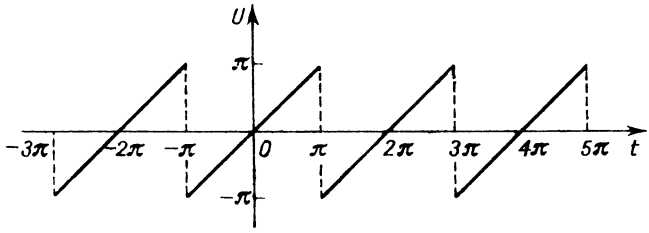
ZADANIE 15.3. Wyznaczyć amplitudy składowych harmonicznych napięcia elektrycznego bazy czasu w oscylografie. Napięcie to zmienia się według krzywej piłowej (rys. 15.7), w przedziale $-\pi<t<\pi$, napięcie $U=t$, gdzie t oznacza czas.

Rozwiązanie. Rozwijamy daną funkcję w szereg Fouriera. Ponieważ funkcja $U=f(t)=t$ jest funkcją nieparzystą, więc wszystkie współczynniki $a_n=0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Wyznaczamy obecnie współczynniki b_n; mamy

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin nt\,dt=\frac{1}{\pi n^2}[-nt\cos nt+\sin nt]_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\frac{2}{n};$$

$\{b_n\}$ jest ciągiem amplitud składowych harmonicznych równoważnego napięcia.



Rys. 15.7

Rozwinięcie w szereg Fouriera danej funkcji $U=f(t)=t$ jest następujące:

$$U=2\left(\sin t-\tfrac{1}{2}\sin 2t+\tfrac{1}{3}\sin 3t-\tfrac{1}{4}\sin 4t+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nt+\ldots\right).$$

Zadania

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję oraz wyznaczyć wartość szeregu dla $x=-\pi$ i $x=\pi$ (zad. 15.4 - 15.10):

15.4. $f(x)=x$ w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$.

15.5. $f(x)=x^2$ w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$.

15.6. $f(x)=x^3$ w przedziale $\langle -\pi, \pi\rangle$.

15.7. $f(x)=\sin ax$ w przedziale $(-\pi, \pi)$; a – dowolna liczba niecałkowita.

15.8. $f(x)=\cos ax$ w przedziale $(-\pi, \pi)$; a – dowolna liczba niecałkowita.

15.9. $f(x)=\begin{cases}2x & \text{dla} \quad -\pi<x<0,\\ 0 & \text{dla} \quad x=0,\\ 6x & \text{dla} \quad 0<x<\pi.\end{cases}$

15.10. $f(x)=\begin{cases}-\cos x & \text{dla} \quad -\pi<x<0,\\ 0 & \text{dla} \quad x=0,\\ \cos x & \text{dla} \quad 0<x<\pi.\end{cases}$

15.11. $f(x)=\begin{cases}-c & \text{dla} \quad -\pi<x<0,\\ c & \text{dla} \quad 0<x<\pi.\end{cases}$ gdzie $c>0$,

15.12. $f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ \sin x & \text{dla} \quad 0<x\leqslant\pi.\end{cases}$

15.13. $f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad 0<x<\alpha,\\ a & \text{dla} \quad \alpha\leqslant x\leqslant\pi-\alpha,\\ 0 & \text{dla} \quad \pi-\alpha<x\leqslant\pi.\end{cases}$ gdzie $a>0$,

15.14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{\alpha} & \text{dla} \quad 0\leqslant x<\alpha,\\ a & \text{dla} \quad \alpha\leqslant x\leqslant\pi-\alpha,\\ \dfrac{a(\pi-x)}{\alpha} & \text{dla} \quad \pi-\alpha<x\leqslant\pi.\end{cases}$ gdzie $a>0$

15.15. $f(x)=|\sin x|$ dla dowolnego x.

15.16. $f(x)=x\cos x$ w przedziale $(-\pi, \pi)$.

Rozwinąć w szereg Fouriera według sinusów funkcję (zad. 15.17 i 15.18):

15.17. $f(x)=a$ $(a>0)$ w przedziale $(0, \pi)$.

15.18. $f(x)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}x$ w przedziale $(0, \pi)$.

Rozwinąć w szereg Fouriera według cosinusów funkcję (zad. 15.19 - 15.23):

15.19. $f(x)=\cos x$ w przedziale $(0, \pi)$.

15.20. $f(x)=\frac{1}{2}\ln \operatorname{ctg}\frac{1}{2}x$ w przedziale $(0, \pi)$.

15.21. $f(x)=\ln(2\cos\frac{1}{2}x)$ w przedziale $\langle 0, \pi)$.

15.22. $f(x)=-\ln(2\sin\frac{1}{2}x)$ w przedziale $(0, \pi\rangle$.

15.23. $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2h} & \text{dla} \quad 0<x\leqslant 2h,\\ 0 & \text{dla} \quad 2h<x<\pi.\end{cases}$

15.24. Rozwinąć w szereg Fouriera według sinusów oraz według cosinusów funkcję $f(x)=x(\pi-x)$ w przedziale $\langle 0, \pi\rangle$.

15.25. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x)=e^x$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

15.26. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{dla} \quad 0<x\leqslant\frac{1}{2}\pi,\\ \pi-x & \text{dla} \quad \frac{1}{2}x<x\leqslant\frac{3}{2}\pi,\\ x-2\pi & \text{dla} \quad \frac{3}{2}\pi<\pi<2\pi.\end{cases}$$

15.27. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}a\left(1-\frac{3}{\pi^2}x^2\right) & \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ \frac{1}{2}a\left(1-\frac{3}{\pi^2}(x-2\pi)^2\right) & \text{dla} \quad \pi\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases} \qquad a\neq 0,$$

15.28. Rozwinąć w szereg Fouriera według sinusów funkcję

$$f(x)=\begin{cases}\frac{h}{c}x & \text{dla} \quad 0\leqslant x<c,\\ \frac{h}{l-c}(l-x) & \text{dla} \quad c<x\leqslant l.\end{cases} \qquad h\neq 0,$$

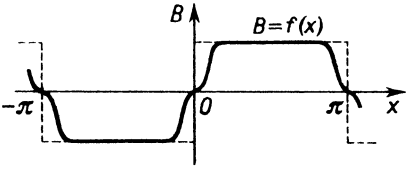
15.29. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1 & \text{dla} \quad 1<x\leqslant 3,\\ 4-x & \text{dla} \quad 3<x\leqslant 4.\end{cases}$$

15.30. Wykazać, że w przedziale $-\frac{1}{2}\pi<x<\frac{1}{2}\pi$ zachodzi równość

$$\frac{\pi x}{4}=\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\ldots$$

15.31. Prostownik lampowy jednoanodowy dostarcza prądu elektrycznego jednokierunkowego o przebiegu $i=I_m \sin x$ dla $0\leqslant x\leqslant\pi$ oraz $i=0$ dla $-\pi\leqslant x\leqslant 0$, gdzie $x=\omega t$, ω – pulsacja prądu, t – czas. Wyznaczyć amplitudy składowych harmonicznych prądu wyprostowanego.



Rys. 15.8

15.32. Wyznaczyć amplitudy składowych harmonicznych indukcji magnetycznej wirującego pola magnetycznego, jeżeli przebieg indukcji magnetycznej $B=f(x)$ w szczelinie maszyny jest jak na rysunku 15.8. Przed rozwinięciem funkcji $B=f(x)$ w szereg Fouriera rzeczywisty przebieg zmian indukcji podany na rysunku 15.8 linią ciągłą zastępujemy uproszczoną podaną linią przerywaną, wówczas $B=f(x)=-B_0$ dla $-\pi<x<0$ i $B=f(x)=B_0$ dla $0<x<\pi$.

Rozdział XVI

FUNKCJE ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

§ 16.1. POJĘCIE FUNKCJI ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

W § 4.1 tomu I podaliśmy pojęcie funkcji. Obecnie uściślimy to pojęcie (por. też I, § 1.4).

Parą uporządkowaną (a, b) nazywamy zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$, w którym jeden element a jest wyróżniony jako pierwszy; element ten nazywamy *poprzednikiem*, a pozostały element (drugi) *następnikiem pary*. Możemy to zanotować w sposób następujący:

$$(a, b)=\{\{a\}, \{a, b\}\}. \tag{16.1.1}$$

Iloczynem kartezjańskim $A\times B$ pary uporządkowanej (A, B) dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych (a, b) takich, że a należy do zbioru A oraz b należy do zbioru B. Notujemy to w sposób następujący:

$$A\times B=\{(a, b):\ a\in A\wedge b\in B\}. \tag{16.1.2}$$

Relacją R między zbiorem A i zbiorem B nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A\times B$. Zapis $(a, b)\in R$ lub aRb odczytujemy następująco: a (ze zbioru A) pozostaje w relacji R do b (ze zbioru B).

Relacją R w zbiorze A nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A\times A$, np. relacja $<$ w zbiorze liczb rzeczywistych jest to zbiór wszystkich takich par uporządkowanych liczb rzeczywistych (a, a'), że $a<a'$.

Funkcją (odwzorowaniem) F ze zbioru X w zbiór Y nazywamy każdy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X\times Y$ (czyli między X i Y) spełniający dodatkowy warunek

$$((a, b)\in F\wedge (a, b')\in F)\Rightarrow(b=b'). \tag{16.1.3}$$

Będziemy również używali następującego zapisu:

$$b=F(a), \quad \text{jeżeli} \quad (a, b)\in F, \tag{16.1.4}$$

oraz będziemy mówili w tym przypadku, że *b jest obrazem elementu a danym przez funkcję F* albo że *b jest elementem przyporządkowanym przez funkcję F elementowi a.*

Zauważmy, że z warunku (16.1.3) wynika, że obrazem $a\in X$ może być co najwyżej jeden element $b=F(a)\in Y$.

Dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, oznacza to geometrycznie, że każda prosta równoległa do osi Oy może mieć z wykresem funkcji $y=F(x)$ co najwyżej jeden punkt wspólny.

Dziedziną (*polem*) *DF funkcji F* nazywamy zbiór tych wszystkich $a \in X$, dla których istnieje para uporządkowana $(a, b) \in F$, czyli

$$DF=\{a: \bigwedge (a, b)\in F\}. \tag{16.1.5}$$

Dla funkcji rzeczywistej jednej zmiennej dziedzina funkcji jest rzutem wykresu funkcji na oś Ox.

Mówimy, że *funkcja F odwzorowuje zbiór* $A\subset X$ *w zbiór* Y, jeżeli $DF=A$ i $F\subset X\times Y$.

Obrazem $F(A_0)$ *zbioru* $A_0\subset DF$ nazywamy zbiór tych wszystkich $F(x)\in Y$, dla których $x\in A_0$, czyli

$$F(A_0)=\{F(x): x\in A_0\}. \tag{16.1.6}$$

Mówimy, że *funkcja F odwzorowuje zbiór* $A\subset X$ *na zbiór* $B\subset Y$, jeżeli $DF=A$ oraz $F(A)=B$.

Zakresem (*przeciwdziedziną*) funkcji F nazywamy zbiór

$$\{b: \bigwedge (a, b)\in F\} \tag{16.1.7}$$

czyli zbiór $F(A)$, gdzie $A=DF$.

Mówimy, że F jest *funkcją zmiennej zespolonej*, jeżeli dziedzina DF tej funkcji jest zbiorem liczb zespolonych (patrz § 16.2).

Przeciwobrazem zbioru $B\subset Y$ nazywamy zbiór tych wszystkich a należących do dziedziny funkcji F, dla których $F(a)\in B$, czyli

$$F^{-1}(B)=\{a\in DF: F(a)\in B\}. \tag{16.1.8}$$

Funkcją odwrotną F^{-1} do funkcji F ze zbioru X w zbiór Y nazywamy funkcję ze zbioru Y w zbiór X określoną w sposób następujący:

$$(b, a)\in F^{-1}\Leftrightarrow(a, b)\in F. \tag{16.1.9}$$

Na to, aby podany zbiór był funkcją, a więc spełniał warunek (16.1.3), potrzeba i wystarcza aby funkcja F była różnowartościowa (odwracalna), to znaczy aby spełniała następujący warunek:

$$((a, b)\in F\wedge (a', b)\in F)\Rightarrow(a=a'), \tag{16.1.10}$$

to znaczy, aby dla różnych poprzedników a i a' par (a, b) i (a', b') były także różne następniki b i b'.

Dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej, oznacza to geometrycznie, że każda prosta równoległa do osi Ox może mieć z wykresem funkcji $y=F(x)$ co najwyżej jeden punkt wspólny.

Zadania

16.1. Wykazać, że dla każdego zbioru $A \subset DF$ zachodzi następujące zawieranie:

$$A \subset F^{-1}(F(A)).$$

16.2. Wykazać, że dla każdego zbioru $B \subset Y$ zachodzi następujące zawieranie:

$$F(F^{-1}(B)) \subset B.$$

§ 16.2. LICZBY ZESPOLONE JAKO PARY UPORZĄDKOWANE LICZB RZECZYWISTYCH

W paragrafie tym niniejszym uściślimy pojęcie liczby zespolonej omówionej w § 8.1 tomu I. W tym celu przypomnijmy sobie najpierw pojęcie przestrzeni liniowej (por. I, § 9.7).

Przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych (zespolonych) nazywamy zbiór X, w którym określone są dwie operacje:

a) dodawanie elementów zbioru X,

b) mnożenie elementu zbioru X przez liczbę rzeczywistą (zespoloną), przy czym operacje te spełniają następujące aksjomaty:

1^0 $(a+b)+c=a+(b+c)$, czyli dodawanie jest łączne,

2^0 $a+b=b+a$, czyli dodawanie jest przemienne,

3^0 $(a+b=a+c)\Rightarrow(b=c)$, czyli zachodzi tzw. prawo redukcji,

4^0 $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$,

5^0 $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$,

6^0 $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$,

7^0 $1\cdot a=a$.

W aksjomatach 1^0 - 7^0 litery łacińskie oznaczają elementy zbioru X, a litery greckie liczby rzeczywiste (zespolone).

Jak pokazaliśmy w tomie I, w przestrzeni liniowej istnieje element zerowy oraz dla każdego elementu a istnieje element przeciwny $-a=(-1)a$ taki, że ich suma jest równa elementowi zerowemu, a także w przestrzeni liniowej jest możliwe określenie działanie odwrotnego do dodawania, które nazywamy odejmowaniem.

(16.2.1) *Iloczyn kartezjański $A\times B$ dwóch zbiorów A i B, z których każdy jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych (zespolonych), jest również przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych (zespolonych), przy działaniach określonych w sposób następujący:*

$$(a, b)+(a', b')=(a+a', b+b'). \tag{16.2.2}$$

$$\alpha(a, b)=(\alpha a, \alpha b). \tag{16.2.3}$$

Przypomnimy sobie teraz pojęcie pierścienia liniowego (por. I, § 9.7).

Pierścieniem liniowym (*algebrą liniową*) nad ciałem liczb rzeczywistych (zespolonych) nazywamy przestrzeń liniową X nad ciałem liczb rzeczywistych (zespolonych), w której określona jest dodatkowo

c) operacja mnożenia elementów zbioru X

w ten sposób, że oprócz 7 aksjomatów dotyczących przestrzeni liniowej są spełnione dodatkowo następujące aksjomaty:

8^0 $(ab)c=a(bc)$, tzn. mnożenie elementów jest łączne,

9^0 $a(b+c)=ab+ac$, tzn. mnożenie jest rozdzielne względem dodawania lewostronnie,

10^0 $(a+b)c=ac+bc$, tzn. mnożenie jest rozdzielne względem dodawania prawostronnie,

11^0 $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$.

Mnożenie elementów pierścienia liniowego na ogół nie jest przemienne.

Jednością pierścienia liniowego nazywamy taki element e, że dla dowolnego elementu a pierścienia zachodzi równość

$$ea=ae=a. \tag{16.2.3}$$

Są pierścienie liniowe z jednością i pierścienie bez jedności.

W pierścieniu liniowym z jednością możemy mówić o elementach odwrotnych. Mówimy, że element a ma element odwrotny a^{-1}, jeżeli jest spełniony warunek

$$a^{-1}a=aa^{-1}=e. \tag{16.2.4}$$

Liczbami zespolonymi nazywamy pary uporządkowane liczb rzeczywistych $a=(\alpha_1, \alpha_2)$, $b=(\beta_1, \beta_2)$, ..., przy czym działania: dodawanie liczb zespolonych, mnożenie liczby zespolonej przez liczbę rzeczywistą i mnożenie dwóch liczb zespolonych są określone w sposób następujący:

$$a+b=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2), \quad \lambda a=(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2), \quad ab=(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2, \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1). \tag{16.2.5}$$

Zbiór liczb zespolonych przy tak określonych działaniach jest pierścieniem liniowym nad ciałem liczb rzeczywistych.

W pierścieniu tym zerem jest para $\theta=(0, 0)$, mnożenie jest przemienne oraz istnieje jedność $e=(1, 0)$. Ponadto każdy element $a=(\alpha_1, \alpha_2)$ różny od zera ma element odwrotny

$$a^{-1}=\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}, -\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\right). \tag{16.2.6}$$

Z tego względu mówimy, że zbiór liczb zespolonych jest *ciałem*.

Liczby zespolone $a=(\alpha_1, \alpha_2)$ i $b=(\beta_1, \beta_2)$ uważamy za równe, jeżeli $\alpha_1=\beta_1$ oraz $\alpha_2=\beta_2$.

Pierwszy element pary stanowiącej liczbę zespoloną $a=(\alpha_1, \alpha_2)$ nazywamy jej *częścią rzeczywistą* i oznaczamy symbolem $\operatorname{Re} a$, a drugi element pary — *częścią urojoną* i oznaczamy $\operatorname{Im} a$; mamy więc

$$\operatorname{Re} a=\operatorname{Re}(\alpha_1, \alpha_2)=\alpha_1, \quad \operatorname{Im} a=\operatorname{Im}(\alpha_1, \alpha_2)=\alpha_2. \tag{16.2.7}$$

Liczbę zespoloną postaci $(\alpha_1, -\alpha_2)$ nazywamy *liczbę sprzężoną* z liczbą $a=(\alpha_1, \alpha_2)$ i oznaczamy $\bar{a}$; mamy więc:

(16.2.8) jeżeli $a=(\alpha_1, \alpha_2)$, to $\bar{a}=(\alpha_1, -\alpha_2)$.

Modułem (*bezwzględną wartością*) liczby zespolonej $a=(\alpha_1, \alpha_2)$ nazywamy liczbę rzeczywistą nieujemną określoną wzorem

$$|a|=|(\alpha_1, \alpha_2)|=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}. \tag{16.2.9}$$

Jeżeli liczby zespolone (α_1, α_2) interpretujemy jako punkty na płaszczyźnie o odpowiednich współrzędnych, to moduł liczby zespolonej równa się odległości odpowiadającego jej punktu od początku układu; z tego powodu mówimy, że moduł liczby zespolonej jest jej odległością od elementu zerowego. Ogólnie, odległość dwóch liczb zespolonych a i b określamy jako moduł ich różnicy $|a-b|$. Jest ona równa odległości na płaszczyźnie punktów odpowiadającym liczbom zespolonym a i b (por. § 16.3).

W szczególności liczby zespolone sprzężone mają równe moduły; zauważmy też, że

$$|(1, 0)|=1, \quad |(0, 1)|=1.$$

Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy jedną literą i; mamy więc

$$i=(0, 1). \tag{16.2.10}$$

Umawiamy się liczbę zespoloną postaci $(\alpha, 0)$ utożsamiać z liczbą rzeczywistą α, tzn.

$$(\alpha, 0)=\alpha; \tag{16.2.11}$$

wówczas w szczególności otrzymujemy

$$i^2=(0, 1)\cdot(0, 1)=(-1, 0)=-1,$$

$$\alpha(\beta_1, \beta_2)=(\alpha, 0)\cdot(\beta_1, \beta_2)=(\alpha\beta_1, \alpha\beta_2).$$

Widzimy więc, że zbiór liczb zespolonych jest iloczynem kartezjańskim zbioru R liczb rzeczywistych przez siebie, przy czym przy działaniach zachowane są wzory (16.2.2) i (16.2.3).

Dla dowolnej liczby $a=(\alpha_1, \alpha_2)$ i sprzężonej do niej $\bar{a}=(\alpha_1, -\alpha_2)$ mamy następujący wzór:

$$a\cdot\bar{a}=|a|^2. \tag{16.2.12}$$

Zauważmy na koniec, że biorąc pod uwagę wprowadzone oznaczenia oraz działania (16.2.5) dla dowolnej liczby zespolonej $a=(\alpha_1, \alpha_2)$ mamy następującą równość (por. I, § 8.1):

$$(\alpha_1, \alpha_2)=(\alpha_1, 0)+(0, \alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2(0, 1)=\alpha_1+\alpha_2 i; \tag{16.2.13}$$

w dalszym ciągu będziemy przede wszystkim korzystali z tej postaci zapisu liczby zespolonej.

Moduł liczby zespolonej, określony wzorem (16.2.9), jest *subaddytywny* i *multyplikatywny*, to znaczy dla każdych dwóch liczb zespolonych $a=(\alpha_1, \alpha_2)$ i $b=(\beta_1, \beta_2)$ mamy następujące związki:

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|, \tag{16.2.14}$$

$$|ab| = |a| \cdot |b| \tag{16.2.15}$$

oraz moduł liczby zespolonej a jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest równa zeru, tzn.

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = (0, 0). \tag{16.2.16}$$

Z (16.2.14) wynika, że

$$||a|-|b|| \leqslant |a-b|, \tag{16.2.17}$$

a z (16.2.15) wynika, że

$$|a^n| = |a|^n. \tag{16.2.18}$$

Zadania

16.3. Pokazać, że zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych $a=a(t)$, $b=b(t)$, ... określonych w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych (czyli na całej prostej $(-\infty, +\infty)$) jest pierścieniem liniowym z jednością przy następujących działaniach:

$$(a+b)(t)=a(t)+b(t), \quad (\lambda a)(t)=\lambda a(t), \quad (ab)(t)=a(t)\,b(t).$$

Zbiór ten jednak nie jest ciałem, ponieważ nie każdy element tego zbioru różny od zera ma element odwrotny; podać odpowiedni przykład.

16.4. Pokazać, że zbiór wszystkich funkcji rzeczywistych i ciągłych na półprostej $(0, +\infty)$ (to znaczy określonych dla liczb rzeczywistych nieujemnych) jest pierścieniem liniowym przy działaniach: dodawaniu i mnożeniu przez liczbę określonych jak w zadaniu poprzednim oraz tak zwanym mnożeniu splotowym elementów a i b tego zbioru określonym wzorem

$$(ab)(t) = \int_0^t a(t-u)\,b(u)\,du.$$

Pokazać, że tak określone mnożenie jest przemienne oraz że w tak określonym pierścieniu nie ma jedności. (Czytelnik zwróci uwagę na dowód łączności tak określonego mnożenia).

§ 16.3. ZBIÓR LICZB ZESPOLONYCH JAKO PRZESTRZEŃ METRYCZNA

Przestrzenią metryczną nazywamy taki zbiór X, w którym każdej parze uporządkowanej (x_1, x_2) jego elementów x_1 i x_2 przyporządkowana jest liczba nieujemna oznaczana symbolem $d(x_1, x_2)$ i zwana *odległością elementu* x_1 *od elementu* x_2 w ten sposób, że są spełnione następujące warunki:

(16.3.1) $d(x_2, x_1)=d(x_1, x_2)$, tzn. odległość jest operacją symetryczną,

(16.3.2) $d(x_1, x_3)\leqslant d(x_1, x_2)+d(x_2, x_3)$, czyli jest spełnione tzw. *prawo trójkąta* (które mówi, że w trójkącie długość jednego boku jest mniejsza albo równa sumie długości boków pozostałych),

(16.3.3) $d(x_1, x_2)=0 \Leftrightarrow x_1=x_2$, to znaczy odległość dwóch elementów zbioru X jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy elementy te są równe.

Dla liczb zespolonych odległość określamy, jak to już zaznaczyliśmy w § 16.2, w sposób następujący:

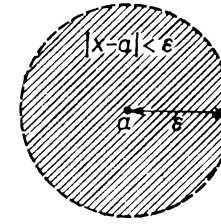
$$d(a, b)\overset{\mathrm{df}}{=}|a-b|. \tag{16.3.4}$$

Warunek (16.3.1) jest spełniony, ponieważ jak widać wprost z definicji (16.2.9) jest $|a-b|=|b-a|$. Warunek (16.3.2) wynika z warunku (16.2.14), a warunek (16.3.3) z warunku (16.2.16).

Liczbę zespoloną $a=(\alpha_1, \alpha_2)$ będziemy stale interpretowali geometrycznie jako punkt na płaszczyźnie o współrzędnych (α_1, α_2).

Otoczeniem ε-nowym liczby zespolonej (punktu) a (patrz rys. 16.1) nazywamy zbiór tych wszystkich liczb zespolonych x, dla których jest spełniona nierówność

$$|x-a|<\varepsilon. \tag{16.3.5}$$



Rys. 16.1

W interpretacji geometrycznej jest więc to koło otwarte (bez brzegu) o środku w punkcie a i promieniu ε.

Sąsiedztwem (otoczeniem pierścieniowym) ε-nowym liczby zespolonej a nazywamy zbiór tych wszystkich liczb zespolonych x, dla których jest spełniona nierówność

$$0<|x-a|<\varepsilon, \tag{16.3.6}$$

to znaczy jest to otoczenie ε-nowe punktu a, z którego usuwa się sam punkt a.

Zadania

Podać interpretację geometryczną następujących zbiorów liczb zespolonych z:

16.5. $\{z\colon |z-a|=|z-b|,\ a\neq b\}$.

16.6. $\{z\colon \operatorname{Re} z\geqslant\alpha\}$.

16.7. $\{z\colon \operatorname{Re} z^2>\alpha>0\}$.

16.8. $\{z\colon |z|\leqslant\operatorname{Re} z\}$.

§ 16.4. CIĄGI I SZEREGI LICZB ZESPOLONYCH

Będziemy mówili, że ciąg $\{a_n\}$ liczb zespolonych a_n dąży do liczby zespolonej a, co zapisujemy w formie $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N, że dla każdego $n \geqslant N$ jest spełniona nierówność:

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{16.4.1}$$

Widzimy więc, że formalnie biorąc definicja zbieżności ciągu liczb zespolonych jest dokładnie taka sama jak ciągu liczb rzeczywistych. Udowadnia się, że zachodzą też analogiczne twierdzenia o działaniach na granicach dla ciągów liczb zespolonych, co dla ciągów liczb rzeczywistych, por. I, § 2.1.

Podobnie się ma rzecz z szeregami liczb zespolonych. Tutaj podstawowe znaczenie ma twierdzenie następujące:

(16.4.2) *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny, jeżeli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *jest zbieżny.*

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym.*

Twierdzenie (16.4.2) sprowadza badanie zbieżności szeregów o wyrazach zespolonych do badania zbieżności szeregów o wyrazach rzeczywistych.

Zachodzi również następujące twierdzenie dotyczące zbieżności ciągów o wyrazach zespolonych:

(16.4.3) *Ciąg* $\{a_n\}$ *liczb zespolonych* $a_n = (b_n, c_n)$ *jest zbieżny do liczby zespolonej* $a_0 = (b_0, c_0)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczb rzeczywistych* $b_n = \operatorname{Re} a_n$ *jest zbieżny do* $b_0 = \operatorname{Re} a_0$ *oraz ciąg liczb rzeczywistych* $c_n = \operatorname{Im} a_n$ *jest zbieżny do* $c_0 = \operatorname{Im} a_0$.

Twierdzenie (16.4.3) sprowadza badanie zbieżności ciągów liczb zespolonych do badania zbieżności ciągów liczb rzeczywistych.

Często będziemy wykorzystywać następującą własność, wynikającą wprost z definicji zbieżności ciągu liczb (zarówno zespolonych jak i rzeczywistych):

(16.4.4) *Ciąg liczb zespolonych* $\{a_n\}$ *dąży do liczby* a *wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczb rzeczywistych* $|a_n - a|$ *dąży do zera.*

(16.4.5) *Jeżeli ciąg liczb zespolonych* $\{a_n\}$ *dąży do* a, *to ciąg liczb rzeczywistych* $\{|a_n|\}$ *dąży do liczby* $|a|$.

Jak wynika ze wzoru (16.2.9), moduł jest funkcją rzeczywistą (to znaczy przyjmującą wartości rzeczywiste) zmiennej zespolonej. Twierdzenie (16.4.5) mówi nam, że funkcja ta jest ciągła (w sensie Heinego) (por. I, § 5.1 i 5.4, str. 75 i 77).

Przy badaniu zbieżności szeregów często stosujemy twierdzenie następujące:

(16.4.6) *Jeżeli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, *a więc jeżeli ciąg* $\{u_n\}$ *nie dąży do zera, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *jest rozbieżny.*

Zadania

Znaleźć granicę następujących ciągów (zad. 16.9 - 16.12):

16.9. $a_n=\dfrac{2n+1}{n-1}+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})i$.

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie (16.4.3).

16.10. $b_n=z^n$, gdzie $z=x+yi$.

Wskazówka. Wykorzystać wzór (16.2.18) oraz twierdzenie (16.4.4).

16.11. $c_n=\sqrt[n]{2^n+4^n}+\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)i$.

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie (16.4.3) oraz zadanie 2.8. z tomu I.

16.12. $d_n=\sin n+\dfrac{1}{n}i$.

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie (16.4.3).

Zbadać zbieżność następujących szeregów (zad. 16.13 - 16.16):

16.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}i\right)$.

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie (16.4.3) oraz twierdzenie (3.1.4) z tomu I.

16.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{2^n}i\right)$.

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie (16.4.3) oraz zadanie 3.21 z tomu I.

16.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(1+i)^n}{n!}\right)$.

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie (16.4.2) oraz wzór (16.2.7), a następnie zastosować kryterium d'Alemberta (patrz I, wzór (3.2.3)).

16.16. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, gdzie $z=x+yi$.

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie (16.4.2) oraz (16.4.6).

16.17. Wykazać, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ też jest bezwzględnie zbieżny.

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie (16.4.6) oraz kryterium porównawcze zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych (patrz cz. I, (3.2.1)).

16.18. Wykazać, że tzw. szereg Lamberta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}, \quad \text{gdzie} \quad z=x+yi$$

jest zbieżny dla $|z|<1$, a rozbieżny dla $|z|>1$.

Wskazówka. Przy $|z|<1$ wykorzystać nierówność

$$\left|\frac{z^n}{1-z^n}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{1-|z|},$$

a dla $|z|>1$ twierdzenie (16.4.6).

§ 16.5. GRANICA FUNKCJI ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

Niech Z oznacza zbiór wszystkich liczb zespolonych. Obrazem tego zbioru jest płaszczyzna (z określonym układem prostokątnym osi) przy czym liczbie zespolonej $a=(\alpha_1, \alpha_2)$ jest przyporządkowany w sposób wzajemnie jednoznaczny na płaszczyźnie punkt (α_1, α_2), który będziemy oznaczali tą samą literą a, co odpowiadającą mu liczbę zespoloną. Ze względu na to właśnie odwzorowanie używamy czasem zwrotu: „punkt a należy do zbioru A" mając na myśli „liczba zespolona a należy do zbioru liczb zespolonych A".

Punkt (liczbę zespoloną) b nazywamy *punktem skupienia zbioru* A, jeżeli w każdym sąsiedztwie punktu b znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru A (czyli jeżeli w każdym otoczeniu punktu b znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru A różny od punktu b).

Niech F będzie funkcją odwzorowującą zbiór $A \subset Z$ w zbiór Z oraz niech b będzie punktem skupienia zbioru A.

Mówimy, że *funkcja F ma w punkcie b granicę względem zbioru A równą g*, jeżeli dla każdego (choćby dowolnie małego) dodatniego ε da się wyznaczyć takie (odpowiednio małe) dodatnie δ, że dla każdego $z \in A$ ma miejsce implikacja:

$$\text{jeżeli } 0<|z-b|<\delta, \text{ to } |F(z)-g|<\varepsilon,$$

czyli wartości funkcji F różnią się od g dowolnie mało (mniej niż z góry dane ε) dla wszystkich liczb z będących elementami zbioru A i należących do odpowiednio dobranego sąsiedztwa punktu b.

Jeżeli warunek ten jest spełniony, to piszemy

$$\lim_{\substack{z \to b \\ z \in A}} F(z)=g.$$

Jeżeli zbiór A zawiera pewne otoczenie punktu b, to piszemy $\lim_{z \to b} F(z)=g$ i mówimy o *granicy g funkcji F w punkcie b*; wówczas granica g nie zależy od zbioru A.

Przy interpretacji geometrycznej funkcji zespolonej $w=F(z)$ zmiennej zespolonej z dziedzinę funkcji A zaznaczamy na jednej płaszczyźnie zespolonej, a zakres funkcji na drugiej płaszczyźnie zespolonej (patrz rys. 16.2).

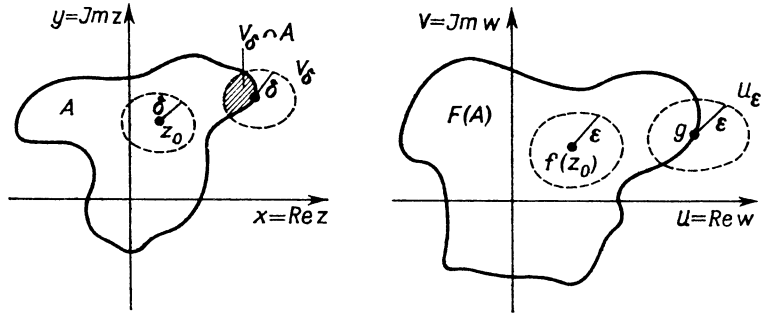
Widzimy więc, że $\lim\limits_{\substack{z\to b\\ z\in A}} F(z)=g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego dowolnie małego ε-otoczenia U_ε punktu $g\in\bar{A}$, istnieje takie odpowiednio małe δ-sąsiedztwo V_δ punktu b, że

$$F(V_\delta\cap A)\subset U_\varepsilon. \tag{16.5.1}$$

Ponieważ $z=(x,y)$, gdzie x i y są liczbami rzeczywistymi, możemy $\operatorname{Re}F(z)$ traktować jako funkcję rzeczywistą $F_1(x,y)$ dwóch zmiennych rzeczywistych x i y oraz podobnie $\operatorname{Im}F(z)$ jako funkcję $F_2(x,y)$. Zamiast więc pisać $w=F(z)$, gdzie $z=(x,y)$, $w=(u,v)$, piszemy często

$$w=F_1(x,y)+F_2(x,y)\,i. \tag{16.5.2}$$

W ten sposób badanie funkcji zespolonej $F(z)$ zmiennej zespolonej z sprowadza się do badania dwóch funkcji rzeczywistych $F_1(x,y)$ i $F_2(x,y)$ zmiennych rzeczywistych x i y.



Rys. 16.2

Jeżeli $g=g_1+g_2i$ oraz $b=b_1+b_2i$, to

$$\Big(\lim_{z\to b}F(z)=g\Big)\Leftrightarrow\Big(\lim_{\substack{x\to b_1\\ y\to b_2}}F_1(x,y)=g_1 \text{ oraz } \lim_{\substack{x\to b_1\\ y\to b_2}}F_2(x,y)=g_2\Big). \tag{16.5.3}$$

Może się zdarzyć, że zbiór A jest zbiorem liczb rzeczywistych, czyli leży na osi $X=\operatorname{Re}z$. W tym przypadku dla $z\in A$ mamy $z=\operatorname{Re}z=x$ i równanie (16.5.2) przybiera postać

$$w=F_1(x)+F_2(x)\,i. \tag{16.5.4}$$

Wówczas zamiast (16.5.3) mamy relację:

$$\Big(\lim_{x\to b}F(x)=g_1+g_2\,i\Big)\Leftrightarrow\Big(\lim_{x\to b}F_1(x)=g_1 \text{ oraz } \lim_{x\to b}F_2(x)=g_2\Big), \tag{16.5.5}$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, $F_1(x)=\operatorname{Re}F(x)$, $F_2(x)=\operatorname{Im}F(x)$.

Mówimy, że *funkcja F jest ciągła w punkcie* z_0 należącym do DF i będącym punktem skupienia DF, jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in DF}}F(z)$ oraz równa się $F(z_0)$.

Podamy teraz dwa warunki, z których każdy jest dostateczny i konieczny na to, aby funkcja zespolona $F(z)$ zmiennej zespolonej z była ciągła w punkcie $z=z_0\in DF$.

(16.5.6) Dla każdego dowolnie małego ε-otoczenia U_ε punktu $F(z_0)$ istnieje takie odpowiednie małe δ-otoczenie V_δ punktu z_0, że (patrz rys. 16.2):

$$F(V_\delta \cap A) \subset U_\varepsilon, \quad \text{gdzie} \quad A = DF.$$

(16.5.7) Dla każdego ciągu $\{z_n\}$ takiego, że $z_n \in DF$ oraz $z_n \to z_0$ zachodzi $F(z_n) \to F(z_0)$. Jest to tzw. *warunek ciągłości Heinego.*

Funkcja zespolona $F(x) = F_1(x) + F_2(x)i$ zmiennej rzeczywistej x jest ciągła w punkcie $x = x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \to x_0} F_1(x) = F_1(x_0)$ oraz $\lim_{x \to x_0} F_2(x) = F_2(x_0)$. W szczególnym przypadku mogą również występować funkcje rzeczywiste zmiennej zespolonej jak np. $|z|$ lub $|f(z)|$, gdzie $f(z)$ jest funkcją zespoloną zmiennej zespolonej.

Funkcję zespoloną $f(z)$ zmiennej zespolonej z nazywamy *ograniczoną w zbiorze* A, jeżeli istnieje taka liczba dodatnia M, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $|f(a)| \leqslant M$.

Zadania

16.19. Wykazać, że funkcja z^5 jest ciągła w każdym punkcie $z = z_0$ płaszczyzny zespolonej.

16.20. Wykazać, że jeżeli funkcja zespolona $f(z)$ zmiennej zespolonej z jest ciągła w punkcie $z = z_0$, to funkcja rzeczywista $|f(z)|$ jest również ciągła w punkcie $z = z_0$.

16.21. Wykazać, że jeżeli z_0 jest punktem wewnętrznym $Df \cap Dg$ oraz funkcje $f(z)$ i $g(z)$ są ciągłe w punkcie $z = z_0$, to funkcja $f(z) + g(z)$ jest również ciągła w punkcie $z = z_0$.

16.22. Wykazać, że jeżeli z_0 jest punktem wewnętrznym Df oraz funkcja $f(z)$ jest ciągła w punkcie $z = z_0$, to istnieje takie otoczenie punktu $z = z_0$, w którym funkcja $f(z)$ jest ograniczona.

16.6. POCHODNA FUNKCJI ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

Niech z_0 będzie punktem wewnętrznym dziedziny funkcji F, to znaczy niech istnieje pewne otoczenie punktu z_0 zawarte w dziedzinie funkcji F. Mówimy, że *funkcja F jest różniczkowalna* w punkcie z_0 (ma pochodną w punkcie z_0), jeżeli istnieje granica

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h}. \tag{16.6.1}$$

Wartość tej granicy nazywamy *pochodną funkcji F w punkcie* z_0 i oznaczamy symbolem $F'(z_0)$.

Dla funkcji zmiennych zespolonych są prawdziwe twierdzenia o różniczkowaniu sumy, iloczynu, ilorazu, funkcji złożonej i funkcji odwrotnej analogiczne jak dla funkcji zmiennych rzeczywistych.

Mówimy, że *funkcja F jest różniczkowalna w pewnym zbiorze otwartym B* (patrz str. 9) zawartym w jej dziedzinie DF, jeżeli jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru B.

Mamy następujące twierdzenie podające warunek konieczny (ale nie dostateczny) różniczkowalności funkcji F w punkcie z_0:

(16.6.2) *Jeżeli funkcja $F(z)=F_1(x,y)+F_2(x,y)i$ jest różniczkowalna w punkcie $z_0=x_0+y_0i$, to funkcje F_1 i F_2 mają pierwsze pochodne w punkcie (x_0,y_0) i pochodne te spełniają tzw. równania Cauchy-Riemanna*:

$$(16.6.3)\qquad \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right)_0 \quad \textit{oraz} \quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_0=-\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_0.$$

Często używamy innych oznaczeń literowych, mianowicie $F(z)=u(x,y)+v(x,y)i$; wtedy równania Cauchy-Riemanna zapisywane są w postaci

$$(16.6.4)\qquad u_x=v_y \quad \text{oraz} \quad u_y=-v_x.$$

Określimy pochodne wyższych rzędów. Przez *pochodną rzędu pierwszego* rozumiemy granicę (16.6.1), czyli *pochodną*. Przez *pochodną rzędu drugiego* rozumiemy pochodną pochodnej rzędu pierwszego, a przez *pochodną rzędu n* rozumiemy pochodną pochodnej rzędu $(n-1)$.

Niech zbiór D będzie obszarem (patrz § 1.2) zawartym w dziedzinie (patrz § 16.1) funkcji F. Mamy wówczas następujące twierdzenia:

(16.6.5) *Jeżeli dla funkcji $F_1(x,y)$ i $F_2(x,y)$ istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego ciągłe w obszarze D, które w każdym punkcie obszaru D spełniają równania Cauchy-Riemanna* (16.6.3), *to funkcja $F(z)=F_1(x,y)+iF_2(x,y)$ jest różniczkowalna w obszarze D.*

(16.6.6) *Jeżeli funkcja $F(z)=F_1(x,y)+iF_2(x,y)$ jest różniczkowalna w obszarze D, to w każdym punkcie tego obszaru ma pochodną ciągłą dowolnie wysokiego rzędu.*

Twierdzenie (16.6.6) nie jest prawdziwe dla funkcji zmiennej rzeczywistej.

PRZYKŁAD. Weźmy pod uwagę funkcję

$$(1)\qquad G(z)=\sqrt{|xy|}\,i.$$

Dla funkcji tej

$$(2)\qquad G_1(x,y)=\operatorname{Re}G(z)=0, \qquad G_2(x,y)=\operatorname{Im}G(z)=\sqrt{|xy|}.$$

Funkcja (1) na obu osiach $\operatorname{Re}z$ i $\operatorname{Im}z$ przyjmuje stale wartość 0, z czego wynika, że w punkcie (0, 0) pochodne cząstkowe istnieją i są równe:

$$(3)\qquad \left(\frac{\partial G_1}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial G_1}{\partial y}\right)_0=\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial G_2}{\partial y}\right)_0=0,$$

zatem funkcja (1) w punkcie (0, 0) spełnia równania Cauchy-Riemanna, a mimo to nie ma w punkcie (0, 0) pochodnej, ponieważ granica

$$\lim_{h\to 0}\frac{G(h)-G(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{G(h)}{h} \tag{4}$$

nie istnieje. Położmy bowiem $h=h_1+ih_2$; wówczas

$$\frac{G(h)}{h}=\frac{\sqrt{|h_1h_2|}\,i}{h_1+ih_2}. \tag{5}$$

Przyjmijmy teraz $h_1=mh_2$. Wówczas mamy

$$\frac{G(h)}{h}=\frac{|h_2|\sqrt{|m|}\,i}{h_2(m+i)}. \tag{6}$$

Wyrażenie (6) ma tylko granice jednostronne przy $h_2\to 0$ i to zależne od m, a więc wyrażenie (5) nie ma granicy przy $h\to 0$.

Pokazaliśmy więc, że dla funkcji (1) są spełnione równania Cauchy-Riemanna w punkcie $z=(0, 0)$, a pomimo to funkcja ta w punkcie tym nie jest różniczkowalna. Warunek (16.6.3) jest więc warunkiem koniecznym, ale nie jest warunkiem dostatecznym różniczkowalności funkcji zmiennej zespolonej.

Zauważmy dalej, że funkcja (1) w innych punktach $z\neq(0, 0)$ nie spełnia warunku (16.6.3), czyli funkcja ta w żadnym punkcie płaszczyzny zespolonej nie jest różniczkowalna.

Rozważmy teraz funkcję (1) jako funkcję zmiennej rzeczywistej, czyli w punktach z postaci $z=(x, 0)$. Funkcja ta jest stale równa zeru, a więc funkcja (1) rozpatrywana jako funkcja zmiennej rzeczywistej jest dowolną ilość razy różniczkowalna, pomimo tego, że ta sama funkcja jako funkcja zmiennej zespolonej w żadnym punkcie, a więc również w punktach postaci $z=(x, 0)$, pochodnej nie ma.

Sytuacja taka jest możliwa na skutek definicji granicy funkcji zmiennej zespolonej.

Funkcję F zmiennej zespolonej z nazywamy *holomorficzną* (*analityczną*) *w obszarze* $D\subset DF$, jeżeli jest różniczkowalną w D.

Funkcję F nazywamy *holomorficzną* (*analityczną*) *w punkcie* z_0, jeżeli istnieje takie otoczenie punktu z_0, w którym funkcja F jest holomorficzna.

Zadania

16.23. Wykazać, że funkcja z^n w dowolnym punkcie z_0 ma pochodną równą nz_0^{n-1}.

16.24. Wykazać, że funkcja $|z|$ w żadnym punkcie z_0 nie jest różniczkowalna (choci w każdym punkcie jest ciągła).

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie (16.6.2).

§ 16.7. CIĄGI I SZEREGI FUNKCYJNE

Niech funkcje f_n $(n=1, 2, \ldots)$ będą określone w zbiorze A.

Mówimy, że *ciąg* $\{f_n\}$ *jest zbieżny w punkcie* $z_0 \in A$ *do liczby* b_0, jeżeli ciąg liczbowy $\{f_n(z_0)\}$ jest zbieżny do b_0, to znaczy jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n\geqslant N} |f_n(z_0)-b_0|<\varepsilon. \tag{16.7.1}$$

Mówimy, że *ciąg* $\{f_n\}$ *jest zbieżny w zbiorze* A *do funkcji* g, jeżeli

$$\bigwedge_{z\in A} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n\geqslant N} |f_n(z)-g(z)|<\varepsilon, \tag{16.7.2}$$

to znaczy jeżeli ciąg $\{f_n\}$ jest zbieżny w każdym punkcie $z \in A$.

Mówimy, że *ciąg* $\{f_n\}$ *jest jednostajnie zbieżny w zbiorze* A *do funkcji* g, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n\geqslant N} \bigwedge_{z\in A} |f_n(z)-g(z)|<\varepsilon. \tag{16.7.3}$$

Warunek (16.7.2) odczytujemy także w ten sposób, że funkcja g daje się z dowolną dokładnością aproksymować (przybliżać) punktowo w zbiorze A przez funkcje f_n, a warunek (16.7.3) odczytujemy analogicznie z tym, że termin „punktowo" zastępujemy terminem „jednostajnie".

Uwaga. Formalna różnica między zwykłą a jednostajną zbieżnością ciągu $\{f_n\}$ w zbiorze A polega na tym, że kwantyfikator $\bigwedge_{z\in A}$, który przy zwykłej zbieżności stał na pierwszym miejscu został przesunięty w ten sposób, że występuje po kwantyfikatorze $\bigvee_{N}$. Logiczną konsekwencją tej zmiany jest to, że przy zwykłej zbieżności dobrane N zależy zarówno od punktu $z \in A$ jak i od ε (czyli od dokładności przybliżenia $g(z)$ przez $f_n(z)$), podczas gdy przy jednostajnej zbieżności N zależy jedynie od ε. Oczywiście warunek, przy którym N zależy tylko od ε, jest mocniejszy od warunku, przy którym N może być różnie dobierane w zależności nie tylko od ε, ale także od doboru punktu $z \in A$. Wobec tego warunek określający jednostajną zbieżność ciągu funkcyjnego w pewnym zbiorze jest mocniejszy od warunku określającego zwykłą zbieżność ciągu funkcyjnego, czyli krótko: z jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego w zbiorze A wynika zwykła zbieżność (ale nie na odwrót).

Zauważmy jeszcze, że jeżeli w zdaniu postaci (16.7.2) czy (16.7.3) przestawimy dwa występujące obok siebie fragmenty z takim samym kwantyfikatorem, to treść logiczna tego zdania się nie zmieni, na przykład w warunku (16.7.3) możemy przestawić fragmenty $\bigwedge_{n\geqslant N}$ i $\bigwedge_{z\in A}$, a w warunku (16.7.2) przestawić fragmenty, $\bigwedge_{z\in A}$ i $\bigwedge_{\varepsilon>0}$. Natomiast jeżeli v zdaniu przestawiamy fragmenty, w których występują różne kwantyfikatory, to treść dania zmienia się.

Mówimy, że *ciąg* $\{f_n\}$ *jest ograniczony w zbiorze* A, jeżeli

$$\bigwedge_{z\in A} \bigvee_{0<\gamma<\infty} \bigwedge_{n} |f_n(z)|\leqslant\gamma. \tag{16.7.4}$$

Mówimy, że *ciąg* $\{f_n\}$ *jest jednostajnie ograniczony* (lub że *funkcje* f_n *są wspólnie ograniczone*) *w zbiorze* A, jeżeli

$$\bigvee_{\gamma>0} \bigwedge_{z\in A} \bigwedge_{n} |f_n(z)| \leqslant \gamma. \tag{16.7.5}$$

Każdy ciąg $\{f_n\}$ jednostajnie zbieżny w zbiorze A jest w tym zbiorze jednostajnie ograniczony (ale nie na odwrót).

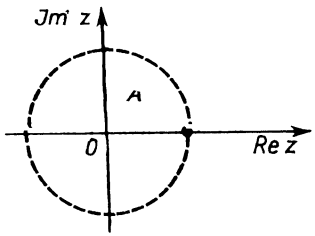
Niech teraz zbiór A ma tę własność, że każdy jego punkt jest jego punktem skupienia, np. A może być zbiorem otwartym. Wówczas mamy następujące twierdzenie:

(16.7.6) *Jeżeli funkcje* f_n $(n=1, 2, \ldots)$ *są określone i ciągłe w zbiorze* A *oraz ciąg* $\{f_n\}$ *jest jednostajnie zbieżny w zbiorze* A *do funkcji* g, *to funkcja* g *jest również ciągła w zbiorze* A.

Twierdzenie to jest fałszywe przy założeniu zwykłej (punktowej) zbieżności ciągu $\{f_n\}$. Widać to z następującego przykładu.

Niech (rys. 16.3):

(1) $A=\{z: |z|<1 \text{ lub } z=1\}$ oraz $f_n(z)=z^n$.



Rys. 16.3

Wówczas, jak łatwo zauważyć, funkcja graniczna

$$g(z)=\begin{cases}0 & \text{dla } |z|<1,\\ 1 & \text{dla } z=1,\end{cases}$$

nie jest ciągła w zbiorze A (mianowicie nie jest ciągła w punkcie $z=1$), pomimo tego, że funkcje f_n są ciągłe w zbiorze A.

Zauważmy, że każdy punkt zbioru (1) jest jego punktem skupienia (chociaż zbiór ten nie jest zbiorem otwartym, ponieważ punkt $z=1$ nie jest jego punktem wewnętrznym; wszystkie inne punkty tego zbioru są jego punktami wewnętrznymi).

Niech funkcje u_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ będą określone w zbiorze A.

Mówimy, że *szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *jest zbieżny w punkcie* $z_0\in A$, jeżeli szereg liczbowy $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z_0)$ jest zbieżny.

Mówimy, że *szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *jest zbieżny* (*jednostajnie zbieżny*) *w zbiorze* A, jeżeli ciąg sum cząstkowych tego szeregu

$$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} u_k(z) \tag{16.7.7}$$

jest zbieżny (jednostajnie zbieżny) w zbiorze A.

Granicę ciągu (16.7.7) nazywamy *sumą* szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$, a funkcje $u_k(z)$ *wyrazami* tego szeregu.

Podamy teraz dwa kryteria jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego.

(16.7.8) KRYTERIUM WEIERSTRASSA. *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *jest jednostajnie zbieżny w zbiorze* A,

jeżeli każda z funkcji $u_k(z)$ *jest ograniczona w zbiorze A taką liczbą nieujemną* a_k, *że szereg liczbowy* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny.*

(16.7.9) KRYTERIUM DIRICHLETA. *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k(z)$ *jest zbieżny (jednostajnie zbieżny) w zbiorze A, jeżeli są spełnione dwa warunki:*

1° *ciąg* $\{b_k\}$ *liczb nieujemnych* b_k *dąży monotonicznie do zera,*

2° *ciąg funkcyjny* $S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} u_k(z)$ *jest ograniczony (jednostajnie ograniczony) w zbiorze A.*

Zadania

16.25. Wykazać, że ciąg $\{ze^{-nz^2}\}$

a) na całej osi rzeczywistej Re z dąży jednostajnie do zera,

b) w pewnych punktach każdego koła $|z|<r$ $(r>0)$ jest rozbieżny.

Wskazówka. a) Znaleźć maksimum funkcji zmiennej rzeczywistej xe^{-nx^2}; b) wziąć pod uwagę punkty leżące na osi Im z.

16.26. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ jest jednostajnie zbieżny w domkniętym kole $|z|\leqslant 1$.

Wskazówka. Zastosować kryterium Weierstrassa.

16.27. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ jest zbieżny w kole domkniętym $|z|\leqslant 1$, z którego usunięto jeden punkt $z=1$.

Wskazówka. Zastosować kryterium Dirichleta.

16.28. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ jest jednostajnie zbieżny w półkolu domkniętym $|z|\leqslant 1$, Re $z\leqslant 0$.

Wskazówka. Wykorzystać kryterium Dirichleta.

16.29. Wykazać, że szereg Lamberta (por. zad. 16.18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}$ jest jednostajnie zbieżny w kole domkniętym $|z|\leqslant r<1$.

§ 16.8. SZEREGI POTĘGOWE

Szeregiem potęgowym (por. I, § 11.1) nazywamy szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{16.8.1}$$

Dla każdego szeregu (16.8.1) istnieje taka liczba nieujemna R (skończona lub nieskończona), że dla $|z|<R$ szereg (16.8.1) jest bezwzględnie zbieżny, a dla $|z|>R$ szereg jest

rozbieżny. Na okręgu $|z|=R$ może być w przypadku każdego szeregu potęgowego różnie: w pewnych punktach szereg ten może być zbieżny a w innych rozbieżny. Liczbę R nazywamy *promieniem zbieżności*, a koło $|z|<R$ *kołem zbieżności* szeregu potęgowego (16.8.1). W przypadkach szczególnych, gdy $R=0$, szereg (16.8.1) jest zbieżny tylko dla $z=0$, gdy zaś $R=\infty$, szereg potęgowy jest zbieżny dla każdego z.

Granicę górną $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ ciągu liczb rzeczywistych $\{b_n\}$ określamy jako

a) równą $+\infty$, gdy ciąg $\{b_n\}$ jest nieograniczony z góry,

b) równą $\lim\limits_{m\to\infty} d_m$, gdzie $d_m=\sup(b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots)$ w przypadku, gdy ciąg $\{b_n\}$ jest ograniczony z góry; zauważmy, że granica $\lim d_m$ zawsze istnieje, ponieważ ciąg $\{d_m\}$ jest monotoniczny (nierosnący).

Gdy ciąg $\{b_n\}$ jest zbieżny, granica górna równa się zwykłej granicy.

TWIERDZENIE CAUCHY-HADAMARDA. *Promień zbieżności szeregu potęgowego* (16.8.1) *wyraża się wzorem*

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{16.8.2}$$

Na podstawie kryterium d'Alemberta mamy też następujący inny wzór na promień zbieżności szeregu potęgowego (16.8.1):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{16.8.3}$$

o ile granica po prawej stronie wzoru (16.8.3) istnieje.

Wzór (16.8.3) jest prostszy od wzoru (16.8.2), ale w tym ostatnim wzorze granica występująca po prawej stronie wzoru zawsze istnieje, podczas gdy granica występująca po prawej stronie wzoru (16.8.3) może nie istnieć.

Jeżeli R jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego (16.8.1), a θ liczbą spełniającą nierówność $0<\theta<1$, to szereg potęgowy (16.8.1) jest jednostajnie zbieżny w kole domkniętym $|z|\leqslant\theta R$.

Suma szeregu potęgowego (16.8.1)

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{16.8.4}$$

jest wewnątrz koła zbieżności funkcją ciągłą i dowolną ilość razy różniczkowalną, przy czym jej pochodna

$$F'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \tag{16.8.5}$$

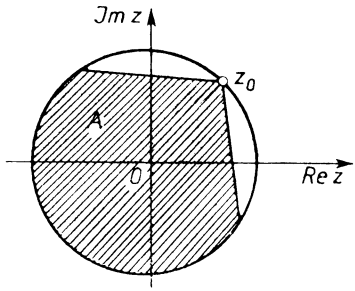
czyli pochodna sumy szeregu (16.8.1), jest sumą szeregu (16.8.5), który otrzymujemy z szeregu (16.8.1) różniczkując go wyraz po wyrazie. Promień zbieżności szeregu (16.8.5) jest równy promieniowi zbieżności szeregu (16.8.1), a jedyne różnice dotyczące zbieżności szeregów (16.8.1) i (16.8.5) mogą występować na okręgu będącym brzegiem koła zbieżności. Wewnątrz tego koła oba szeregi są bezwzględnie zbieżne, na zewnątrz oba rozbieżne.

Szereg potęgowy może występować również w postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(u-u_0)^n, \tag{16.8.6}$$

którą przez podstawienie $z=u-u_0$ możemy sprowadzić do postaci (16.8.1). Kołem zbieżności szeregu (16.8.6) jest koło $|u-u_0|<R$, gdzie R można wyznaczyć na podstawie wzoru (16.8.2) lub (16.8.3).

Niech R oznacza dalej promień zbieżności szeregu potęgowego (16.8.1). Jeżeli szereg ten jest zbieżny w punkcie z_0 leżącym na brzegu koła zbieżności (tzn. takim, że $|z_0|=R$)) i utworzymy z otwartego koła zbieżności zbiór A w ten sposób, że do tego koła dołączymy punkt z_0, a wyrzucimy z niego dwa odcinki koła, które otrzymamy tnąc wzdłuż dwóch dowolnych cięciw wychodzących w różnych kierunkach z punktu z_0 (patrz rys. 16.4), to wówczas na podstawie twierdzenia Abela



Rys. 16.4

$$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in A}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n, \tag{16.8.7}$$

czyli w zbiorze A funkcja (16.8.4) jest ciągła.

W szczególności jeżeli szereg (16.8.1) rozpatrujemy tylko na osi rzeczywistej $z=\operatorname{Re} z=x$ oraz wiemy, że szereg ten jest zbieżny dla $z=R$, to

$$\lim_{\substack{x\to R- \\ x=\operatorname{Re} z}} F(x)=F(R).$$

Zachodzi również twierdzenie następujące:

(16.8.8) *Jeżeli dwa szeregi potęgowe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

o dodatnich promieniach zbieżności mają sumy równe w ciągu punktów $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, *gdzie* $z_n\neq 0$ *oraz* $z_n\to 0$, *to dla każdego* n *mamy* $a_n=b_n$, *czyli szeregi te są identyczne.*

Zadania

16.30. Wykazać, że szereg potęgowy postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} z^n$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ ma promień zbieżności $R=1$, przy czym dla $k=0$ szereg ten jest rozbieżny na całym brzegu koła zbieżności, dla $k=1$ szereg ten jest zbieżny na całym brzegu koła zbieżności z wyjątkiem punktu $z=1$, w którym jest rozbieżny, a dla $k=2$ szereg ten jest zbieżny na całym brzegu koła zbieżności (por. zad. 16.26 i 16.27).

16.31. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$.

Wskazówka. Zastosować wzór (16.8.3).

16.32. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$ i zbadać zbieżność na brzegu koła zbieżności.

Wskazówka. Zastosować wzór (16.8.2) oraz twierdzenie 16.4.6

16.33. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n)z^n$ i zbadać jego zbieżność na brzegu koła zbieżności.

§ 16.9. MNOŻENIE SZEREGÓW

Mnożenie ciągów nie nastręcza żadnych trudności. Jeżeli mamy dane dwa ciągi $\{U_n\}$ i $\{V_n\}$, to przez *ciąg iloczynowy* tych dwóch ciągów rozumiemy ciąg

(16.9.1) $$\{W_n\}, \quad \text{gdzie} \quad W_n = U_n V_n,$$

to znaczy ogólny wyraz ciągu iloczynowego równa się iloczynowi ogólnych wyrazów danych ciągów $\{U_n\}$ i $\{V_n\}$. Na podstawie znanego twierdzenia o działaniach na ciągach (por. I, § 2.1) wiemy, że jeżeli

(16.9.2) $$\lim_{n\to\infty} U_n = U \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} V_n = V,$$

to istnieje $\lim_{n\to\infty} W_n$, przy czym zachodzi równość

(16.9.3) $$\lim_{n\to\infty} W_n = UV,$$

czyli granica ciągu iloczynowego równa się iloczynowi granic danych ciągów.

Przypuśćmy teraz, że mamy dane dwa szeregi

(16.9.4) $$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad \text{i} \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Chcemy tak określić *szereg iloczynowy*

(16.9.5) $$\sum_{k=0}^{\infty} w_k,$$

aby w przypadku, gdy szeregi (16.9.4) są zbieżne oraz

(16.9.6) $$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = U \quad \text{i} \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_k = V,$$

szereg iloczynowy (16.9.5) był również zbieżny oraz miała miejsce równość

(16.9.7) $$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = UV.$$

Oznaczmy

$$U_n=\sum_{k=0}^{n} u_n,\quad V_n=\sum_{k=0}^{n} v_k,\quad W_n=\sum_{k=0}^{n} w_k; \tag{16.9.8}$$

wówczas zgodnie z definicją sumy szeregu przy założeniu (16.9.6) mamy

$$\lim_{n\to\infty} U_n=\sum_{k=0}^{\infty} u_k=U \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} V_n=\sum_{k=0}^{\infty} v_k=V. \tag{16.9.9}$$

Zauważmy, że

$$U_n V_n=\sum_{i,j=1}^{n} u_i v_j \tag{16.9.10}$$

(w sumie tej wskaźniki i oraz j zmieniają się niezależnie od 1 aż do n).

Gdybyśmy teraz chcieli określić wyrazy w_k szeregu (16.9.5) w ten sposób, aby W_n spełniał warunek (16.9.1), to napotkalibyśmy na różne trudności. Wobec tego stawiamy skromniejsze wymaganie, a mianowicie takie, aby w_k określić jako sumę $\sum u_i v_j$ w ten sposób, aby przy dostatecznie dużych m suma

$$W_m=w_1+w_2+w_3+\ldots+w_m \tag{16.9.11}$$

zawierała wszystkie iloczyny występujące w sumie stojącej po prawej stronie wzoru (16.9.10).

Okazało się, że najwygodniej jest określić za Cauchy'm wyraz ogólny szeregu iloczynowego w następujący sposób:

$$w_k=\sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i}=u_0 v_k+u_1 v_{k-1}+u_2 v_{k-2}+\ldots+u_k v_0. \tag{16.9.12}$$

Jak łatwo zauważyć, gdy w wyrażeniu

$$W_{2n}=w_1+w_2+w_3+\ldots+w_{2n} \tag{16.9.13}$$

zamiast w_k podstawimy sumy (16.9.12), wtedy w otrzymanej sumie będą figurować wszystkie składniki występujące w sumie stojącej po prawej stronie wzoru (16.9.10) (a oprócz nich będą także inne składniki postaci $u_i v_j$).

Przez *szereg iloczynowy Cauchy'ego* [1] szeregów (16.9.4) rozumiemy szereg (16.9.5), którego wyrazy określone są za pomocą wzoru (16.9.12).

F. MERTENS udowodnił, że

(16.9.14) *Jeżeli szeregi* (16.9.4) *są zbieżne, przy czym jeden z nich jest bezwzględnie zbieżny, oraz jest spełniona równość* (16.9.6), *to szereg iloczynowy Cauchy'ego szeregów* (16.9.4) *jest również zbieżny i spełnia równość* (16.9.7), *to znaczy suma jego równa się iloczynowi sum szeregów* (16.9.4).

(16.9.15) *Jeżeli oba szeregi* (16.9.4) *są bezwzględnie zbieżne, to ich szereg iloczynowy Cauchy'ego jest również bezwzględnie zbieżny.*

---

[1] Czasami rozważane jest również innego rodzaju mnożenie szeregów, my jednak te rozważania pominiemy.

Mnożenie szeregów w sensie Cauchy'ego odgrywa szczególnie doniosłą rolę przy badaniu szeregów potęgowych. Przypuśćmy, że dane są dwa szeregi potęgowe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k. \tag{16.9.16}$$

Przyjmując we wzorze (16.9.12) $u_i = a_i z^i$, $v_j = b_j z^j$, otrzymujemy następujący wzór na wyraz ogólny szeregu iloczynowego szeregów (16.9.16):

$$w_k = \sum_{i=0}^{k} (a_i b_{k-i}) z^k. \tag{16.9.17}$$

Zatem *szereg iloczynowy Cauchy'ego dwóch szeregów potęgowych jest szeregiem potęgowym.*

Jak wynika z twierdzenia Mertensa, jeżeli promienie zbieżności szeregów (16.9.16) są odpowiednio R_1 i R_2, to promień zbieżności szeregu iloczynowego o wyrazach (16.9.17) jest nie mniejszy od liczby $\min(R_1, R_2)$.

PRZYKŁAD. Utwórzmy szereg iloczynowy Cauchy'ego szeregów

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}. \tag{1}$$

Na podstawie (16.9.12) stosując wzór na dwumian Newtona $(a+b)^k$ (patrz I, § 1.9), otrzymujemy następujący szereg iloczynowy szeregów (1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+b)^k}{k!},$$

czyli na podstawie twierdzenia Mertensa mamy następujący wzór:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+b)^k}{k!}, \tag{16.9.18}$$

gdzie a i b są dowolnymi liczbami zespolonymi.

Zadania

16.34. Wykazać, że szereg iloczynowy zbieżnego szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ pomnożonego przez siebie samego jest rozbieżny.

Wskazówka. Wykorzystać twierdzenie (16.4.6).

16.35. Znaleźć pierwszych sześć wyrazów rozwinięcia funkcji $e^{-x} \sin x$ w szereg potęgowy.

Wskazówka. Przedstawić funkcje e^{-x} i $\sin x$ w postaci szeregów potęgowych i wykorzystać wzór (16.9.17).

§ 16.10. FUNKCJE CAŁKOWITE

Funkcją całkowitą nazywamy sumę szeregu potęgowego

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{16.10.1}$$

w przypadku gdy promień zbieżności tego szeregu $R=\infty$.

Funkcja całkowita jest więc określona na całej płaszczyźnie zespolonej i w każdym punkcie tej płaszczyzny ma pochodne dowolnie wysokiego rzędu. Pochodne te znajdujemy różniczkując formalnie szereg wyraz za wyrazem.

Funkcje całkowite dzielimy na wielomiany i funkcje całkowite przestępne w przypadku, gdy nieskończenie wiele współczynników a_n wyrazów szeregu (16.10.1) jest różnych od zera.

Za pomocą szeregów potęgowych określamy trzy następujące funkcje całkowite przestępne:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \quad (^1), \tag{16.10.2}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \tag{16.10.3}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}, \tag{16.10.4}$$

będące uogólnieniami funkcji e^x, $\sin x$ i $\cos x$ zmiennej rzeczywistej.

Ze wzorów powyższych łatwo wyprowadzamy tzw. *wzory Eulera*

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z, \quad e^{-iz}=\cos z-i\sin z, \tag{16.10.5}$$

skąd mamy

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{16.10.6}$$

Wśród funkcji całkowitych przestępnych zmiennej zespolonej zasadniczą rolę odgrywa funkcja wykładnicza e^z, którą również będziemy oznaczali symbolem

$$\exp z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n. \tag{16.10.7}$$

Na podstawie wzoru (16.9.18) funkcja ta ma następującą własność:

$$\exp(z_1+z_2)=(\exp z_1)(\exp z_2) \tag{16.10.8}$$

dla dowolnych liczb zespolonych z_1 i z_2. W szczególności wykorzystując także wzór Eulera (16.10.5) otrzymujemy

$$e^{a+bi}=e^a(\cos b+i\sin b) \tag{16.10.9}$$

---

(1) Przypominamy, że 0! równa się 1.

dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz b. Stąd widzimy, że

(16.10.10) $$e^z \neq 0 \quad \text{dla każdego } z \text{ zespolonego},$$

ponieważ układ równań

$$e^a \cos b = 0, \quad e^a \sin b = 0$$

dla żadnych a oraz b rzeczywistych nie ma rozwiązań. Podobnie rozumując otrzymujemy

(16.10.11) $$(e^{a+bi}=1) \Leftrightarrow (a=0 \text{ oraz } b=2k\pi \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)).$$

Wykorzystując wzory (16.10.6) i (16.10.8) otrzymujemy

(16.10.12) $$\begin{aligned} \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \end{aligned}$$

dla dowolnych zespolonych z_1 i z_2, oraz uogólnienia innych znanych wzorów trygonometrycznych w przypadku argumentów zespolonych, a w szczególności także równość Pitagorasa

(16.10.13) $$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

dla dowolnej liczby zespolonej z.

Wzór (16.10.11) możemy również zapisać w postaci

(16.10.14) $$(e^z=1) \Leftrightarrow (z=2k\pi i \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)).$$

Biorąc to pod uwagę oraz wzór (16.10.6), otrzymujemy

(16.10.15) $$(\sin z=0) \Leftrightarrow (z=k\pi \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)),$$

a więc jedynymi zerami funkcji sinus zmiennej zespolonej są liczby rzeczywiste, znane nam jako zera funkcji sinus zmiennej rzeczywistej.

Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej e^z może przyjmować dowolne wartości rzeczywiste ujemne, w szczególności wykorzystując (16.10.9) otrzymujemy

(16.10.16) $$(e^z=-1) \Leftrightarrow (z=(2k+1)\pi i \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)),$$

skąd na podstawie wzoru Eulera (16.10.6) otrzymujemy

(16.10.17) $$(\cos z=0) \Leftrightarrow (z=(k+\tfrac{1}{2})\pi \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)).$$

Biorąc pod uwagę wzór (16.8.5) na pochodną sumy szeregu potęgowego, otrzymujemy następujące wzory na pochodne rozpatrywanych funkcji:

(16.10.18) $$(e^z)' = e^z,$$

(16.10.19) $$(\sin z)' = \cos z,$$

(16.10.20) $$(\cos z)' = -\sin z.$$

Za pomocą już zdefiniowanych funkcji określamy funkcje

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{dla} \quad z\neq(k+\tfrac{1}{2})\pi, \tag{16.10.21}$$

$$\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z} \quad \text{dla} \quad z\neq k\pi \tag{16.10.22}$$

oraz następujące funkcje hiperboliczne zmiennej zespolonej (1):

$$\sinh z=\tfrac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}), \tag{16.10.23}$$

$$\cosh z=\tfrac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}), \tag{16.10.24}$$

$$\operatorname{tgh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} \quad \text{dla} \quad z\neq(k+\tfrac{1}{2})\pi i, \tag{16.10.25}$$

$$\operatorname{ctgh} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{e^{z}-e^{-z}} \quad \text{dla} \quad z\neq k\pi i. \tag{16.10.26}$$

Na podstawie wzorów (16.10.8) i (16.10.14) otrzymujemy

$$\left(\bigwedge_{z} \exp(z+z_1)=\exp z\right)\Leftrightarrow\left(z_1=2k\pi i \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\right), \tag{16.10.27}$$

z czego wynika, że funkcja wykładnicza e^{z} zmiennej zespolonej ma okres pierwotny $2\pi i$. Wykorzystując ten fakt oraz wzory Eulera (16.10.6) łatwo sprawdzamy, że funkcje sinus i cosinus zmiennej zespolonej z mają ten sam okres pierwotny co funkcje sinus i cosinus zmiennej rzeczywistej x, to jest 2π. Funkcje tangens i cotangens zmiennej zespolonej z mają okres pierwotny równy π. Natomiast funkcje sinus hiperboliczny i cosinus hiperboliczny zmiennej zespolonej z mają ten sam okres pierwotny co funkcja wykładnicza e^{z}, to jest $2\pi i$, a funkcje tangens hiperboliczny i cotangens hiperboliczny zmiennej zespolonej z mają okres pierwotny πi.

Zadania

Wykazać, że (zad. 16.36 - 16.41):

16.36. $\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1 \cosh z_2+\cosh z_1 \sinh z_2$.

16.37. $\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1 \cosh z_2+\sinh z_1 \sinh z_2$.

16.38. $\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$ dla każdego zespolonego z.

16.39. $\sinh(iz)=i\sin z$, $\cosh(iz)=\cos z$.

16.40. $(\sinh z)'=\cosh z$, $(\cosh z)'=\sinh z$.

(1) Na oznaczenie funkcji hiperbolicznych stosuje się również odpowiednio następujące symbole sh z, ch z, th z, cth z.

16.41. $(\operatorname{tgh} z)' = \frac{1}{\cosh^2 z}$, $(\operatorname{ctgh} z)' = -\frac{1}{\sinh^2 z}$.

16.42. Udowodnić prawdziwość wzoru

$$|\cos(a+bi)|^2 = (\cos a)^2 + (\sinh b)^2,$$

gdzie a i b dowolne liczby rzeczywiste.

Wskazówka. Wykorzystać najpierw wzór (16.10.6), obliczyć $|\cos(a+bi)|$, a następnie po przekształceniach wykorzystać wzór (16.10.23).

§ 16.11. NIESKOŃCZONOŚĆ ZESPOLONA. GRANICE NIEWŁAŚCIWE. RZUT STEREOGRAFICZNY

W zbiorze liczb rzeczywistych skończonych (właściwych) określona jest relacja $\leqslant$ porządkująca ten zbiór (patrz I, § 1.4). Przy tej relacji zbiór liczb rzeczywistych nie ma ani elementu najmniejszego (minimalnego), ani elementu największego (maksymalnego). W związku z tym zbiór liczb rzeczywistych rozszerzamy przez dodanie dwóch elementów, zwanych liczbami nieskończonymi (niewłaściwymi), a oznaczanych symbolami $-\infty$ oraz $+\infty$. Jednocześnie w powiększonym zbiorze liczb rzeczywistych rozszerzamy (na podstawie definicji) relację $\leqslant$ w ten sposób, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą związki $-\infty \leqslant x$ oraz $x \leqslant +\infty$, to znaczy, że $-\infty$ jest elementem minimalnym, a $+\infty$ elementem maksymalnym rozszerzonego zbioru liczb rzeczywistych. Uzupełniony w opisany sposób zbiór liczb rzeczywistych przy tak rozszerzonej relacji $\leqslant$ pozostaje nadal zbiorem (liniowo) uporządkowanym (patrz I, § 1.4). Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych z relacją porządkującą $\leqslant$ można odwzorować na dowolny odcinek domknięty (wzięty razem z końcami) z zaznaczonym zwrotem (wzrastania).

W zbiorze liczb zespolonych określamy relację $\prec$ w sposób następujący:

(16.11.1) $$z_1 \prec z_2 \quad \text{oznacza, że} \quad |z_1| \leqslant |z_2|,$$

przy czym liczbę z_1 nazywamy *wcześniejszą* od z_2 lub z_2 *późniejszą* od z_1.

Relacja (16.11.1) jest *przechodnia* i *zwrotna* oraz dla każdych dwóch liczb zespolonych z_1 i z_2 jest zawsze $z_1 \prec z_2$ lub $z_2 \prec z_1$. Relacja (16.11.1) nie jest jednak antysymetryczna (patrz I, § 1.4), ponieważ np. $-1 \prec i$ oraz $i \prec -1$, chociaż $-1 \neq i$.

Ze względu na opisane własności relację (16.11.1) nazywamy *relacją quasi-porządkującą* zbiór liczb zespolonych.

Zbiór liczb zespolonych przy relacji (16.11.1) ma element minimalny; jest nim mianowicie element zerowy, ponieważ dla każdej liczby zespolonej z mamy

(16.11.2) $$0 = |0| \leqslant |z|.$$

Zbiór liczb zespolonych przy relacji (16.11.1) nie ma natomiast elementu maksymalnego. W związku z tym zbiór liczb zespolonych uzupełniamy przez dodanie jednego elementu, który będziemy nazywali (*zespoloną*) *nieskończonością* i oznaczali symbolem ∞. Przyjmiemy przy tym, że $|\infty| = +\infty$, to znaczy, że moduł zespolonej nieskończoności równa się liczbie rzeczywistej $+\infty$.

Płaszczyznę zespoloną z dołączoną liczbą ∞ nazywamy *płaszczyzną domkniętą* lub *płaszczyzną* Gaussa.

Jeżeli definicję relacji $\prec$ określonej formułą (16.11.1) rozszerzymy na liczby niewłaściwe (nieskończone), to otrzymamy, że dla każdej liczby zespolonej z jest

$$z \prec \infty, \tag{16.11.3}$$

czyli że ∞ jest elementem maksymalnym uzupełnionego zbioru liczb zespolonych.

Rozszerzona relacja (16.11.1) w uzupełnionym zbiorze liczb zespolonych ma te same własności, co relacja (16.11.1) w zbiorze skończonych liczb zespolonych, czyli rozszerzona relacja (16.11.1) quasi-porządkuje uzupełniony zbiór liczb zespolonych. Zapis

$$|z| < +\infty \quad \text{lub} \quad |z| < \infty \tag{16.11.4}$$

będzie oznaczało, że z jest liczbą zespoloną skończoną, czyli liczbą zespoloną różną od ∞.

Otoczeniem ε-nowym U_ε liczby zespolonej ∞ nazywamy zbiór tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których jest spełniona nierówność $|z| > \varepsilon$, czyli geometrycznie otoczeniem ε-nowym ∞ jest zewnętrze koła o środku w zerze i promieniu dodatnim. *Sąsiedztwem ε-nowym* V_ε liczby zespolonei ∞ nazywamy zbiór tych wszystkich liczb zespolonych z, dla których zachodzi związek $\varepsilon < |z| < \infty$.

Będziemy mówili, że *ciąg* $\{z_n\}$ *dąży do* ∞ (ma granicę niewłaściwą ∞), co zapisujemy

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \infty, \tag{16.11.5}$$

jeżeli dla każdej skończonej i dodatniej liczby rzeczywistej M istnieje taki wskaźnik ciągu N, że dla każdego $n \geqslant N$ zachodzi nierówność $|z_n| > M$.

Uwaga. Pojęcie granicy niewłaściwej w zbiorze liczb rzeczywistych i w zbiorze liczb zespolonych są inne, bo np. ciąg $\{(-1)^n n\}$ w zbiorze liczb rzeczywistych nie ma żadnej granicy (ani właściwej, ani niewłaściwej), natomiast w zbiorze liczb zespolonych dąży do granicy ∞.

Biorąc pod uwagę definicje otoczenia i granicy podane w §§ 16.3, 16.4 oraz w paragrafie niniejszym możemy powiedzieć, że ciąg liczb zespolonych $\{a_n\}$ ma granicę (właściwą lub niewłaściwą) a wtedy i tylko wtedy, gdy do dowolnego otoczenia liczby a należą prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{a_n\}$, przy czym przez określenie *prawie wszystkie* elementy ciągu (zbioru) będziemy rozumieli: *wszystkie elementy* ciągu (zbioru) *z wyjątkiem co najwyżej skończonej ich liczby.*

Liczba zespolona ∞ jest punktem skupienia zbioru liczb zespolonych A, jeżeli w każdym sąsiedztwie liczby ∞ znajduje się co najmniej jeden punkt zbioru A (por. § 16.5).

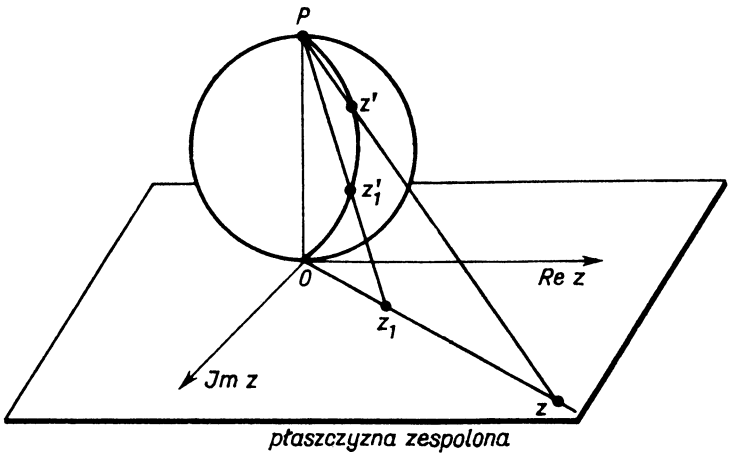
Niech funkcja F odwzorowuje zbiór liczb zespolonych A w zbiór liczb zespolonych Z. Załóżmy, że punkt b (którym w szczególności może być zespolona ∞) jest punktem skupienia zbioru A. Podamy obecnie definicję granicy, obejmującej na podstawie § 16.5 także przypadek granicy właściwej:

Funkcja F ma w punkcie b *granicę* (*właściwą* lub *niewłaściwą*) względem zbioru A równą g, co zapisujemy

$$\lim_{\substack{z \to b \\ z \in A}} F(z) = g, \tag{16.11.6}$$

jeżeli dla każdego (dowolnie małego) ε-nowego otoczenia U_ε liczby g istnieje takie (odpowiednio małe) δ-*towe* sąsiedztwo V_δ liczby b, że $F(V_\delta \cap A) \subset U_\varepsilon$.

Jak wiemy, obrazem geometrycznym zbioru liczb zespolonych (skończonych) jest płaszczyzna. Umieśćmy na płaszczyźnie zespolonej kulę o promieniu R w ten sposób, aby była styczna do płaszczyzny w punkcie $z=0$ (patrz rys. 16.5). Punkt styczności kuli nazwijmy *biegunem południowym* kuli, a punkt przeciwległy do niego oznaczymy literą P i nazwijmy *biegunem północnym* kuli. Weźmy teraz pod uwagę dowolny punkt z płaszczyzny



Rys. 16.5

zespolonej i połączmy go linią prostą z biegunem północnym P. Punkt przecięcia odcinka Pz z powierzchnią kuli oznaczmy przez z'. Punkt z' nazywamy *rzutem stereograficznym* punktu z, leżącego na płaszczyźnie, na powierzchnię kuli. W ten sposób otrzymujemy odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne płaszczyzny zespolonej na powierzchnię kuli bez jednego punktu P. Punkt P uważamy za obraz liczby zespolonej ∞.

Obrazem geometrycznym uzupełnionego zbioru liczb zespolonych jest więc powierzchnia kuli, którą nazywamy *sferą Riemanna*.

Przy rzucie stereograficznym obrazami prostych leżących na płaszczyźnie zespolonej i przechodzących przez zero są na powierzchni kuli okręgi (wielkie) południkowe, obrazami zaś okręgów o środku w zerze są na sferze okręgi równoleżnikowe.

Elementom późniejszym w sensie relacji quasi-porządkującej $\prec$ (16.11.1) odpowiadają na kuli punkty leżące na tej samej wysokości (mające tę samą szerokość geograficzną) lub wyżej (mające większą szerokość geograficzną).

Zadania

Określić, czy podane niżej ciągi mają granicę, a jeśli tak, to podać jaką (zad. 16.43 - 16.46):

16.43. $\{(1+i)^n\}$.

16.44. $\{i^n\}$.

16.45. $\{2^n+i^n\}$.

16.46. $\{\sqrt[n]{2^n+3^n}+i^n\}$.

Obliczyć granice funkcji (zad. 16.47 - 16.50):

16.47. $\lim_{z\to\infty}\frac{\sin z}{z}$.

16.48. $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}$.

16.49. $\lim_{z\to\infty}(ze^{-z})$.

16.50. $\lim_{z\to\infty}(z^{-3}e^{z})$.

§ 16.12. CAŁKA FUNKCJI ZESPOLONEJ

Niech $z(t)$ będzie funkcją ciągłą określoną na przedziale domkniętym $\langle t_0, T\rangle$ liczb rzeczywistych, a przyjmującą wartości zespolone. Równanie

$$z=z(t), \quad \text{gdzie} \quad t_0\leqslant t\leqslant T, \tag{16.12.1}$$

określa pewną linię w płaszczyźnie zespolonej, będącą zbiorem tych wszystkich punktów $z(t)$, dla których $t_0\leqslant t\leqslant T$; linia ta jest obrazem ciągłym odcinka domkniętego.

Krzywa w ten sposób określona może nie odpowiadać naszemu intuicyjnemu pojęciu krzywej. G. Peano udowodnił w roku 1890, że funkcję $z(t)$ można określić w ten sposób, że wykresem krzywej (16.12.1) jest kwadrat wraz z brzegiem (obwodem), czyli że kwadrat jest obrazem ciągłym odcinka. Z tego powodu o funkcji $z(t)$ będziemy na ogół oprócz ciągłości jeszcze zakładali jej różnowartościowość. Mazurkiewicz i Hahn udowodnili bowiem, że wykres krzywej wypełniającej obszar płaski musi posiadać punkty wielokrotne.

Krzywą (16.12.1) nazywamy *łukiem zwykłym* (*łukiem Jordana*), jeżeli jej wykres nie ma punktów wielokrotnych, czyli jeżeli ma miejsce implikacja

$$(t_1\neq t_2)\Rightarrow(z(t_1)\neq z(t_2)). \tag{16.12.2}$$

Punkt $z(t_0)$ nazywamy *początkiem łuku*, a punkt $z(T)$ *końcem łuku*.

Linię (16.12.1) nazywamy *łukiem regularnym*, jeżeli jest łukiem zwykłym oraz jeżeli funkcja $z(t)$ jest różniczkowalna w całym przedziale $\langle t_0, T\rangle$ (na końcach przedziału istnieją pochodne jednostronne), a jej pochodna jest ciągła i różna od zera.

Krzywą (16.12.1) nazywamy *krzywą regularną*, jeżeli przedział $\langle t_0, T\rangle$ da się podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów $\langle t_0, t_1\rangle, \langle t_1, t_2\rangle, \ldots, \langle t_n, T\rangle$ w ten sposób, że w każdym z nich krzywa (16.12.1) jest łukiem regularnym. Punkty krzywej $z(t_0), z(t_1), \ldots, z(t_n), z(T)$ nazywamy wówczas *wierzchołkami krzywej* (16.12.1).

Krzywą (16.12.1) nazywamy *krzywą zamkniętą zwykłą* (*krzywą Jordana*), jeżeli zachodzi implikacja (16.12.2) z jednym wyjątkiem, a mianowicie $z(t_0)=z(T)$.

Konturem będziemy nazywali krzywą Jordana C regularną i zamkniętą, będącą brzegiem obszaru ograniczonego D i zorientowaną w ten sposób, że przy poruszaniu się po krzywej w kierunku wyznaczonym przez wzrastający parametr t obszar D pozostaje po lewej stronie. Obszar D nazywamy wówczas *wnętrzem konturu* C.

Całkę oznaczoną od t_0 do T funkcji zespolonej $z(t)$ zmiennej rzeczywistej t

$$\int_{t_0}^{T} z(t)\,dt \tag{16.12.3}$$

określamy analogicznie jak całkę oznaczoną funkcji $f(x)$ zmiennej rzeczywistej x (patrz I, § 19.1), a jedyna różnica polega na tym, że odpowiednik (I, 19.1.1) jest ciągiem liczb zespolonych.

Oznaczmy

$$\operatorname{Re} z(t)=x(t) \quad \text{oraz} \quad \operatorname{Im} z(t)=y(t), \tag{16.12.4}$$

czyli

$$z(t)=x(t)+i\,y(t). \tag{16.12.5}$$

Mamy następujące twierdzenie:

(16.12.6) *Funkcja zespolona $z(t)$ zmiennej rzeczywistej t jest całkowalna w przedziale $\langle t_0, T\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje rzeczywiste* (16.12.4) *$x(t)$ oraz $y(t)$ zmiennej rzeczywistej t są obie całkowalne w przedziale $\langle t_0, T\rangle$, przy czym o ile ten warunek jest spełniony, to prawdziwa jest równość*

$$\int_{t_0}^{T} z(t)\,dt=\int_{t_0}^{T} x(t)\,dt+i\int_{t_0}^{T} y(t)\,dt. \tag{16.12.7}$$

Niech teraz równanie (16.12.1) przedstawia łuk regularny. Wówczas łuk ten jest prostowalny, a długość jego L wyraża się wzorem

$$L=\int_{t_0}^{T}|z'(t)|\,dt \tag{16.12.8}$$

(por. I, wzór (20.2.3)). Zauważmy bowiem, że pochodna funkcji (16.12.5) równa się

$$z'(t)=x'(t)+i\,y'(t),$$

a stąd

$$|z'(t)|=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}.$$

Określimy teraz całkę krzywoliniową funkcji zespolonej $f(z)$ zmiennej zespolonej z.

Niech równanie (16.12.1) określa łuk regularny $\overset{\frown}{AB}$ i niech na tym łuku będzie określona funkcja ciągła $f(z)$.

Przez *całkę krzywoliniową* (por. § 6.2):

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz, \quad \text{gdzie} \quad A=z(t_0),\ B=z(T), \tag{16.12.9}$$

rozumiemy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n} f(z_i)[z(t_i^{(n)})-z(t_{i-1}^{(n)})], \tag{16.12.10}$$

gdzie z_i jest dowolnym punktem leżącym na łuku $\overset{\frown}{z(t_i^{(n)})\,z(t_{i-1}^{(n)})}$ oraz są spełnione następujące warunki:

$$\lim_{n\to\infty} m_n=\infty, \quad \lim_{n\to\infty}\max_{i}(t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)})=0, \tag{16.12.11}$$

czyli, jak mówimy, ciąg podziałów odcinka $\langle t_0, T\rangle$ jest *normalny*.

Warunkiem całkowalności funkcji $f(z)$ wzdłuż łuku $\overset{\frown}{AB}$ jest więc istnienie granicy (16.12.10) przy każdym ciągu normalnym podziałów oraz przy dowolnym wyborze z_i na łuku $z(t_i^{(n)})\ z(t_{i-1}^{(n)})$, przy czym granica ta musi być zawsze taka sama.

Można wykazać, że przy założeniu, że łuk jest regularny, a funkcja $f(z)$ jest ciągła na tym łuku, warunki te są spełnione, czyli

(16.12.12) *Całka krzywoliniowa* (16.12.9) *funkcji ciągłej* $f(z)$ *wzdłuż łuku regularnego* $\overset{\frown}{AB}$ *zawsze istnieje i równa się całce krzywoliniowej*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i \int_{\overset{\frown}{AB}} v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy,$$

gdzie $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Ostatni wzór otrzymujemy w sposób formalny ze wzoru (16.12.9) przyjmując $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ oraz $dz = dx + i\,dy$.

Mamy następujące bardzo ważne twierdzenie dotyczące całek krzywoliniowych funkcji ciągłych wzdłuż łuków regularnych:

Niech funkcja $f(z)$ *będzie określona i ciągła w obszarze* D. *Na to, aby funkcja* $f(z)$ *miała w obszarze* D *funkcję pierwotną* $F(z)$, *czyli taką funkcję, że w każdym punkcie* $z \in D$ *mamy* $F'(z) = f(z)$, *potrzeba i wystarcza, aby całka krzywoliniowa funkcji* $f(z)$ *wzdłuż dowolnej krzywej Jordana regularnej i zamkniętej równała się zeru. Przy tym, jeżeli powyższy warunek jest spełniony, to dla każdego łuku regularnego* (16.12.1) *leżącego w* D *mamy następujący wzór:*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz = F[z(T)] - F[z(t_0)], \tag{16.12.13}$$

a więc wartość całki krzywoliniowej nie zależy od kształtu łuku, a zależy jedynie od punktu początkowego i końcowego łuku $\overset{\frown}{AB}$.

Z tego wynika, że jeżeli w obszarze D wartość całki krzywoliniowej

$$\int_{\overset{\frown}{z_0 z}} f(u)\,du \tag{16.12.14}$$

nie zależy od kształtu łuku regularnego łączącego punkty z_0 i z, to przy ustalonym z_0 a zmieniającym się z całka (16.12.14) wyznacza funkcję $F(z)$, która jest pierwotną względem $f(z)$, to znaczy dla każdego $z \in D$ $F'(z)$ istnieje i równa się $f(z)$.

Zadania

16.51. Obliczyć całki krzywoliniowe $\int_{C_i} z\,dz$, gdzie C_1 jest odcinkiem o początku -1, końcu $+1$, a C_2 jest półokręgiem o początku -1, końcu $+1$ i takim, że na nim $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Wskazówka. C_1 ma równanie $z = t$, $-1 \leqslant t \leqslant +1$, C_2 ma równanie $z = -\cos t + i \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Niech C oznacza okrąg $z=e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Obliczyć następujące całki (wykorzystując wzór (16.12.12)) (zad. 16.52 - 16.55):

16.52. $\int_C z\,dz$.

16.53. $\int_C \frac{dz}{z}$.

16.54. $\int_C \frac{dz}{z-2}$.

16.55. $\int_C |z-1|\,dz$.

§ 16.13. FUNKCJE HOLOMORFICZNE

Własności funkcji zmiennej zespolonej zależą w sposób istotny od własności topologicznych zbioru, w którym jest ona określona.

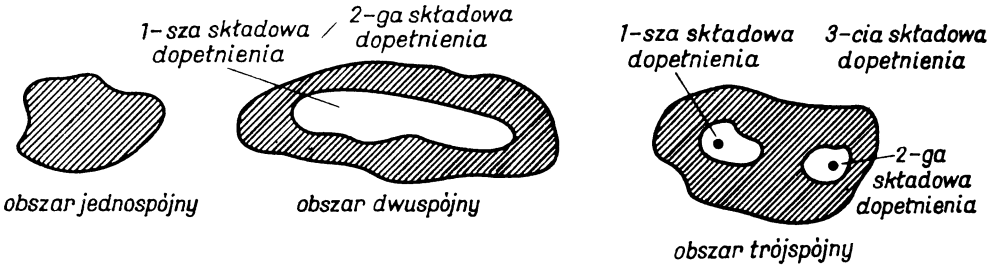
Zbiór nazywamy *zbiorem spójnym* (patrz § 1.2), jeżeli nie można go przedstawić jako sumy mnogościowej dwóch jego podzbiorów niepustych, rozłącznych i takich, że żaden z nich nie zawiera punktów skupienia drugiego. Zatem przy każdym rozkładzie zbioru spójnego na sumę mnogościową dwóch jego podzbiorów niepustych i rozłącznych co najmniej jeden z nich musi zawierać punkty skupienia drugiego. Na przykład zbiorem spójnym jest: łuk okręgu, łamana, wnętrze prostokąta itd.

Suma mnogościowa dwóch zbiorów spójnych posiadających chociażby jeden punkt wspólny jest zbiorem spójnym.

Podzbiór S zbioru A nazywa się jego *składową*, jeżeli jest spójny i jeżeli każdy inny spójny podzbiór S' zbioru A zawierający S pokrywa się z S, czyli składowa zbioru jest maksymalnym podzbiorem spójnym.

Każde dwie składowe zbioru A są albo identyczne albo rozłączne.

Ilość składowych zbioru otwartego jest skończona lub co najwyżej przeliczalna. Każdy punkt zbioru A należy do pewnej jego składowej.



Rys. 16.6

Obszarem nazywamy zbiór otwarty i spójny.

Obszar nazywamy *jednospójnym*, jeżeli jego dopełnienie do płaszczyzny zespolonej (patrz I, § 1.2) jest zbiorem spójnym. *Obszar* nazywamy *n-spójnym*, jeżeli jego dopełnienie składa się dokładnie z n składowych.

Przykładem obszaru jednospójnego jest koło (otwarte), a dwuspójnego pierścień (rys. 16.6)

Kontinuum nazywamy zbiór domknięty i spójny zawierający więcej niż jeden punkt.

Przypominamy (patrz § 16.6), że funkcję zmiennej zespolonej $f(z)$ nazywamy *holomorficzną* w obszarze D, jeżeli jest w tym obszarze różniczkowalna.

(16.13.1) TWIERDZENIE Cauchy'ego. *Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w pewnym obszarze jednospójnym D (leżącym w płaszczyźnie otwartej liczb zespolonych), to całka krzywoliniowa wzdłuż każdej krzywej regularnej zamkniętej zawartej w D równa się zeru.*

Z twierdzenia tego wynika, że całka krzywoliniowa funkcji $f(z)$ wzdłuż dwóch różnych łuków regularnych (leżących w D) o tym samym początku z_1 i tym samym końcu z_2 ma tę samą wartość. Własność tę wyrażamy krótko w następujący sposób:

(16.13.2) *Całka krzywoliniowa funkcji holomorficznej w obszarze jednospójnym nie zależy od drogi całkowania, a tylko od punktu początkowego i końcowego tej drogi (a więc zależy także od kierunku wyznaczonego przez wzrastający parametr t; jeżeli kierunek zmienimy na przeciwny, to całka zmieni tylko znak).*

Twierdzenie (16.13.1) daje się uogólnić w następujący sposób:

(16.13.3) *Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze n-spójnym D, którego brzeg składa się z $n+1$ krzywych regularnych zamkniętych $C_0, C_1, \ldots, C_n$, przy czym funkcja $f(z)$ jest ciągła na domknięciu obszaru D, to*

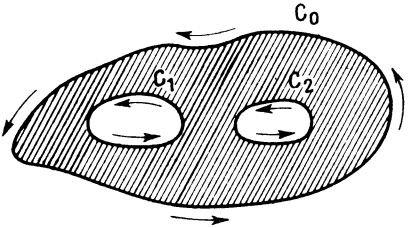
$$\sum_{i=0}^{n} \int_{C_i} f(z)\,dz = 0, \tag{16.13.3'}$$

przy czym kierunek wzrostu parametru na C_n jest tak obrany, aby przy poruszaniu się punktu po krzywej C_i w kierunku wzrastania parametru t obszar D pozostawał po stronie lewej.

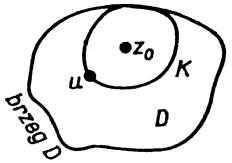
PRZYKŁAD. Jeżeli mamy obszar trójspójny taki jak na rysunku 16.7, to wzór z twierdzenia (16.13.3) możemy napisać w postaci

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz,$$

z tym, że kierunek wzrastania parametru t na krzywych C_1 i C_2 został zmieniony na przeciwny.



Rys. 16.7



Rys. 16.8

(16.13.4) *Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze D, $z_0 \in D$, a K jest okręgiem leżącym w D o środku w z_0 i równaniu $z = z_0 + re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, to pochodna $f^{(n)}(z_0)$ istnieje i wyraża się wzorem*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_K \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du \qquad (n=0,1,2,\ldots), \tag{16.13.4'}$$

przy czym przez $f^{(0)}(z_0)$ rozumiemy $f(z_0)$.

Na podstawie (16.13.3) okrąg K możemy zastąpić przez dowolną krzywą regularną zamkniętą C_0 leżącą wraz z wnętrzem w obszarze D i której równanie wyznacza odpowiedni zwrot przy wzrastaniu parametru t (rys. 16.8).

Można też udowodnić następujące twierdzenie:

(16.13.5) *Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze D, to jest rozwijalna w otoczeniu każdego punktu $z_0 \in D$ w szereg potęgowy*

$$f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{16.13.5'}$$

gdzie

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du, \tag{16.13.5''}$$

przy czym promień zbieżności szeregu (16.13.5') *jest nie mniejszy niż odległość punktu z_0 od brzegu obszaru D*[1]) (rys. 16.8).

Porównując wzory (16.13.4') oraz (16.13.5'') otrzymujemy następujący wzór na współczynniki rozwinięcia funkcji holomorficznej w szereg potęgowy:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{16.13.6}$$

(16.13.7) *Jeżeli funkcja $f(z)$ jest w kole $|z|<R$ holomorficzna i ograniczona liczbą M, to współczynniki a_n jej rozwinięcia w szereg potęgowy* (16.13.5') *spełniają tzw. nierówność Cauchy'ego*:

$$|a_n|\leqslant MR^{-n}. \tag{16.13.7'}$$

Z twierdzenia (16.13.5) wynika, że funkcja holomorficzna na całej płaszczyźnie jest funkcją całkowitą (patrz § 16.10).

Liczbę z_0 nazywamy *punktem zerowym* (*zerem*) *p-krotnym* funkcji holomorficznej $f(z)$, jeżeli w jej rozwinięciu (16.13.5') $a_0=a_1=\ldots=a_{p-1}=0$, natomiast $a_p\neq 0$.

Cytujemy dalsze twierdzenia dotyczące funkcji holomorficznych:

(16.13.8) Twierdzenie Liouville'a. *Każda funkcja całkowita i ograniczona równa się stałej.*

(16.13.9) Twierdzenie Morery. *Jeżeli $f(z)$ jest funkcją ciągłą w obszarze D, a całka krzywoliniowa funkcji $f(z)$ wzdłuż obwodu każdego prostokąta zawartego w D równa się zeru, to funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w obszarze D.*

Na podstawie definicji funkcji holomorficznej podanej w § 16.6 oraz twierdzenia (16.13.5) możemy powiedzieć, że

(16.13.10) *Funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w punkcie z_0, jeżeli istnieje takie otoczenie tego punktu, w którym daje się przedstawić w postaci sumy szeregu potęgowego* (16.13.5').

([1]) Przez odległość punktu z_0 od zbioru A rozumiemy kres dolny odległości z_0 od dowolnego punktu $a \in A$.

Warunek ten może służyć jako definicja funkcji holomorficznej w punkcie z_0.

(16.13.11) ZASADA MAKSIMUM DLA MODUŁU FUNKCJI HOLOMORFICZNEJ. *Jeżeli funkcja $f(z)$ różna od stałej jest holomorficzna w obszarze D, to jej moduł $|f(z)|$ nie osiąga maksimum w obszarze D (może go osiągnąć tylko na brzegu obszaru D, jeżeli na nim funkcja $f(z)$ jest również określona).*

(16.13.12) TWIERDZENIE ROUCHE'GO. *Jeżeli funkcje f i g są holomorficzne w obszarze D, ciągłe w obszarze D i na jego brzegu oraz dla każdego z na brzegu obszaru D ma miejsce nierówność*

$$|g(z)|<|f(z)|,$$

to suma krotności miejsc zerowych sumy $f(z)+g(z)$ w obszarze D jest dokładnie ta sama co suma krotności miejsc zerowych funkcji $f(z)$ w obszarze D.

Z twierdzenia (16.8.8) i twierdzenia (16.13.5) wynika:

(16.13.13) *Jeżeli dwie funkcje f i g są holomorficzne w obszarze D oraz przyjmują wartości równe w zbiorze punktów mających punkt skupienia leżący w obszarze D, to funkcje f i g są identyczne w obszarze D.*

Zadania

16.56. Wykazać, że jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w punkcie z_0 i w pewnym otoczeniu tego punktu nie jest równa tożsamościowo zeru, to istnieje takie sąsiedztwo punktu z_0, w którym funkcja $f(z)$ jest stale różna od zera (czyli że zera funkcji holomorficznej nie równej tożsamościowo zeru są tzw. *punktami odosobnionymi*).

Wskazówka. Wykorzystać (16.13.10) i (16.13.5).

16.57. Wykazać, że jeżeli funkcja $f(z)$ holomorficzna w obszarze D jest równa zeru w pewnym zbiorze, mającym punkt skupienia należący do obszaru D, to funkcja $f(z)$ równa się zeru w każdym punkcie D.

Wskazówka. Wykorzystać zadanie poprzednie.

16.58. Udowodnić twierdzenie (16.13.11), czyli wykazać, że jeżeli funkcja $f(z)$ różna od stałej jest holomorficzna w obszarze D, to $|f(z)|$ nie osiąga maksimum w obszarze D (może je osiągnąć tylko na brzegu obszaru D).

Wskazówka. Wykorzystać wzór (16.13.4') przy $n=0$.

16.59. Znaleźć cztery pierwsze współczynniki rozwinięcia funkcji tg z w szereg potęgowy (w otoczeniu 0).

16.60. Zbadać, jaki jest promień zbieżności rozwinięcia funkcji ctg z w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $z=\frac{1}{2}\pi$.

16.61. Zbadać, jaki jest promień zbieżności rozwinięcia funkcji tgh z w otoczeniu 0.

Wskazówka. Wykorzystać wzory (16.10.25) oraz (16.10.16).

16.62. Dowieść, że na całej osi urojonej Im z ma miejsce nierówność $|\cos z|\geqslant 1$.

Wskazówka. Wykorzystać wzór (16.10.6).

§ 16.14. SZEREGI LAURENTA. PUNKTY REGULARNE I OSOBLIWE FUNKCJI ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

Przez *szereg Laurenta*, którym oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{lub} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, \tag{16.14.1}$$

rozumiemy sumę dwóch szeregów, mianowicie

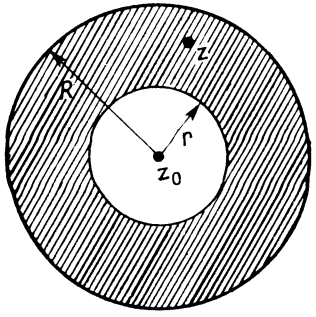
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{16.14.2}$$

oraz

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}. \tag{16.14.3}$$

Mówimy, że *szereg Laurenta* (16.14.1) jest *zbieżny*, jeżeli oba szeregi (16.14.2) i (16.14.3) są zbieżne. Jeżeli więc chociaż jeden z szeregów (16.14.2) lub (16.14.3) jest rozbieżny, to szereg (16.14.1) uważamy również za rozbieżny. W przypadku zbieżności szeregu Laurenta (16.14.1) przez jego sumę rozumiemy sumę szeregów (16.14.2) i (16.14.3).

Oznaczmy przez R promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, a przez R_1 promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}u^m$. Wówczas szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ jest zbieżny dla $|z-z_0|<R$, a rozbieżny dla $|z-z_0|>R$, natomiast szereg $\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$ jest zbieżny dla $|z-z_0|>R_1^{-1}$, a rozbieżny dla $|z-z_0|<R_1^{-1}$.



Rys. 16.9

Jeżeli więc $R_1^{-1}<R$, to szereg Laurenta (16.14.1) jest zbieżny w pierścieniu (rys. 16.9):

$$r<|z-z_0|<R, \quad \text{gdzie} \quad r=R_1^{-1}, \tag{16.14.4}$$

a rozbieżny dla $|z-z_0|<r$ oraz dla $|z-z_0|>R$. Jeżeli chodzi o brzeg pierścienia (16.14.4), czyli o punkty okręgów $|z-z_0|=r$ oraz $|z-z_0|=R$, to w pewnych punktach tych okręgów szereg (16.14.1) może być zbieżny, a w innych rozbieżny. Jeżeli zaś $R_1^{-1}>R$, to szereg Laurenta (16.14.1) jest zawsze rozbieżny.

Zanotujemy jeszcze, że na podstawie wzoru Cauchy-Hadamarda (16.8.2) mamy

$$R=\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{oraz} \quad r=\limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}. \tag{16.14.5}$$

Ogólnie więc biorąc szereg Laurenta jest zbieżny w pierścieniu (16.14.4), który może wszczególności być zbiorem pustym (gdy $r>R$) lub redukować się do części okręgu $|z-z_0|=r$ w przypadku gdy $r=R$.

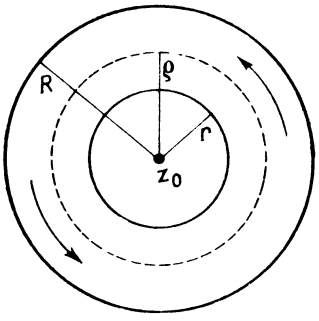
Dla funkcji zespolonej zmiennej zespolonej zachodzi twierdzenie analogiczne jak twierdzenie (6.1.7) dla funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej (patrz I, § 6.1).

Na podstawie tego twierdzenia oraz twierdzenia o pochodnej sumy szeregu potęgowego (16.8.4) możemy stwierdzić:

(16.14.6) *Suma szeregu Laurenta* (16.14.1) *w pierścieniu* (16.14.4), *w którym szereg ten jest zbieżny, jest funkcją holomorficzną.*

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne:

(16.14.7) *Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w pierścieniu* (16.14.4), *to daje się w tym pierścieniu przedstawić jako suma szeregu Laurenta* (16.14.1).



Rys. 16.10

Współczynniki tego rozwinięcia wyrażają się wzorami (16.13.5″) z tym, że wskaźnik n może być dowolną liczbą całkowitą (także ujemną), a okrąg K w tym przypadku ma środek w punkcie z_0, promień ρ spełniający nierówność $r<\rho<R$ i okrąg jest zorientowany dodatnio (tzn. w ten sposób, że przy ruchu punktu po okręgu w kierunku tej orientacji wnętrze okręgu (koło)pozostaje po lewej stronie) (rys. 16.10)

Mówimy, że punkt z_0 jest *punktem regularnym* funkcji $f(z)$, jeżeli funkcja $f(z)$ jest w punkcie z_0 holomorficzna, tzn. jeżeli istnieje takie otoczenie punktu z_0, w którym $f(z)$ jest różniczkowalna.

Punkt z_0 nazywamy *punktem osobliwym odosobnionym* funkcji $f(z)$, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $0<|z-z_0|<R$ punktu z_0, w którym funkcja $f(z)$ jest określona i różniczkowalna, a punkt z_0 nie jest punktem regularnym.

PRZYKŁAD. Punkt $z=1$ jest punktem osobliwym odosobnionym funkcji $\frac{1}{1-z}$; wszystkie inne punkty płaszczyzny zespolonej są punktami regularnymi tej funkcji.

Zgodnie z tym, co powiedzieliśmy poprzednio, jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna (różniczkowalna) w pierścieniu $0<|z-z_0|<R$, to możemy ją przedstawić jako sumę szeregu Laurenta (16.14.1), przy czym część (16.14.2) nazywamy *częścią regularną rozwinięcia funkcji f*, a część (16.14.3) nazywamy *częścią osobliwą rozwinięcia funkcji f* w szereg Laurenta.

Rozróżniamy trzy rodzaje punktów osobliwych odosobnionych:

a) *Punkty z osobliwością usuwalną*, gdy rozwinięcie f w szereg Laurenta redukuje się do części regularnej.

PRZYKŁAD. Punkt $z=0$ dla funkcji $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ dla $z\neq 0$ oraz $f(0)=0$.

b) *Bieguny*, gdy część osobliwa rozwinięcia jest skończona.

PRZYKŁAD. Punkt $z=0$ dla funkcji $g(z)=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+\sin z$.

c) *Punkty istotnie osobliwe*, gdy w części osobliwej rozwinięcia funkcji w szereg Laurenta nieskończenie wiele współczynników jest różnych od zera.

PRZYKŁAD. Punkt $z=0$ dla funkcji $\exp 1/z$.

W przypadku osobliwości usuwalnej wystarczy zmienić wartość funkcji $f(z)$ w punkcie z_0, a mianowicie przyjąć $f(z_0)=a_0$, aby funkcja $f(z)$ w ten sposób zmieniona stała się funkcją holomorficzną także w punkcie z_0, np. w podanym wyżej przykładzie przyjąć $f(0)=1$.

W przypadku bieguna przez *rząd bieguna* rozumiemy największą liczbę naturalną m taką, że $a_{-m}\neq 0$. W tym przypadku część osobliwa rozwinięcia, która na mocy założenia jest skończona, ma postać

$$\sum_{k=1}^{m} a_{-k}(z-z_0)^{-k} \tag{16.14.8}$$

i nazywa się *częścią główną bieguna m-krotnego* (*bieguna rzędu m*).

PRZYKŁAD. Częścią główną bieguna dla funkcji $g(z)$ podanej wyżej jest $\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}$. Dla funkcji $g(z)$ punkt $z=0$ jest biegunem rzędu drugiego.

Odnotowujemy dwa interesujące twierdzenia dotyczące punktów osobliwych odosobnionych:

(16.14.9) TWIERDZENIE RIEMANNA. *Jeżeli z_0 jest punktem osobliwym odosobnionym funkcji $f(z)$, która w pewnym sąsiedztwie $0<|z-z_0|<R$ punktu z_0 jest holomorficzna i ograniczona, to w punkcie z_0 jest osobliwość usuwalna.*

(16.14.10) WIELKIE TWIERDZENIE PICARDA. *Jeżeli z_0 jest punktem istotnie osobliwym funkcji $f(z)$, która jest holomorficzna w pewnym sąsiedztwie $0<|z-z_0|<R$ punktu z_0, to w tym sąsiedztwie (i każdym innym dowolnie małym) przyjmuje każdą wartość zespoloną, z wyjątkiem co najwyżej jednej, nieskończenie wiele razy, to znaczy istnieje co najwyżej jedno takie u_0 zespolone, że dla każdego $u\neq u_0$ istnieje nieskończenie wiele różnych punktów z znajdujących się w sąsiedztwie $0<|z-z_0|<R$ punktu z_0, takich że $f(z)=u$.*

Oznaczmy teraz przez $W(z)$ wielomian stopnia m, to znaczy

$$W(z)=\sum_{k=0}^{m} a_k z^k, \quad \text{przy czym} \quad a_m\neq 0. \tag{16.14.11}$$

(16.14.12) ZASADNICZE TWIERDZENIE ALGEBRY[1]. *Istnieje m takich liczb zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_m$ (z których niektóre mogą być między sobą równe), że dla każdego z zachodzi równość*

$$W(z)=a_m(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_m), \tag{16.14.12'}$$

przy czym rozkład ten jest jednoznaczny.

Liczby $z_1, z_2, \ldots, z_m$ są *zerami* (lub *miejscami zerowymi*) wielomianu $W(z)$. Jeżeli w ciągu zer wielomianu jedna liczba np. z_k występuje dokładnie p razy, to mówimy, że z_k jest *p-krotnym zerem* wielomianu $W(z)$.

Suma krotności zer wielomianu równa się stopniowi wielomianu.

Zasadnicze twierdzenie algebry mówi więc, że równanie

$$W(z)=0 \tag{16.14.13}$$

[1]) Sformułowane przez d'Alemberta w końcu XVIII w., a udowodnione przez Gaussa na przełomie XVIII i XIX w.

ma dokładnie m pierwiastków, przy czym każdy pierwiastek równania (16.14.13), czyli każde miejsce zerowe wielomianu $W(z)$, liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność.

Z zasadniczego twierdzenia algebry widać również, że wielomian $W(z)$ przyjmuje każdą wartość u_0 w skończonej liczbie punktów (nie większej od m) płaszczyzny zespolonej. Odpowiednie liczby z są to pierwiastki równania

$$W(z)-u_0=0. \tag{16.14.14}$$

Możemy również mówić o zachowaniu się funkcji zespolonej zmiennej zespolonej w nieskończoności.

Jak wiemy, przez r-owe sąsiedztwo ($r>0$) liczby ∞ rozumiemy zbiór $\{z: r<|z|<\infty\}$. Badanie zachowania się funkcji $f(z)$ w ∞ i jej sąsiedztwie sprowadzamy przez podstawienie

$$z=u^{-1} \tag{16.14.15}$$

do badania się zachowania funkcji złożonej

$$g(u)=f(u^{-1}) \tag{16.14.16}$$

w zerze i jego sąsiedztwie.

Mówimy, że ∞ jest *punktem regularnym* funkcji $f(z)$, jeżeli 0 jest punktem regularnym funkcji $g(u)$, i podobnie, że ∞ jest *punktem osobliwym* danego rodzaju funkcji f, jeżeli zero jest odpowiednim punktem osobliwym funkcji g.

Zauważmy, że przy przekształceniu (16.14.15) r-owe sąsiedztwo punktu ∞ jest odwzorowane w sposób wzajemnie jednoznaczny na sąsiedztwo r-owe zera.

PRZYKŁAD. Punkt ∞ jest punktem regularnym funkcji $\frac{1}{1-z}$, ponieważ 0 jest punktem regularnym funkcji $\frac{u}{1-u}$, natomiast punkt ∞ jest biegunem pierwszego rzędu funkcji $\frac{z^2}{1-z}$, ponieważ 0 jest biegunem pierwszego rzędu funkcji $\frac{1}{u^2-u}$,

Zauważmy, że funkcja całkowita przestępna (np. e^z lub $\sin z$) ma w nieskończoności punkt istotnie osobliwy.

Zadania

16.63. Znaleźć obszar zbieżności i sumę szeregu Laurenta

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \quad \text{gdy} \quad a_n=\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{2^n}{n!} & \text{dla } n \text{ parzystego dodatniego lub zera,} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystego ujemnego,} \\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystego.} \end{cases}$$

16.64. Znaleźć obszar zmienności i sumę szeregu Laurenta

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n, \quad \text{gdy} \quad b_n=\begin{cases} 2^n & \text{dla } n \text{ parzystego dodatniego lub zera,} \\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystego dodatniego,} \\ \dfrac{1}{(-n)!} & \text{dla } n \text{ ujemnego.} \end{cases}$$

Rozwinąć następujące funkcje w szereg Laurenta w podanym obszarze (zad. 16.65 - 16.72):

16.65. $f(z)=\dfrac{3z^2-1}{z^3-z}$ dla $0<|z|<1$,

Wskazówka:

$$\frac{3z^2-1}{z^3-z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}.$$

16.66. $f(z)=\dfrac{3z^2-1}{z^3-z}$ dla $|z|>1$.

Wskazówka. Patrz poprzednie zadanie.

16.67. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}$ dla $0<|z-1|<2$.

16.68. $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-1)(z^2-4)}$ dla $1<|z|<2$.

16.69. $f(z)=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}$ dla $1<|z|<2$.

16.70. $f(z)=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}$ dla $2<|z|<\infty$.

16.71. $f(z)=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}$ dla $|z|<1$.

16.72. $f(z)=\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)+\dfrac{z^2}{1-z}$ dla $0<|z|<1$.

Wskazówka. Skorzystać z rozwinięcia funkcji wykładniczej e^u, a następnie podstawić $u=\dfrac{1}{z}$ dla $|z|>0$. Drugi składnik $\dfrac{z^2}{1-z}$ przy $|z|>1$ rozwinąć w szereg Maclaurina wykorzystując rozwinięcie funkcji $\dfrac{1}{1-z}$ w szereg geometryczny.

§ 16.15. FUNKCJE MEROMORFICZNE I RESIDUA FUNKCJI

Funkcję $f(z)$ nazywamy *meromorficzną w zbiorze otwartym* (w szczególności w obszarze) G, jeżeli

1° dla każdego punktu $z_0 \in G$ można znaleźć takie sąsiedztwo $0<|z-z_0|<R$ punktu z_0, w którym funkcja $f(z)$ jest holomorficzna,

2° funkcja $f(z)$ w zbiorze G nie ma punktów istotnie osobliwych (może natomiast posiadać bieguny).

Można wykazać, że każda funkcja meromorficzna na całej płaszczyźnie domkniętej (a więc musi także być takie sąsiedztwo $r<|z|<\infty$ punktu ∞, w którym $f(z)$ jest holomorficzna) jest funkcją wymierną, czyli ilorazem dwóch wielomianów.

Oczywiste jest, że także odwrotnie każda funkcja wymierna jest meromorficzna na całej płaszczyźnie domkniętej.

Jeżeli dwie funkcje f i g są meromorficzne w zbiorze otwartym G, to ich suma, różnica, iloczyn i iloraz są również funkcjami meromorficznymi w zbiorze G.

Zauważmy, że jeżeli funkcja f jest meromorficzna w zbiorze otwartym G, to jej bieguny nie mogą mieć punktu skupienia w G (mogą natomiast mieć punkt skupienia na brzegu zbioru G), ponieważ wówczas nie istniałoby sąsiedztwo tego punktu skupienia, w którym funkcja byłaby holomorficzna.

Z definicji oraz tego, co zostało powiedziane w poprzednim paragrafie, wynika, że funkcja meromorficzna w zbiorze otwartym G jest rozwijalna w odpowiednio dobranym sąsiedztwie dowolnego punktu $z_0 \in G$ w szereg Laurenta (16.14.1). Współczynnik a_{-1} tego rozwinięcia nazywamy *residuum funkcji* $f(z)$ *w punkcie* z_0. Liczbę tę będziemy oznaczali symbolem $\operatorname{res}_{z_0} f$.

Mamy następujące twierdzenie:

(16.15.1) *Jeżeli funkcja* $f(z)$ *jest meromorficzna w obszarze* D, *którego brzeg* C *jest dodatnio zorientowaną krzywą regularną*, $f(z)$ *jest holomorficzną na* C *oraz ma w* D *skończoną liczbę biegunów* $z_1, z_2, \ldots, z_p$, *to*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname{res}_{z_k} f. \tag{16.15.1'}$$

Twierdzenie to ułatwia często obliczenie niektórych całek niewłaściwych.

Residuum funkcji w punkcie z_0 będącym biegunem pierwszego rzędu jest często wygodnie obliczać za pomocą wzoru

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} [(z-z_0) f(z)]. \tag{16.15.2}$$

Jeżeli zaś punkt z_0 jest biegunem m-krotnym (rzędu m) funkcji $f(z)$ meromorficznej w obszarze D, to residuum $f(z)$ w punkcie z_0 dane jest wzorem następującym:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)]. \tag{16.15.3}$$

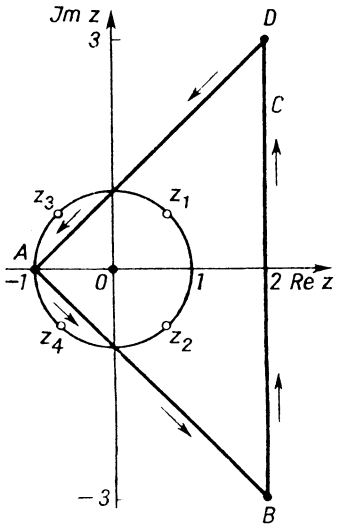
ZADANIE. 16.73. Obliczyć całkę $I=\int_C \frac{dz}{1+z^4}$, gdzie kontur C jest trójkątem o wierzchołkach $A(-1,0)$, $B(2,-3)$, $D(2,3)$.

Rozwiązanie. Funkcja podcałkowa ma bieguny jednokrotne w punktach (patrz rys. 16.11): $z_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$, $z_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)$, $z_3=\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1+i)$, $z_4=\frac{1}{2}\sqrt{2}(-1-i)$ Punkty z_1 i z_2 leżą wewnątrz konturu C (patrz § 16.12), natomiast punkty z_3 i z_4 na zewnątrz konturu C. Obliczamy wobec tego kolejno residua funkcji $f(z)$ w punktach z_1 i z_2 na podstawie wzoru (16.15.2). Mamy

$$\operatorname{res}_{z_1}\frac{1}{1+z^4}=\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{1+z^4}=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{(1+z^4)'}=$$

$$=\lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{4[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)]^3},$$

$$\operatorname{res}_{z_2}\frac{1}{1+z^4}=\lim_{z\to z_2}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{4[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)]^3}.$$



Rys. 16.11

Na podstawie wzoru (16.15.1') mamy więc

$$I=2\pi i\left\{\frac{1}{4[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)]^3}+\frac{1}{4[\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)]^3}\right\}=-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

Uwaga. W podanych rachunkach wykorzystaliśmy fakt, że:

(16.15.4) *Jeżeli* $W(z_1)=0$, *to* $\lim_{z\to z_1}\frac{W(z)}{z-z_1}=W'(z_1)$, *o ile pochodna* $W'(z_1)$ *istnieje.*

ZADANIE 16.74. Obliczyć całkę

$$V=\int_C \frac{e^z}{(z-1)^4}\,dz,$$

gdzie kontur C jest okręgiem o środku w punkcie $1+i$ i promieniu 2.

Rozwiązanie. Funkcja podcałkowa ma w punkcie $z=1$ biegun 4-krotny. Ponieważ punkt ten leży wewnątrz konturu C, obliczamy residuum funkcji podcałkowej w tym punkcie na podstawie wzoru (16.15.3). Mamy

$$\operatorname{res}_1\frac{e^z}{(z-1)^4}=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^4\frac{e^z}{(z-1)^4}\right]'''=\frac{1}{6}\lim_{z\to 1}e^z=\frac{1}{6}e.$$

A zatem $V=2\pi i\cdot\frac{1}{6}e=\frac{1}{3}\pi e i$.

ZADANIE 16.75. Obliczyć całkę

$$I=\int_C \frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{1+z}\,dz,$$

gdzie kontur C jest okręgiem o środku w punkcie 0 i promieniu równym 2.

Rozwiązanie. Funkcja podcałkowa ma w punkcie $z_1=-1$ biegun pierwszego rzędu, a w punkcie $z_2=0$ punkt istotnie osobliwy. Oba te punkty osobliwe funkcji podcałkowej leżą wewnątrz konturu C. Wobec tego obliczamy kolejno residua funkcji podcałkowej w tych punktach.

Dla obliczenia residuum w punkcie z_1 stosujemy wzór (16.15.2); mamy

$$\operatorname{res}_{-1}\frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{1+z}=\lim_{z\to -1}\exp\left(\frac{1}{z}\right)=e^{-1}.$$

Aby znaleźć residuum funkcji podcałkowej w punkcie istotnie osobliwym $z=0$, będziemy się starali obliczyć współczynnik a_{-1} rozwinięcia tej funkcji na szereg Laurenta w pierścieniu $0<|z|<1$. W tym celu zauważmy, że dla $|z|>0$

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right)=1+\frac{1}{z}+\ldots+\frac{1}{n!\,z^n}+\ldots,$$

a dla $|z|<1$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots,$$

czyli w pierścieniu $0<|z|<1$ oba szeregi są bezwzględnie zbieżne.

Stosując podobne rozumowanie, jak przy mnożeniu szeregów w sensie Cauchy'ego (patrz § 16.9), znajdujemy, że szukany współczynnik a_{-1} szeregu Laurenta iloczynu funkcji, których rozwinięcie napisaliśmy powyżej, jest równy

$$a_{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}=1-e^{-1}, \quad \text{czyli} \quad \operatorname{res}_0\frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{1+z}=1-e^{-1}.$$

Ostatecznie więc na podstawie (16.15.1') $I=2\pi i$.

ZADANIE 16.76. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx \qquad (m>0,\ a>0).$$

Rozwiązanie. Rozważmy funkcję zespoloną zmiennej zespolonej $f(z)=\dfrac{e^{imz}}{z^2+a^2}$; przyjmujemy kontur całkowania C_R złożony z odcinka osi rzeczywistej $\langle -R, R\rangle$ i półokręgu o środku w 0 i promieniu R położonego w płaszczyźnie $\operatorname{Im} z\geqslant 0$. Funkcja $f(z)$

ma bieguny jednokrotnie w punktach $z_1=ai$, $z_2=-ai$. Jeżeli $R>a$, to wewnątrz konturu całkowania leży z_1. Mamy stosując (16.15.4):

$$\operatorname{res}_{ai} f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{e^{imz}}{2z}=\frac{e^{-ma}}{2ai},$$

skąd

$$\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}\,dz=2\pi i\,\frac{e^{-ma}}{2ai}=\frac{\pi}{a}e^{-ma}.$$

Z drugiej strony, $\int_{C_R}=\int_{\langle -R,R\rangle}+\int_{\Gamma_R}$, gdzie Γ_R oznacza półokrąg o środku 0 i promieniu R, tzn. $z=Re^{it}$, $0\leqslant t\leqslant\pi$. Obliczamy

$$\int_{\langle -R,R\rangle}\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}\,dz=\int_{-R}^{R}\frac{\cos mz}{z^2+a^2}\,dz+i\int_{-R}^{R}\frac{\sin mz}{z^2+a^2}\,dz=\int_{-R}^{R}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx,$$

ponieważ druga całka znika wobec nieparzystości funkcji podcałkowej i symetrii przedziału całkowania. Zatem

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\langle -R,R\rangle}\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx.$$

Wykażemy, że $\int_{\Gamma_R}(\ldots)\to 0$, gdy $R\to\infty$. Istotnie, ponieważ

$$\int_{\Gamma_R}\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}\,dz=\int_0^{\pi}\frac{e^{im\,Re^{it}}}{R^2e^{2it}+a^2}\,iRe^{it}dt=\int_0^{\pi}\frac{e^{im\,R(\cos t+i\sin t)}}{R^2e^{2it}+a^2}\,iRe^{it}dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{e^{-mR\sin t}e^{imR\cos t}}{R^2e^{2it}+a^2}\,iRe^{it}dt.$$

Zatem, wykorzystując związek $|e^z|=e^{\operatorname{Re} z}$ oraz $|z_1+z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|$, otrzymujemy

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}\,dz\right|\leqslant\int_0^{\pi}\frac{e^{-mR\sin t}}{R^2-a^2}\,R\,dt\leqslant\frac{\pi R}{R^2-a^2}\to 0,\quad\text{gdy}\quad R\to\infty.$$

Z równości $\int_{C_R}=\frac{\pi}{a}e^{-ma}=\int_{\langle -R,R\rangle}+\int_{\Gamma_R}$ przechodząc do granicy przy $R\to\infty$, otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{a}e^{-ma},$$

skąd wobec parzystości funkcji podcałkowej mamy

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}e^{-ma}.$$

Zadania

16.77. Obliczyć całkę

$$\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2+4)}\,dz,$$

gdzie kontur C jest okręgiem o środku w punkcie $z=i$ i promieniu $r=2$.

16.78. Obliczyć całkę

$$\int_C \frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}\,dz,$$

gdzie kontur C jest okręgiem w ośrodku w punkcie $z=\frac{1}{2}$ i promieniu $r=1$.

16.79. Obliczyć całkę

$$\int_C \frac{dz}{(z^4-a^4)(z+3a)},$$

gdzie kontur C jest asteroidą $x^{2/3}+y^{2/3}=(2a)^{2/3}$, $a>0$.

16.80. Wykazać, że

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+13x^2+36}\,dx=\frac{\pi}{10}.$$

16.81. Wykazać, że

$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{2e}.$$

§ 16.16. LOGARYTMY I POTĘGI LICZB ZESPOLONYCH. GAŁĄŹ JEDNOZNACZNA FUNKCJI. LOGARYTM ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

Przy logarytmach liczb zespolonych jako zasadę logarytmu przyjmujemy zawsze liczbę e.

Przez *logarytm liczby zespolonej* a rozumiemy każdą taką liczbę zespoloną b, dla której zachodzi związek $e^b=a$. Chcąc więc znaleźć logarytm a musimy znaleźć wszystkie rozwiązania równania

(16.16.1) $$e^z=a.$$

Równanie (16.16.1) nie ma rozwiązania, gdy $a=0$. Gdyby bowiem $e^b=0$ to wobec równości $e^{-b}e^b=1$ otrzymalibyśmy $e^{-b}\cdot 0=1$, co nie jest możliwe, ponieważ e^{-b} musiałoby być nieskończone.

Przy każdym innym a równanie (16.16.1) (patrz § 16.10) ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci

$$\log a=\operatorname{Log}|a|+i\operatorname{Arg}a+2k\pi i, \tag{16.16.2}$$

gdzie $\operatorname{Log}|a|$ oznacza liczbę rzeczywistą, będącą logarytmem liczby rzeczywistej $|a|$, $\operatorname{Arg}a$ jest tzw. *argumentem głównym* liczby zespolonej a spełniającym nierówność $0\leqslant \operatorname{Arg}a<2\pi$, k jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, ujemną lub zerem. Przez *logarytm główny* liczby a rozumiemy

$$\operatorname{Log}a=\operatorname{Log}|a|+i\operatorname{Arg}a. \tag{16.16.3}$$

PRZYKŁAD 1. Mamy

$$\operatorname{Log}i=\tfrac{1}{2}\pi i, \quad \log i=(2k+\tfrac{1}{2})\pi i, \quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Przez *potęgę* a^b przy dowolnych dwóch liczbach zespolonych a i b rozumiemy

$$a^b=e^{b\log a}. \tag{16.16.4}$$

PRZYKŁAD 2. Mamy

$$i^i=e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi},$$

czyli każda wartość potęgi i^i jest liczbą rzeczywistą.

Niech $F(z)$ będzie funkcją zespoloną zmiennej zespolonej z określoną w obszarze D.

Gałęzią jednoznaczną funkcji $\log F(z)$ nazywamy każdą funkcję $L(z)$ skończoną i ciągłą w obszarze D, która dla każdego $z\in D$ spełnia równość

$$\exp L(z)=F(z). \tag{16.16.5}$$

Jeżeli w szczególności $F(z)=z$, to mówimy o gałęzi jednoznacznej funkcji logarytmu z.

Mamy następujące twierdzenia:

(16.16.6) *W każdym obszarze jednospójnym nie zawierającym ani* 0, *ani* ∞ *istnieje nieskończenie wiele gałęzi jednoznacznych funkcji* $\log z$. *Gałąź taką możemy wyrazić za pomocą całki krzywoliniowej*

$$L(z)=\int_{\overset{\frown}{z_0z}} u^{-1}du+\log z_0, \tag{16.16.6'}$$

gdzie całka jest brana wzdłuż dowolnego łuku regularnego o początku w punkcie z_0, *a końcu w punkcie* z, *i leżącego całkowicie w obszarze* D.

Całka występująca we wzorze (16.16.6') nie zależy od drogi całkowania, ponieważ funkcja podcałkowa u^{-1} jest w obszarze D holomorficzna (patrz § 16.13).

Wobec tego, że $\log z_0$ ma nieskończenie wiele wartości, wzór (16.16.6') określa nieskończenie wiele jednoznacznych gałęzi funkcji $\log z$.

(16.16.7) *Jeżeli* $F(z)$ *jest funkcją holomorficzną w obszarze jednospójnym* D, *która w żadnym*

punkcie tego obszaru nie równa się zeru, to funkcja

$$H(z)=\int_{z_0 z}\frac{F'(u)}{F(u)}\,du+\log F(z_0) \tag{16.16.7'}$$

jest jednoznaczną gałęzią funkcji $\log F(z)$. *O drodze całkowania zakładamy to samo, co w poprzednim twierdzeniu.*

Funkcja $H(z)$ jest holomorficzna w D oraz

$$H'(z)=\frac{F'(z)}{F(z)}. \tag{16.16.8}$$

Funkcję $H(z)$ oznaczamy często symbolem tym samym co $\log F(z)$ pomimo tego, że pojęcia te są różne.

Iloraz $\dfrac{F'(z)}{F(z)}$ nazywamy *pochodną logarytmiczną funkcji* $F(z)$.

Zadania

Obliczyć (zad. 16.82 - 16.86);

16.82. $\operatorname{Log}(-1)$. **16.83.** $\log(-i)$. **16.84.** i^{-i}.

16.85. $(-i)^i$. **16.86.** $(-1)^i$.

§ 16.17. FUNKCJE ZMIENNEJ ZESPOLONEJ JEDNOKROTNE I WIELOKROTNE PRZEDŁUŻENIA ANALITYCZNE

Funkcję f nazywamy *jednokrotną* w zbiorze D (por. § 16.1), jeżeli dla dwóch różnych wartości z_1 i z_2 należących do D jest $f(z_1)\neq f(z_2)$, czyli jeżeli funkcja f jest różnowartościowa w zbiorze D. Funkcję meromorficzną i jednokrotną nazywamy *jednolistną*.

PRZYKŁAD 1. Funkcjami jednokrotnymi na całej płaszczyźnie Gaussa (domkniętej) są funkcje z, $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{z-1}{z+1}$. Można wykazać, że każda funkcja meromorficzna jednokrotna (jednolistna) na całej płaszczyźnie Gaussa jest postaci $\dfrac{az+b}{cz+d}$.

PRZYKŁAD 2. Wykażemy, że funkcja e^z jest jednokrotna w pasie $0\leqslant \operatorname{Im} z<2\pi$.

Istotnie przypuśćmy, że $\exp z_1=\exp z_2$. Wówczas na podstawie (16.10.8) i (16.10.10) otrzymujemy $\exp(z_1-z_2)=1$, a zatem na podstawie (16.10.14) mamy $z_1-z_2=2k\pi i$, gdzie k może być dowolną liczbę całkowitą. Jeżeli $k=0$, to $z_1=z_2$, a jeżeli $k\neq 0$, to z_1 i z_2 nie mogą jednocześnie należeć do rozważanego pasa.

PRZYKŁAD 3. Wykażemy, że funkcja $z+\frac{1}{2}z^2$ jest jednolistna w kole $|z|<1$.

Istotnie, weźmy pod uwagę równanie

$$z+\tfrac{1}{2}z^2=w, \tag{1}$$

gdzie w jest dowolnie ustaloną liczbą zespoloną. Z algebry wiemy, że równanie kwadratowe (1) ma dwa rozwiązania, które oznaczmy symbolam z_1 i z_2. Ze wzoru Viète'a, który jest prawdziwy także w przypadku pierwiastków zespolonych, wynika, że $z_1+z_2=-2$, skąd

$$|z_1+z_2|=2. \tag{2}$$

Przypuśćmy teraz, że oba pierwiastki z_1 i z_2 równania (1) leżą w kole $|z|<1$. Wówczas stosując prawo trójkąta dla liczb zespolonych otrzymalibyśmy $|z_1+z_2|<2$, co byłoby sprzeczne z równością (2). Metodą dowodu nie wprost udowodniliśmy więc, że badana funkcja jest jednokrotna w kole $|z|<1$.

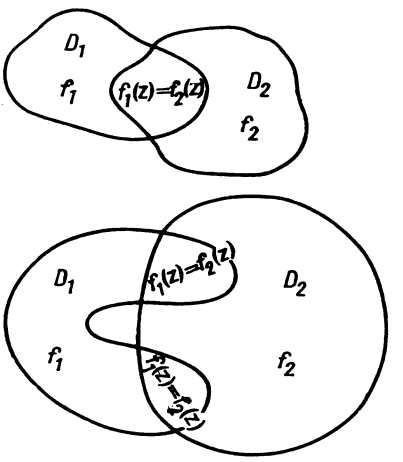
Funkcję f nazywamy *p-krotną* w zbiorze D, jeżeli każdą swoją wartość $w=f(z)$, $z\in D$, przyjmuje co najwyżej p razy, a są takie wartości, które przyjmuje dokładnie p razy.

PRZYKŁAD 4. Funkcją dwukrotną jest funkcja az^2+bz+c na całej płaszczyźnie, a funkcja e^z w pasie $0\leqslant \operatorname{Im} z<4\pi$ (patrz przykład 2).

Funkcję f nazywamy *nieskończenie wielokrotną* w zbiorze D, jeżeli istnieje co najmniej jedna liczba zespolona w_0 taka, że dla nieskończenie wielu z należących do D mamy $f(z)=w_0$.

PRZYKŁAD 5. Funkcje e^z, $\sin z$, $\cos z$ są nieskończenie wielokrotne na całej płaszczyźnie zespolonej.

Funkcję meromorficzną p-krotną nazywamy *funkcją p-listną*.



Rys. 16.12

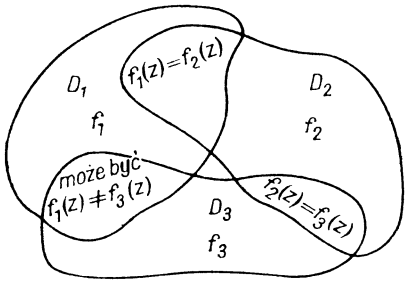
Niech będą dane dwa obszary D_1 i D_2 mające część wspólną nie pustą $D=D_1\cap D_2$ (patrz rys. 16.12) oraz dwie funkcje f_1 i f_2: funkcja f_1 holomorficzna w obszarze D_1 i f_2 holomorficzna w obszarze D_2. Jeżeli $f_1(z)=f_2(z)$ dla każdego $z\in D$, to mówimy że funkcja f_2 jest *bezpośrednim przedłużeniem analitycznym funkcji f_1 na obszar D_2* względnie, że f_1 jest *bezpośrednim przedłużeniem analitycznym funkcji f_2 na obszar D_1*.

Z tego, co zostało powiedziane w §§ 16.13 i 16.8, wynika, że jeżeli funkcje f_2 i f_3 są przedłużeniami analitycznymi na obszar D_2 funkcji f_1 holomorficznej w obszarze D_1, to $f_2(z)=f_3(z)$ dla każdego $z\in D_2$. Tak więc funkcja holomorficzna w obszarze D_1 może mieć tylko jedno przedłużenie analityczne na obszar D_2 (przy założeniu, że $D_1\cap D_2\neq\emptyset$).

PRZYKŁAD 6. Funkcja $\dfrac{1}{1-z}$ jest przedłużeniem na całą płaszczyznę bez punktu $z=1$ funkcji będącej sumą szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ zbieżnego w kole jednostkowym $|z|<1$.

Niech teraz będzie dany ciąg funkcji $f_1, f_2, \ldots, f_m$ odpowiednio holomorficznych w obszarach $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Zakładamy przy tym, że każdy następny obszar z poprzedzającym go obszarem ma część wspólną niepustą oraz że każda następna funkcja jest bezpośrednim przedłużeniem analitycznym poprzedniej. Wówczas mówimy, że funkcja f_m jest *pośrednim*

przedłużeniem analitycznym funkcji holomorficznej f_1 na obszar D_m. Jeżeli obszar D_m i wyjściowy D_1 mają część wspólną niepustą D^*, to w tej części D^* może być $f_1(z) \neq f_m(z)$ (patrz rys. 16.13).



Rys. 16.13

PRZYKŁAD 7. Jeżeli określimy funkcje $f_1(z)=f_2(z)=f_3(z)=\sqrt{|z|}(\cos(\frac{1}{2}\operatorname{Arg} z)+i\sin(\frac{1}{2}\operatorname{Arg} z))$, gdzie $0 \leqslant \operatorname{Arg} z < 2\pi$, a obszary D_1, D_2, D_3, D_4 odpowiednio jako otwarte półpłaszczyzny $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Im} z < 0$ $\operatorname{Re} z > 0$, to funkcja $f_4(z)$ będąc bezpośrednim przedłużeniem analitycznym funkcji $f_3(z)$ a pośrednim przedłużeniem funkcji $f_1(z)$ różni się w obszarze $D_4 \cap D_1$, tj. w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej od $f_1(z)$, ponieważ $\operatorname{Arg} f_4(z) - \operatorname{Arg} f_1(z) = \pi$.

Funkcje $f_1(z)$ i $f_4(z)$ są w pierwszej otwartej ćwiartce płaszczyzny zespolonej różnymi gałęziami jednoznacznymi funkcji analitycznej dwukrotnej $\sqrt{z}$.

Zadania

16.87. Ocenić krotność funkcji $z+z^2$ a) w kole $|z|<1$, b) w kole $|z|<\frac{1}{2}$.

16.88. Ocenić krotność funkcji e^z w pasie $0 \leqslant |\operatorname{Im} z| < 6\pi$.

16.89. Ocenić krotność funkcji $\sin z$ w pasie $0 \leqslant \operatorname{Re} z < 6\pi$.

16.90. Ocenić krotność funkcji $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ na całej płaszczyźnie zespolonej.

§ 16.18. ELEMENTY ANALITYCZNE. PRZEDŁUŻENIA ANALITYCZNE WZDŁUŻ KRZYWEJ. FUNKCJE ANALITYCZNE WIELOZNACZNE (WIELOWARTOŚCIOWE) POWIERZCHNIE RIEMANNA

Przez *element analityczny* będziemy rozumieli funkcję zmiennej z holomorficzną, określoną jako suma szeregu potęgowego

$$P(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{16.18.1}$$

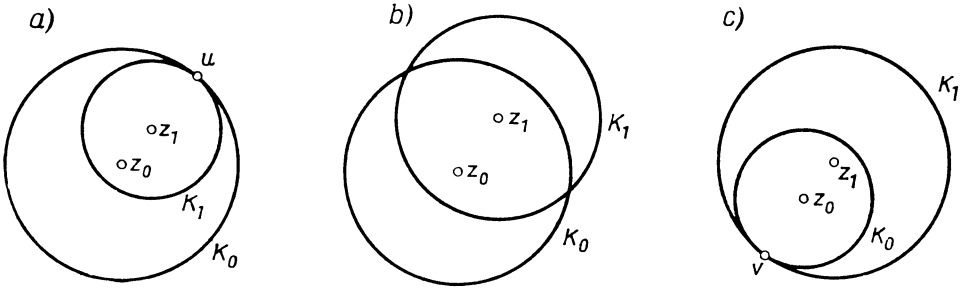
rozpatrywanej w kole zbieżności $K(z_0)$ szeregu (16.18.1). Punkt z_0 nazywamy *środkiem elementu analitycznego*.

Rozpatrzmy teraz możliwości utworzenia elementów analitycznych będących bezpośrednimi przedłużeniami analitycznymi elementu analitycznego (16.18.1). Niech punkt

z_1 będzie dowolnym elementem koła otwartego $K(z_0)$ (rys. 16.14). Rozwińmy funkcję $P(z, z_0)$ w szereg potęgowy w otoczeniu punktu $z=z_1$ i oznaczmy sumę otrzymanego szeregu przez $P(z, z_1)$. Mamy wówczas

$$P(z, z_1)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_1)^n. \tag{16.18.2}$$

Niech symbol $K_1(z_1)$ lub krótko K_1 oznacza koło zbieżności szeregu (16.18.2). Można udowodnić, że mogą zachodzić trzy przypadki (por. rysunek 16.14):



Rys. 16.14

1° Koło K_1 leży całkowicie wewnątrz koła K_0 będąc do niego styczne w punkcie u; punkt u jest punktem osobliwym zarówno funkcji (16.18.1) jak i funkcji (16.18.2); w przypadku tym nie ma elementu analitycznego o środku w punkcie z_1 będącego bezpośrednim przedłużeniem elementu analitycznego (16.18.1).

2° Koła K_0 i K_1 krzyżują się, to znaczy mają część wspólną niepustą, ale żadne z nich nie jest zawarte w drugim.

3° Koło K_0 leży całkowicie w kole K_1 będąc do niego styczne w punkcie v; w tym przypadku również punkt v jest punktem osobliwym szeregu czy funkcji (16.18.1) jak i szeregu (16.18.2).

W przypadku 2° i 3° funkcja (16.18.2) jest bezpośrednim przedłużeniem analitycznym funkcji (16.18.1) na koło K_1.

Można udowodnić, że na brzegu koła zbieżności dowolnego szeregu (16.18.1) znajduje się co najmniej jeden punkt osobliwy.

PRZYKŁAD 1. Punkt $z=1$ dla szeregu geometrycznego $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ jest jedynym punktem osobliwym na brzegu $|z|=1$ koła zbieżności $|z|<1$ tego szeregu.

Można udowodnić, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}=1+z^2+z^4+z^8+\ldots \tag{16.18.3}$$

ma koło zbieżności $|z|<1$ i że każdy punkt leżący na jego brzegu, czyli na okręgu $|z|=1$, jest punktem osobliwym szeregu (16.18.3). W związku z tym mówimy, że szereg (16.18.3) jest nieprzedłużalnym, koło $|z|<1$ naturalnym obszarem istnienia funkcji analitycznej (16.18.3), a okrąg $|z|=1$ brzegiem naturalnym funkcji (16.18.3).

Gdy promień zbieżności szeregu (16.18.1) $R=+\infty$, wtedy punktem osobliwym jest ∞.

Określimy teraz przedłużenie analityczne elementu (16.18.1) $P(z, z_0)$ wzdłuż krzywej C, danej przez równanie

$$z=\varphi(t), \quad \text{gdzie} \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \quad \varphi(t_0)=z_0, \tag{16.18.4}$$

gdzie φ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej t, ciągłą i jednokrotną dla $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Rodzinę W elementów analitycznych

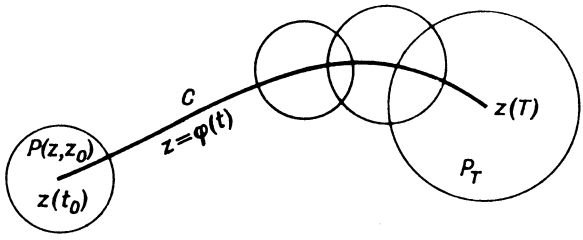
$$P_t=P(z, \varphi(t)), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{16.18.5}$$

będziemy nazywali *łańcuchem elementów analitycznych* wzdłuż krzywej (16.18.4), jeżeli

1° dla każdego t, spełniającego nierówność $t_0 \leqslant t \leqslant T$, punkt $z(t)$ krzywej C jest środkiem elementu analitycznego P_t należącego do rodziny W,

2° każdemu $t \in \langle t_0, T\rangle$ odpowiada takie d, że gdy $t' \in \langle t_0, T\rangle$ oraz $|t'-t|<d$, to element $P_{t'}$ jest bezpośrednim przedłużeniem analitycznym elementu P_t.

Wówczas element $P_T(z, z(T))$ nazywamy *przedłużeniem analitycznym elementu* (16.18.1) *wzdłuż krzywej* C (patrz rys. 16.15).



Rys. 16.15

Można udowodnić, że każdy element analityczny ma co najwyżej jedno przedłużenie analityczne wzdłuż krzywej wychodzącej z jego środka.

Pełną funkcją analityczną w obszarze D nazywamy każdą niepustą rodzinę W elementów analitycznych o ośrodkach leżących w obszarze D taką, że

1° każdy element rodziny W jest przedłużeniem analitycznym wzdłuż pewnej krzywej leżącej w obszarze D każdego innego elementu należącego do W,

2° każdy element analityczny o środku w obszarze D będący przedłużeniem analitycznym wzdłuż krzywej leżącej w D elementu W sam też należy do W.

Jeżeli obszarem D jest cała płaszczyzna, to mówimy wprost o *funkcji analitycznej*.

Funkcja analityczna jest więc maksymalną rodziną elementów analitycznych, z których każdy jest przedłużeniem analitycznym każdego innego.

Tak określona funkcja analityczna jest na ogół wieloznaczna.

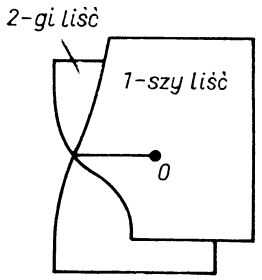
Funkcja odwrotna do funkcji analitycznej p-krotnej jest funkcją analityczną p-wartościową.

Aby sprowadzić badanie funkcji analitycznej wieloznacznej do jednoznacznej, określa się zbiór zwany *powierzchnią Riemanna* tej funkcji. Dokładne opisanie tego zbioru wykracza

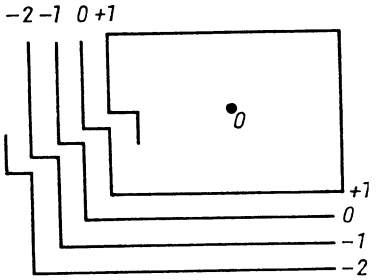
poza ramy niniejszego podręcznika. Dlatego podamy tylko najważniejsze własności funkcji analitycznej na odpowiadającej jej powierzchni Riemanna oraz podamy niektóre modele powierzchni Riemanna. A oto własności:

(16.18.6) *Funkcja analityczna jest jednoznaczna na swojej powierzchni Riemanna.*

(16.18.7) *Istnieje odwzorowanie powierzchni Riemanna w płaszczyznę zespoloną zwane rzutowaniem, przyporządkujące elementowi u powierzchni Riemanna liczbę zespoloną z_u; element u identyfikujemy matematycznie z jego rzutem z_u.*



Rys. 16.16



Rys. 16.17

Dzięki tej identyfikacji powierzchnia Riemanna jest lokalnie także przestrzenią metryczną, przy czym odległość $d(u, v) = |z_u - z_v|$.

(16.18.8) *Dla każdego u leżącego na powierzchni Riemanna istnieje taki element analityczny P_u należący do zbioru W określającego funkcję analityczną f, że $f(u) = P_u(z_u)$.*

PRZYKŁAD 2. Modelem powierzchni Riemanna funkcji analitycznej dwuwartościowej $\sqrt{z}$ jest dwulistna powierzchnia (rys. 16.16), którą tworzymy z dwóch płaszczyzn zespolonych rozcinając je wzdłuż półosi rzeczywistej $\operatorname{Re} z$ dodatniej i sklejając następnie w ten sposób, że „przekraczając" półoś rzeczywistą dodatnią $\operatorname{Re} z$ przechodzimy z jednego liścia powierzchni Riemanna na drugi. Na jednym liściu wartości funkcji $\sqrt{z}$ określamy równe

$$\sqrt{|z|}(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \operatorname{Arg} z, \tag{1}$$

a na drugim liściu określamy $\sqrt{z}$ — równe

$$\sqrt{|z|}(\cos(\pi+\alpha) + i\sin(\pi+\alpha)). \tag{2}$$

PRZYKŁAD 3. Modelem powierzchni Riemanna funkcji nieskończenie wielowartościowej $\log z$ jest powierzchnia mająca nieskończenie wiele liści. Każdy z tych liści jest utworzony z płaszczyzny zespolonej i jest rozcięty wzdłuż półosi rzeczywistej $\operatorname{Re} z$. Liście są ponumerowane liczbami całkowitymi i sklejone w ten sposób, że przy przekraczaniu półosi rzeczywistej przechodzi się z liścia o numerze n na liść o numerze $n+1$ względnie $n-1$ zależnie od tego, czy kierunek poruszania jest zgodny z ruchem wskazówek zegara czy do niego przeciwny (rys. 16.17). Wartości funkcji $\log z$ na poszczególnych liściach powierzchni Riemanna różnią się o wielokrotność $2\pi i$.

Rozdział XVII

TRANSFORMACJA LAPLACE'A I JEJ ZASTOSOWANIA

§ 17.1. CAŁKA LAPLACE'A

Całką Laplace'a funkcji f nazywamy całkę niewłaściwą postaci

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s), \tag{17.1.1}$$

przy czym o funkcji $f(t)$ zakładamy, że jest funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywiste t określoną dla każdej wartości $t>0$ i przedziałami ciągłą; $s=x+iy$ jest zmienną zespoloną.

Funkcję e^{-st} nazywamy *jądrem całki Laplace'a* (17.1.1).

Ponieważ całka (17.1.1) jest całką niewłaściwą, więc nie dla wszystkich funkcji spełniających podane warunki jest ona zbieżna, np. dla funkcji $f(t)=\exp(t^2)$ jest rozbieżna. Dla innych funkcji całka (17.1.1) jest zbieżna przy pewnych wartościach s, przy innych zaś jest rozbieżna, jak wykaże to następujące zadanie:

ZADANIE 17.1. Obliczyć całkę Laplace'a funkcji

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad t\leqslant 0,\\ \exp(at) & \text{dla} \quad t>0,\end{cases} \tag{1}$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą.

Rozwiązanie. Mamy

$$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt=\int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt=\lim_{u\to+\infty}\int_0^{u} e^{(a-s)t}dt=$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^{u}=\frac{1}{a-s}\lim_{u\to\infty}e^{(a-s)u}-\frac{1}{a-s}.$$

Zauważmy, że $e^{(a-s)u}=e^{(a-x)u}e^{-iyu}$, przy czym $|e^{-iyu}|=|\cos yu-i\sin yu|=1$, zatem $|e^{(a-s)u}|=e^{(a-x)u}$. Jeśli więc $x=\operatorname{Re}s<a$, to $\lim\limits_{u\to+\infty}e^{(a-x)u}=+\infty$ i całka Laplace'a jest rozbieżna; jeśli zaś $x>a$, to $\lim\limits_{u\to+\infty}e^{(a-x)u}=0$, więc całka Laplace'a funkcji (1) istnieje i jest równa

$$F(s)=\frac{1}{s-a}, \qquad \operatorname{Re}s>a.$$

Obszarem zbieżności całki $F(s)$ badanej funkcji (1). jest prawa płaszczyzna ograniczona prostą $\operatorname{Re} s=x=a$; dla punktów zaś płaszczyzny zmiennej zespolonej $s=x+iy$, dla których $\operatorname{Re} s=x<a$, tzn. dla punktów lewej półpłaszczyzny, całka Laplace'a funkcji (1) jest rozbieżna. Odciętą $x=a$ nazywamy *odciętą zbieżności.*

§ 17.2. TRANSFORMACJA LAPLACE'A

Funkcje $f(t)$, dla których istnieje całka (17.1.1), nazywamy *oryginałami*, a funkcje $F(s)$ odpowiadające im w wyniku obliczenia całki Laplace'a nazywamy *transformatami Laplace'a* lub *obrazami laplasowskimi* funkcji $f(t)$, a samą operację — *transformacją Laplace'a* (lub *przekształceniem Laplace'a*); oznaczamy ją symbolem $\mathfrak{L}$.

Na stronicy 380 podajemy tablicę transformat Laplace'a $\mathfrak{L}\{f(t)\}=F(s)$ oraz odpowiadających im oryginałów. W zastosowaniach praktycznych zazwyczaj nie korzysta się ze wzoru (17.1.1), lecz z gotowych tablic, podobnych do podanej tablicy.

§ 17.3. TRANSFORMACJA ODWROTNA LAPLACE'A

Aby zapewnić istnienie i różnowartościowość transformacji Laplace'a, a tym samym jej odwracalność w pewnej klasie funkcji zmiennej zespolonej $F(s)$, będziemy ją stosować wyłącznie w pewnej klasie K funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t spełniających następujące warunki:

1. $f(t)=0$ dla $t<0$; warunek ten często formułujemy w postaci: funkcja jest wygaszona dla ujemnych wartości t.

2. Pochodna $f'(t)$ dla $t>0$ w każdym skończonym przedziale jest funkcją przedziałami ciągłą; w ewentualnych punktach nieciągłości $f'(t)$ wartości funkcji określamy jako równe średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

3 Moduł funkcji $f(t)$ jak i jej pochodnej $f'(t)$ jest ograniczony przez funkcję wykładniczą, tzn.

$$|f(t)|<Me^{\alpha t}, \quad |f'(t)|<Me^{\alpha t}, \tag{17.3.1}$$

gdzie M, α są pewnymi stałymi dodatnimi.

Założenia te dla większości funkcji elementarnych są spełnione.

Będziemy zapisywali w dalszym ciągu

$$\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t) \quad \text{jeżeli} \quad \mathfrak{L}\{f(t)\}=F(s). \tag{17.3.2}$$

Przekształcenie $\mathfrak{L}^{-1}$ nazywamy *transformacją odwrotną* (*przekształceniem odwrotnym*) *Laplace'a* względem *transformacji prostej* (*przekształcenia prostego*) $\mathfrak{L}$.

Nr	Oryginał $f(t)$, $t>0$	Obraz $F(s)=\mathfrak{L}\{f(t)\}$
1	1	$\frac{1}{s}$, $\mathrm{Re}\, s>0$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$, $\mathrm{Re}\, s>\mathrm{Re}\, a$
3	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}\, s>0$
4	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}\, s>0$
5	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$, , $\mathrm{Re}\, s>\lvert\omega\rvert$
6	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$, $\mathrm{Re}\, s>\lvert\omega\rvert$
7	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$, $\mathrm{Re}\, s>\mathrm{Re}\, a$
8	$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, $\mathrm{Re}\, s>0$
9	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $\mathrm{Re}\, s>a$
10	$\frac{t}{2\omega}\sin \omega t$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$, $\mathrm{Re}\, s>0$
11	$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}\, s>a$
12	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}\, s>a$
13	$e^{at}\cosh \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$
14	$e^{at}\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$

Dowodzi się, że transformacja odwrotna Laplace'a w rozpatrywanej przez nas klasie funkcji wyraża się wzorem

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{u\to+\infty}\int_{x-iu}^{x+iu}F(s)e^{st}ds. \tag{17.3.3}$$

Można udowodnić, że wyrażenie po prawej stronie ma sens i nie zależy od wartości x, byleby było $x>\alpha$, gdzie α jest stałą występującą w założeniu 3.

Również i w tym przypadku w praktycznych zastosowaniach nie korzysta się ze wzoru (17.3.3), a posługuje się gotowymi tablicami transformat.

§ 17.4. LINIOWOŚĆ TRANSFORMACJI LAPLACE'A

Z definicji transformacji Laplace'a wynikają następujące związki:

$$\mathfrak{L}\{af(t)\}=a\mathfrak{L}\{f(t)\},\quad a\ -\ \text{dowolna stała}, \tag{17.4.1}$$

$$\mathfrak{L}\{f_1(t)+f_2(t)\}=\mathfrak{L}\{f_1(t)\}+\mathfrak{L}\{f_2(t)\}. \tag{17.4.2}$$

Wzór (17.4.1) mówi nam, że przekształcenie $\mathfrak{L}$ jest jednorodne, a wzór (17.4.2), że jest ono addytywne. Przekształcenie jednorodne i addytywne nazywamy przekształceniem liniowym.

Podobnie

$$\mathfrak{L}^{-1}\{aF(s)\}=a\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\},\quad a\ -\ \text{dowolna stała}, \tag{17.4.3}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\{F_1(s)+F_2(s)\}=\mathfrak{L}^{-1}\{F_1(s)\}+\mathfrak{L}^{-1}\{F_2(s)\}. \tag{17.4.4}$$

Ze wzorów (17.4.3) i (17.4.4) widać, że przekształcenie odwrotne $\mathfrak{L}^{-1}$ jest również liniowe.

ZADANIE 17.2. Znaleźć transformatę funkcji $f(t)=\sinh t$ dla $t>0$.

Rozwiązanie. Wiemy, że $\sinh t=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$. W zadaniu 17.1 wykazano, że $\mathfrak{L}\{e^{at}\}=1/(s-a)$. Otrzymamy więc

$$\mathfrak{L}\{\sinh t\}=\tfrac{1}{2}[\mathfrak{L}\{e^t\}-\mathfrak{L}\{e^{-t}\}]=\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right]=\frac{1}{s^2-1},\qquad \operatorname{Re}s>1.$$

Czytelnik porówna wynik ze wzorem ogólnym podanym w tablicy (wzór 5).

Zadania

Stosując własność liniowości $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ znaleźć na podstawie podanej na str. 380 tablicy transformaty Laplace'a następujących funkcji Kryłowa (są to całki szczególne równania różniczkowego $y^{(4)}-y=0$ opisującego nietłumione drgania swobodne belki o jednakowym przekroju) (17.3 - 17.6):

17.3. $\cosh t+\cos t$.

17.4. $\sinh t+\sin t$.

17.5. $\cosh t-\cos t$.

17.6. $\sinh t-\sin t$.

Znaleźć transformacje Laplace'a następujących funkcji $f(t)=0$ dla $t<0$, a dla $t\geqslant 0$ określonych wzorem (zad. 17.7 - 17.16):

17.7. $\sin^2 at$.

17.8. $\cos^2 at$.

17.9. $\cos at\cos bt$.

17.10. $\sin at\cos bt$.

17.11. $t\sinh at$.

17.12. $t^2\sin at$.

17.13. $e^{-t}\cosh t$.

17.14. $\sinh t-t$.

17.15. $t\cos at$.

17.16. $\frac{4}{3}e^{t}+\frac{2}{3}e^{-t}(3\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}t\sqrt{3}-2\cos\frac{1}{2}t\sqrt{3})$.

§ 17.5. TRANSFORMATA POCHODNEJ

Jeżeli nie tylko funkcja $f(t)$, ale i jej pochodna $f'(t)$ spełniają założenia 1 - 3 podane w § 17.3, to stosując wzór na całkowanie przez części, otrzymamy

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\}=\int_0^{\infty}f'(t)e^{-st}dt=[f(t)e^{-st}]_{t\to 0}^{t\to+\infty}+s\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt,$$

skąd

$$\mathfrak{L}\{f'(t)\}=s\mathfrak{L}\{f(t)\}-f(0^+), \tag{17.5.1}$$

gdzie $f(0^+)$ oznacza granicę prawostronną funkcji $f(t)$ w punkcie $t=0$.

Jeśli druga pochodna $f''(t)$ spełnia znowu założenia 1 - 3 z § 17.3, to stosując wzór (17.5.1) traktując przy tym drugą pochodną $f''(t)$ jako pochodną pierwszej pochodnej $f'(t)$, otrzymujemy

$$\mathfrak{L}\{f''(t)\}=s\mathfrak{L}\{f'(t)\}-f'(0^+);$$

stąd

$$\mathfrak{L}\{f''(t)\}=s^2\mathfrak{L}\{f(t)\}-sf(0^+)-f'(0^+). \tag{17.5.2}$$

Podobnie, stosując ten wzór z kolei do $f''(t)$ przy spełnieniu założeń 1 - 3 otrzymujemy

$$\mathfrak{L}\{f'''(t)\}=s^3\mathfrak{L}\{f(t)\}-s^2f(0^+)-sf'(0^+)-f''(0^+). \tag{17.5.3}$$

Rozumowanie to można kontynuować.

Zadanie

17.17. Znaleźć transformatę czwartej pochodnej $f^{(4)}(t)$ funkcji $f(t)$ równej zeru dla $t<0$ za pomocą transformaty funkcji $f(t)$ oraz wartości $f(0^+)$, $f'(0^+)$, $f''(0^+)$, $f'''(0^+)$.

§ 17.6. ZASTOSOWANIE TRANSFORMACJI LAPLACE'A DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH I UKŁADÓW RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Pokażemy na przykładach jak stosując transformację Laplace'a rozwiązuje się równania różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych (jednorodne albo niejednorodne) przy danych warunkach początkowych.

ZADANIE 17.18. Rozwiązać równanie

$$\frac{dy}{dt}+3y=5e^{2t} \tag{1}$$

przy warunku początkowym $y(0)=4$.

Rozwiązanie. Poddajemy obie strony równania (1) przekształceniu Laplace'a. Mamy

$$\mathfrak{L}\{y'\}+3\mathfrak{L}\{y\}=5\mathfrak{L}\{e^{2t}\},$$

skąd, wykorzystując wzór 2 tablicy na str. 380, mamy

$$s\mathfrak{L}\{y\}-f(0^+)+3\mathfrak{L}\{y\}=\frac{5}{s-2}. \tag{2}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób algebraiczne równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą $\mathfrak{L}\{y\}$. Podstawiamy $f(0^+)=4$ oraz wyznaczamy

$$\mathfrak{L}\{y\}=\left(\frac{5}{s-2}+4\right)\Big/(s+3), \quad \text{czyli} \quad \mathfrak{L}\{y\}=\frac{4s-3}{(s-2)(s+3)}.$$

Rozkładamy prawą stronę na sumę dwóch ułamków prostych

$$\frac{4s-3}{(s-2)(s+3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+3},$$

stąd

$$4s-3=A(s+3)+B(s-2).$$

Podstawiając $s=-3$ otrzymujemy $B=3$, a podstawiając $s=2$ otrzymujemy $A=1$. A więc

$$\mathfrak{L}\{y\}=\frac{1}{s-2}+\frac{3}{s+3}. \tag{3}$$

Na podstawie wzoru (2) otrzymujemy rozwiązanie $y=e^{2t}+3e^{-3t}$, spełniające warunek początkowy.

ZADANIE 17.19. Rozwiązać równanie

$$y''+4y'+4y=(\cos t+2\sin t)e^{-2t} \tag{1}$$

przy warunkach początkowych $y(0)=-1$, $y'(0)=1$.

Rozwiązanie. Zastosujemy obustronnie przekształcenia Laplace'a. Stosując wzory (17.5.1), (17.5.2) do lewej strony równania (1), otrzymujemy

$$s^2\mathfrak{L}\{y\}+s-1+4s\mathfrak{L}\{y\}+4+4\mathfrak{L}\{y\}=\mathfrak{L}\{e^{-2t}\cos t\}+2\mathfrak{L}\{e^{-2t}\sin t\}. \tag{2}$$

Z tablicy transformat Laplace'a odczytujemy

$$(3)\qquad (s^2+4s+4)\mathfrak{L}\{y\}=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}+\frac{2}{(s+2)^2+1}-s-3,$$

stąd wyznaczamy

$$(4)\qquad \mathfrak{L}\{y\}=-\frac{s^3+7s^2+16s+11}{(s+2)^2[(s+2)^2+1]}.$$

Prawą stronę rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{Cs+D}{(s+2)^2+1},$$

i po obustronnym pomnożeniu przez wspólny mianownik, otrzymamy

$$-s^3-7s^2-16s-11=A(s+2)[(s+2)^2+1]+B[(s+2)^2+1]+(Cs+D)(s+2)^2.$$

Przy $s=-2$ mamy $1=B$.

Przy $s=0$ będzie $-11=10A+5B+4D$.

Przy $s=1$ będzie $-35=30A+10B+9C+9D$.

Przy $s=-1$ będzie $-1=2A+2B-C+D$.

Z rozwiązania otrzymujemy $A=0$, $B=1$, $C=-1$, $D=-4$. Zatem

$$(5)\qquad \mathfrak{L}\{y\}=\frac{1}{(s+2)^2}-\frac{s+4}{(s+2)^2+1}.$$

Z tablicy na stronicy 380 przy $a=2$ odczytujemy te^{-2t} jako oryginał odpowiadający pierwszemu ułamkowi; dla odczytania z tablic oryginału odpowiadającego drugiemu ułamkowi wystarczy licznik jego $s+4$ przedstawić w postaci $s+4=(s+2)+2$ i ułamek rozłożyć na sumę dwóch ułamków, wtedy skorzystamy ze wzorów 11 i 12 tejże tablicy. Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie równania różniczkowego (1) w postaci

$$y=te^{-2t}-(\cos t+2\sin t)e^{-2t},$$

które spełnia warunki początkowe.

Metodę transformacji Laplace'a można również stosować do rozwiązywania układu równań różniczkowych zwyczajnych liniowych.

ZADANIE 17.20. Rozwiązać układ równań

$$(1)\qquad \begin{aligned} 3\frac{dy}{dt}-2\frac{dz}{dt}&=2y+3z,\\ \frac{dy}{dt}+4\frac{dz}{dt}&=-4y+z, \end{aligned}$$

przy warunkach początkowych $y(0)=0$, $z(0)=1$.

Rozwiązanie. Obie strony każdego z równań poddajemy przekształceniu Laplace'a; otrzymujemy

$$(2)\qquad \begin{aligned} 3s\mathfrak{L}\{y\}-2s\mathfrak{L}\{z\}+2&=2\mathfrak{L}\{y\}+3\mathfrak{L}\{z\},\\ s\mathfrak{L}\{y\}+4s\mathfrak{L}\{z\}-4&=-4\mathfrak{L}\{y\}+\mathfrak{L}\{z\}. \end{aligned}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi $\mathfrak{L}\{y\}$ i $\mathfrak{L}\{z\}$:

$$\begin{aligned}(3s-2)\,\mathfrak{L}\{y\}-(2s+3)\,\mathfrak{L}\{z\}&=-2,\\ (s+4)\,\mathfrak{L}\{y\}+(4s-1)\,\mathfrak{L}\{z\}&=4.\end{aligned}\tag{3}$$

Z rozwiązania tego układu otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\{y\}&=\frac{-2(4s-1)+4(2s+3)}{(3s-2)(4s-1)+(s+4)(2s+3)}=\frac{14}{14s^2+14}=\frac{1}{s^2+1},\\ \mathfrak{L}\{z\}&=\frac{4(3s-2)+2(s+4)}{14s^2+14}=\frac{14s}{14s^2+14}=\frac{s}{s^2+1}.\end{aligned}\tag{4}$$

Z tablicy na stronie 380 (wzory 3 i 4) dostajemy następujące rozwiązania układu równań (1):

$$y=\sin t,\quad z=\cos t,$$

spełniające warunki początkowe.

Zadania

Stosując transformację Laplace'a rozwiązać przy podanych warunkach początkowych następujące równania różniczkowe (zad. 17.21 - 17.28):

17.21. $y'+2y=6$, $y(0)=0$.

17.22. $y'-y=xe^{2x}$, $y(0)=0$.

17.23. $y''-2y'=(x^2+x-3)e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

17.24. $y''+2y'+2y=2e^{-x}\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

17.25. $y'''-y''-4y'+4y=x^2-8$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

17.26. $y'''-3y'+2y=8xe^{-x}$, $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=1$.

17.27. $y^{IV}+y'''=\cos t$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=0$, $y'''(0)=0$.

17.28. $y^{IV}+2y''+y=0$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$, $y'''(0)=1$.

Stosując transformację Laplace'a rozwiązać przy podanych początkowych następujące układy równań różniczkowych (zad. 17.29 - 17.33):

17.29. $y'=y+z+e^t$, $z'=3y-z$, $y(0)=0$, $z(0)=0$.

17.30. $y'+5y+2z=0$, $z'-y+7z=0$, $y(0)=1$, $z(0)=1$.

17.31. $y'+2y+4z=4t+1$, $z'+y-z=\frac{3}{2}t^2$, $y(0)=0$, $z(0)=0$.

17.32. $y''+y-z=0$, $z''-3y+3z=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=0$, $z(0)=0$, $z'(0)=0$.

17.33. $y''-y+z''+z'=e^t$, $y'-y-z'-2z=-e^t$, $y(0)=0$, $y'(0)=\frac{3}{8}$, $z(0)=\frac{9}{8}$, $z'(0)=-\frac{7}{8}$.

Rozdział XVIII

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE

§ 18.1. DEFINICJA OGÓLNA

Równaniem różniczkowym cząstkowym (dokładniej: *równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych*) nazywamy takie równanie różniczkowe, w którym występuje co najmniej jedna pochodna cząstkowa niewiadomej funkcji dwóch (albo więcej) zmiennych. *Rzędem równania różniczkowego* nazywamy najwyższy rząd występującej w równaniu pochodnej cząstkowej niewiadomej funkcji.

PRZYKŁAD. Z podanych równań

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2x-y, \qquad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}+3\frac{\partial u}{\partial y}-u+4x=0$$

pierwsze jest równaniem różniczkowym cząstkowym rzędu pierwszego, drugie – rzędu drugiego.

§ 18.2. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE RZĘDU DRUGIEGO

Równanie różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego z niewiadomą funkcją $u(x,y)$ dwóch zmiennych niezależnych x, y, liniowe względem niewiadomej funkcji $u(x,y)$ i jej pochodnych do drugiego rzędu włącznie, w postaci ogólnej jest następujące:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+ \tag{18.2.1}$$

$$+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u+G(x,y)=0.$$

Funkcje $A(x,y), \ldots, F(x,y)$ nazywamy *współczynnikami*, $G(x,y)$ – *wyrazem wolnym*. Jeżeli $G(x,y)\equiv 0$, to równanie (18.2.1) nazywamy *równaniem jednorodnym*.

Oznaczmy

$$B^2(x,y)-4A(x,y)C(x,y)=\delta(x,y); \tag{18.2.2}$$

wyrażenie to nazywamy *wyróżnikiem równania* (18.2.1). W zależności od znaku wyróżnika rozróżniamy różne typy równania (18.2.1). Mianowicie, jeżeli w pewnym obszarze Q jest

1. $\delta(x,y)>0$, to mówimy, że równanie (18.2.1) jest *typu hiperbolicznego*,
2. $\delta(x,y)=0$, to mówimy, że równanie (18.2.1) jest *typu parabolicznego*,
3. $\delta(x,y)<0$, to mówimy, że równanie (18.2.1) jest *typu eliptycznego*.

Zauważmy, że to samo równanie rozpatrywane w różnych obszarach może być różnego typu (por. zad. 18.4).

Równaniem charakterystyk równania (18.2.1) nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne utworzone z równania (18.2.1), następującej postaci:

$$A(x,y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-B(x,y)\frac{dy}{dx}+C(x,y)=0, \quad \text{jeśli} \quad A(x,y)\neq 0, \tag{18.2.3}$$

albo

$$C(x,y)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-B(x,y)\frac{dx}{dy}+A(x,y)=0, \quad \text{jeśli} \quad C(x,y)\neq 0. \tag{18.2.4}$$

Jeżeli $A(x,y)\neq 0$ i $C(x,y)\neq 0$, to równania te są równoważne.

Zauważmy, że wyróżnik każdego z trójmianów kwadratowych względem dy/dx lub odpowiednio względem dx/dy stanowiących lewe strony równań charakterystyk jest równy $\delta(x,y)$, tzn. wyróżnikowi równania (18.2.1).

Rozwiązania równań (18.2.3) i (18.2.4) nazywamy *charakterystykami równania* (18.2.1). Każde równanie różniczkowe postaci (18.2.1) da się przez odpowiednią zamianę zmiennych x, y na nowe zmienne ξ, η sprowadzić do prostszej postaci zwanej *postacią kanoniczną*, mianowicie do postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\ldots=0, \tag{18.2.5}$$

gdy równanie (18.2.1) jest typu hiperbolicznego, do postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\ldots=0, \tag{18.2.6}$$

gdy równanie (18.2.1) jest typu parabolicznego, oraz do postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\ldots=0, \tag{18.2.7}$$

gdy równanie (18.2.1) jest typu eliptycznego.

W równaniach (18.2.5 - 7) wielokropek oznacza wyrazy nie zawierające pochodnych cząstkowych rzędu drugiego niewiadomej funkcji.

ZADANIE 18.1. Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

spełniające warunki początkowe

$$u(x,0)=5x^2, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x,0)}=0. \tag{2}$$

Rozwiązanie. Badamy typ równania. Ponieważ

$$\delta(x,y)=25>0,$$

więc jest to równanie typu hiperbolicznego. Tworzymy równanie charakterystyk

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+3\left(\frac{dy}{dx}\right)-4=0;$$

stąd znajdujemy

$$\frac{dy}{dx}=-4, \quad \frac{dy}{dx}=1, \quad \text{skąd} \quad y=-4x+C_1, \quad y=x+C_2.$$

Charakterystykami są więc dwie rodziny prostych:

$$4x+y=C_1, \quad -x+y=C_2, \tag{3}$$

w których prawe strony C_1, C_2 są dowolnymi stałymi.

Aby doprowadzić równanie (1) do postaci kanonicznej, dokonujemy zamiany zmiennych x, y wprowadzając nowe zmienne ξ, η. Można udowodnić, że jeśli w równaniu typu hiperbolicznego zastąpimy w równaniach charakterystyk (3) stałe C_1, C_2 odpowiednio przez ξ, η, to przy takiej zamianie zmiennych równanie (1) przyjmie postać kanoniczną. W naszym przykładzie

$$\xi=4x+y, \quad \eta=-x+y. \tag{4}$$

Obliczamy jakobian przekształcenia (4); mamy

$$J=\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=5.$$

Ponieważ przy każdych x, y jakobian J jest różny od zera, odwzorowanie (4) przekształca wzajemnie jednoznacznie całą płaszczyznę na siebie.

Wyrazimy teraz pochodne cząstkowe względem zmiennych x, y występujące w równaniu (1) przez pochodne cząstkowe względem nowych zmiennych ξ, η. Ponieważ

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=4, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x}=-1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y}=1,$$

będzie więc

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=4\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Zakładając ciągłość – a więc i równość – drugich pochodnych cząstkowych mieszanych (por. twierdzenie Schwarza), otrzymujemy dalej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-8\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=$$

$$=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Wszystkie obliczone pochodne cząstkowe rzędu drugiego podstawiamy do równania (1) i otrzymujemy (po podzieleniu przez stałą)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}=0. \tag{5}$$

Jest to postać kanoniczna (18.2.5) równania (1).

Rozwiązaniem ogólnym równania (5) jest – jak łatwo sprawdzamy – suma dwóch dowolnych (dwukrotnie) różniczkowalnych funkcji, z których każda zależy tylko od jednej zmiennej:

$$u=f(\xi)+g(\eta).$$

Uwzględniając związki (4) otrzymamy rozwiązanie ogólne równania (1) w postaci

$$u=f(4x+y)+g(y-x). \tag{6}$$

Aby wyznaczyć nieznane funkcje f, g, wykorzystujemy warunki początkowe (2):

$$u(x,0)=f(4x)+g(-x)=5x^2, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x,0)}=f'(4x)+g'(-x)=0. \tag{8}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ dwóch równań funkcyjnych z dwiema niewiadomymi funkcjami f, g.

Całkujemy równanie (8)

$$\tfrac{1}{4}f(4x)-g(-x)=C. \tag{9}$$

Rugujemy funkcję $g(-x)$, dodając stronami równania (7) i (9)

$$\tfrac{5}{4}f(4x)=5x^2+C,$$

skąd

$$f(4x)=4x^2+\tfrac{4}{5}C, \tag{10}$$

a z kolei z równania (7) otrzymamy

$$g(-x)=x^2-\tfrac{4}{5}C. \tag{11}$$

Prawą stronę (10) musimy wyrazić jako funkcję argumentu $4x$

$$f(4x)=\tfrac{1}{4}(4x)^2+\tfrac{4}{5}C,$$

a więc pierwszy składnik prawej strony równania (6) przyjmie postać

$$f(4x+y)=\tfrac{1}{4}(4x+y)^2+\tfrac{4}{5}C. \tag{12}$$

Podobnie z (11) będzie

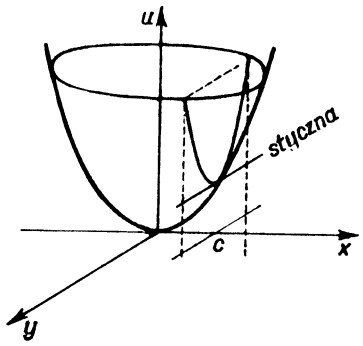
$$g(-x)=(-x)^2-\tfrac{4}{5}C.$$

skąd drugi składnik prawej strony równania (6)

$$g(y-x)=(y-x)^2-\tfrac{4}{5}C. \tag{13}$$

Na koniec podstawiając (12) i (13) do (6) otrzymujemy po redukcji żądane rozwiązanie szczególne

$$u(x, y)=5x^2+\tfrac{5}{4}y^2.$$



Rys. 18.1

Tak więc obrazem geometrycznym rozwiązania szczególnego równania (1) spełniającego warunki początkowe (2) w prostokątnym układzie $Oxyu$ jest powierzchnia (paraboloida eliptyczna) (rys. 18.1):

$$u=5x^2+1{,}25y^2. \tag{14}$$

Jej przekrój płaszczyzną Oxu o równaniu $y=0$ jest parabolą $u=5x^2$; spełniony jest więc pierwszy z warunków początkowych. Drugi z warunków początkowych (2) dotyczy pochodnej cząstkowej zmiennej u względem y. Interpretacją geometryczną $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}$

jest tangens kąta jaki tworzy styczna do przekroju powierzchni (14) płaszczyzną $x=x_0$ z osią Oy w punkcie, w którym $y=y_0$. W naszym przykładzie równaniami linii przekroju są:

$$x=x_0,\qquad u=1{,}25y^2+5x_0^2. \tag{15}$$

Równania (15) przedstawiają rodzinę parabol, z których każda w swoim wierzchołku $(x_0, 0)$ ma styczną równoległą do osi Oy (rys. 18.1).

Typ paraboliczny

ZADANIE 18.2. Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Badamy typ równania

$$\delta(x, y)=4x^2y^2-4x^2y^2=0,$$

a więc jest to typ paraboliczny. Tworzymy równanie charakterystyk

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2xy\frac{dy}{dx}+y^2=0,$$

skąd znajdujemy podwójny pierwiastek tego równania

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

Z rozwiązania tego równania o rozdzielonych zmiennych otrzymujemy jedną charakterystykę, którą jest rodzina hiperbol równoosiowych

$$xy=C.$$

Jako jedną z nowych zmiennych ξ, η przyjmujemy

$$\xi=xy. \tag{2}$$

Dowodzi się, że jako drugą zmienną można przyjąć dowolną funkcję zmiennych x, y liniowo niezależną od ξ; przyjmijmy np.

$$\eta=y. \tag{3}$$

Następnie wyrażamy pochodne cząstkowe z równania (1), korzystając z równań (2) i (3)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}x+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,y^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\cdot 0=y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,x+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)y+\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,x^2+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\,x+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \xi}\,x+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Wyniki otrzymane podstawiamy do równania (1) i otrzymujemy po podzieleniu przez y

$$y\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

a po uwzględnieniu wzoru (3) będzie

$$\eta\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0. \tag{4}$$

Równanie to cząstkowe sprowadzamy do zwyczajnego, wprowadzając nową zmienną zależną z, przez podstawienie

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=z, \tag{5}$$

skąd $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\dfrac{\partial z}{\partial \eta}$. Podstawiając do (4), otrzymujemy po rozdzieleniu zmiennych

$$\frac{dz}{z}=-\frac{d\eta}{\eta},$$

skąd $z\eta=f(\xi)$, gdzie f jest symbolem dowolnej funkcji różniczkowalnej; stąd wykorzystując wzór (5) mamy

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{1}{\eta}\,f(\xi).$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$u=\ln|\eta|\,f(\xi)+g(\xi).$$

Wracając do pierwotnych zmiennych poprzez wzory (2), (3), otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie ogólne równania (1) w postaci

$$u(x,y)=\ln|y|\,f(xy)+g(xy) \tag{6}$$

uzależnione od dwóch dowolnych funkcji dwukrotnie różniczkowalnych.

Obierając na η zamiast (3) dowolną inną funkcję zmiennych x, y liniowo niezależną od $xy=\xi$, otrzymalibyśmy na ogół inną postać ogólną niż (6), ale zawsze jej równoważną (patrz zad. 18.13 i 18.14).

Typ eliptyczny

ZADANIE 18.3. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$xy^3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^3y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y^3\frac{\partial u}{\partial x}-x^3\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{1}$$

Rozwiązanie. Ustalamy typ równania

$$\delta(x,y)=-4x^4y^4.$$

Dla wszystkich więc punktów płaszczyzny z wyjątkiem osi współrzędnych ($x=0$, $y=0$) równanie (1) jest typu eliptycznego.

Równaniem charakterystyk jest

$$xy^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x^3y=0,$$

skąd

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x}{y}i, \tag{2}$$

gdzie i jednostka urojona. Równanie typu eliptycznego ma więc zawsze dwie urojone (zespolone sprzężone) charakterystyki. W naszym przypadku są nimi rozwiązania równań (2)

$$y^2\pm ix^2=C. \tag{3}$$

Jako nowe zmienne ξ, η przyjmuje się odpowiednio część rzeczywistą i część urojoną lewej strony (3)

$$\xi=y^2,\quad \eta=x^2, \tag{4}$$

które są liniowo niezależne. Obliczamy pochodne

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 4x^2+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot 4y^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 2$$

i podstawiamy do równania (1); otrzymamy

$$4x^3y^3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4x^3y^3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0,$$

które dla tego obszaru, dla którego równanie (1) jest eliptyczne, przyjmuje postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0. \tag{5}$$

Jest to tzw. *płaskie (dwuwymiarowe) równanie Laplace'a*. Z teorii funkcji zmiennej zespolonej wiadomo, że spełnia je zarówno część rzeczywista, jak i część urojona dowolnej funkcji holomorficznej (analitycznej) $f(\xi+i\eta)$ w rozważanym obszarze. Tak więc na koniec – uwzględniając związki (4) – otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (1) w postaci rzeczywistej

$$u(x, y)=\operatorname{Re} f(x^2+iy^2), \quad \text{bądź} \quad u(x, y)=\operatorname{Im} f(x^2+iy^2).$$

Inną postacią rozwiązania ogólnego równania (5) jest

$$u(\xi, \eta)=f(\xi+i\eta)+g(\xi-i\eta),$$

gdzie f, g są dowolnymi dwukrotnie różniczkowalnymi funkcjami swych argumentów, co łatwo sprawdzić bezpośrednio, podstawiając do równania (5).

Równanie Laplace'a

Równanie Laplace'a na płaszczyźnie ma postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

a lewa strona równania nosi nazwę *laplasjanu* funkcji $u(x, y)$ i oznaczana jest symbolem $\Delta^2 u$ (por. § 6.9).

Równanie to posiada wiele rozwiązań: niektóre wymieniliśmy pod koniec rozwiązania zad. 18.3. Istotny jest tutaj fakt, że rozwiązania równania Laplace'a dadzą się otrzymać za pomocą pewnych działań nad tzw. *podstawowym rozwiązaniem*, którym jest

$$u(x, y)=\ln r,$$

gdzie r jest odległością punktu zmiennego (x, y) od pewnego ustalonego punktu (x_0, y_0), tzn.

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Funkcja $\ln r$ nazywa się *potencjałem logarytmicznym* punktu (x_0, y_0) (patrz zad. 1.88).

Równanie Laplace'a w przestrzeni trójwymiarowej jest postaci

$$\Delta^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Podstawowym rozwiązaniem tego równania jest

$$u(x, y, z)=\frac{1}{r},$$

gdzie r jest odległością zmiennego punktu (x, y, z) od pewnego ustalonego punktu (x_0, y_0, z_0), tzn.

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Funkcja $1/r$ nazywa się *potencjałem newtonowskim* punktu (x_0, y_0, z_0); nazwa pochodzi stąd, że potencjał ten jest wprost proporcjonalny do przyciągania (albo odpychania), które jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości (zgodnie z prawem Newtona) (patrz zad. 1.100).

Zadania

18.4. Jakiego typu jest równanie $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ zwane *równaniem Tricomiego*?

Doprowadzić do postaci kanonicznej następujące równania (zad. 18.5 - 18.10):

18.5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0.$

18.6. $y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ w dolnej półpłaszczyźnie.

18.7. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

18.8. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

18.9. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

18.10. $y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

Znaleźć ogólne rozwiązanie następujących równań (zad. 18.11 - 18.12):

18.11. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+x+y+1=0.$

18.12. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+x+y+1=0.$

18.13. W zadaniu 18.2 mamy $\xi=xy$. Przyjąć za η niezależną od ξ funkcję $\eta=x$. Jaką otrzymamy wówczas postać ogólną rozwiązania?

18.14. W zadaniu 18.2. mamy $\xi=xy$. Przyjąć za η niezależną od ξ funkcję $\eta=y/x$. Jaką wówczas otrzymamy postać ogólną rozwiązania?

Rozdział XIX

RACHUNEK WARIACYJNY

§ 19.1. UWAGI WSTĘPNE

Rozważmy długość łuku linii określonej funkcją jawną $y=f(x)$, mającą ciągłą pochodną w pewnym przedziale $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$; wyraża się on wzorem (por. I, § 20.2):

$$\text{Ł}(f)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \tag{19.1.1}$$

Przyjmując za $f(x)$ różne funkcje mające ciągłe pierwsze pochodne, tzn. funkcje klasy C^1 w ustalonym przedziale, będziemy otrzymywać na długość łuku $\text{Ł}(f)$ odpowiednie liczby, a więc $\text{Ł}(f)$ jest funkcjonałem (patrz § 1.14) w opisanej klasie funkcji.

Zauważmy, że funkcjonał ten nie jest ani addytywny, ani jednorodny.

Rozważmy teraz kilka przykładów.

PRZYKŁAD 1. Przyjmijmy $x_1=0$, $x_2=1$, a za funkcję $j(x)=x$. Wtedy $j'(x)=1$, więc

$$\text{Ł}(j)=\int_0^1\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}.$$

Jeśli zaś za funkcję $f(x)$ przyjmiemy krzywą łańcuchową $y=\cosh x$, to wobec związków $(\cosh x)'=\sinh x$ oraz $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, będzie

$$\text{Ł}(\cosh x)=\int_0^1\sqrt{1+\sinh^2 x}\,dx=\int_0^1\cosh x\,dx=\sinh x\Big|_0^1=$$

$$=\sinh 1=\frac{e-e^{-1}}{2}.$$

Rachunek wariacyjny zajmuje się badaniem metod wyznaczania ekstremów pewnych funkcjonałów.

Jednym z najprostszych zagadnień rachunku wariacyjnego jest zagadnienie następujące:

Spośród wszystkich krzywych klasy C^1 postaci $y=y(x)$ przechodzących przez dwa dane punkty $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ wyznaczyć taką, dla której całka

$$I(y)=\int_{x_1}^{x_2}F(x, y, y')\,dx \tag{19.1.2}$$

osiąga ekstremum (minimum albo maksimum), gdzie $F(x, y, y')$ jest daną funkcją klasy C^2 względem wszystkich argumentów.

§ 19.2. TWIERDZENIE EULERA

Jeśli funkcjonał (19.1.2) *przyjmuje ekstremum dla pewnej funkcji* $y=y(x)$, *to funkcja ta spełnia równanie różniczkowe zwyczajne*

$$F'_y(x, y, y')-\frac{d}{dx}[F'_{y'}(x, y, y')]=0. \tag{19.2.1}$$

Zapis ten jest skrótem następującej tożsamości:

$$F'_y(x, y(x), y'(x))-\frac{d}{dx}[F'_{y'}(x, y(x), y'(x))]=0. \tag{19.2.2}$$

Równanie to zwane w rachunku wariacyjnym *równaniem Eulera* (1744 r.) posiada w tej dziedzinie podstawowe znaczenie. Po wykonaniu różniczkowania względem x funkcji złożonej $F'_{y'}(x, y(x), y'(x))$ równanie Eulera przybierze postać

$$F'_y(x, y, y')-F''_{y'x}(x, y, y')-F''_{y'y}(x, y, y')y'-F''_{y'y'}(x, y, y')y''=0. \tag{19.2.3}$$

Widzimy, że jest ono rzędu drugiego względem $y(x)$, jeśli tylko $F''_{y'y'}$ nie jest tożsamościowo równe zeru.

Każde rozwiązanie równania różniczkowego Eulera nazywa się *funkcją* lub *linią ekstremalną*, czasem krótko: *ekstremalą*.

ZADANIE 19. 1. Wyznaczyć równanie takiej linii płaskiej postaci $y=f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją klasy C^2 łączącej dwa dane punkty A i B, aby pole powierzchni powstałej od obrotu tej linii dokoła osi leżącej w płaszczyźnie tej linii było najmniejsze.

Rozwiązanie. Niech $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$; wówczas pole powierzchni obrotowej (por. I, § 20.3):

$$S=2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Mamy tu $F(x, y, y')=y\sqrt{1+y'^2}$. Obliczamy pochodne

$$F'_y=\sqrt{1+y'^2}, \qquad F'_{y'}=y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

a następnie

$$\frac{d}{dx}\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\left[(y'^2+yy'')\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'\cdot 2y'y''}{2\sqrt{1+y'^2}}\right]\Big/(1+y'^2)=$$

$$=[(y'^2+yy'')(1+y'^2)-yy'^2y'']/(1+y'^2)^{3/2}=$$

$$=(y'^2+y'^4+yy'')/(1+y'^2)^{3/2}.$$

Możemy już napisać równanie różniczkowe Eulera

$$\sqrt{1+y'^2}-(y'^2+y'^4+yy'')/(1+y'^2)^{3/2}=0.$$

Stąd

$$(1+y'^2)^2-y'^2-y'^4-yy''=0,$$

czyli

$$yy''-y'^2-1=0.$$

Jest to równanie różniczkowe rzędu drugiego typu $F(y, y', y'')=0$, tzn. nie zawierające zmiennej x w jawnej postaci. Sprowadzamy je do równania różniczkowego rzędu pierwszego stosując podstawienie

$$y'=u(y), \quad \text{skąd} \quad y''=\frac{du}{dy}\cdot u. \tag{1}$$

W ten sposób otrzymujemy równanie

$$yu\frac{du}{dy}-u^2-1=0,$$

w którym zmienne dadzą się rozdzielić; mamy

$$\frac{u\,du}{u^2+1}=\frac{dy}{y}.$$

Całkując otrzymamy

$$\tfrac{1}{2}\ln(u^2+1)=\ln C_1 y, \quad \text{czyli} \quad u^2+1=C_1^2 y^2.$$

Wracamy do zmiennej y', stosując związek (1)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=C_1^2 y^2,$$

skąd

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1^2 y^2-1},$$

czyli

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2-1}}=\pm dx.$$

Najprościej obliczymy całkę, podstawiając,

$$C_1 y=\cosh t, \quad C_1\,dy=\sinh t\,dt. \tag{2}$$

Będzie więc $\sqrt{C_1^2y^2-1}=\sinh t$, skąd

$$\frac{1}{C_1}\int dt=\pm\int dx, \quad \frac{1}{C_1}t=\pm x+C_2.$$

Zauważmy, że wobec dowolności obu stałych C_1, C_2 wystarczy uwzględnić po prawej stronie tylko jeden znak np. plus. Tak więc

$$t=C_1(x+C_2),$$

a ze związku (2) znajdujemy ostatecznie rozwiązanie równania różniczkowego Eulera w postaci

$$y=\frac{1}{C_1}\cosh[C_1(x+C_2)]. \tag{3}$$

Ekstremale tworzą więc dwuparametrową rodzinę linii łańcuchowych.

Obie stałe wyznacza się z warunku, że szukana linia przechodzi przez dwa dane punkty. Funkcje (3) spełniają równanie różniczkowe Eulera, które stanowi warunek konieczny, ale w ogólnym przypadku nie wystarczający do istnienia ekstremum.

Szczegółowe badanie wykazuje, że są tutaj możliwe trzy przypadki.

1) Jeśli przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) można przeprowadzić tylko jedną krzywą postaci (3), to jest ona rozwiązaniem zadania.

2) Jeśli przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) przechodzą dwie ekstremale, to dla jednej z nich zachodzi minimum powierzchni obrotowej, dla drugiej zaś nie.

3) Może się jednak zdarzyć, że przez dane dwa punkty nie przechodzi żadna krzywa łańcuchowa. Oznacza to, że w zbiorze powierzchni obrotowych utworzonych przez obrót dokoła osi Ox wykresu funkcji klasy C^2, przechodzącego przez dane 2 punkty nie istnieje powierzchnia minimalna.

Oś odciętych, względem której równanie linii łańcuchowej ma postać (3), nazywa się *kierownicą łańcuchowej*, a powierzchnia powstała przez obrót linii łańcuchowej wokół jej kierownicy nazywa się *katenoidą*.

Minimalną powierzchnią obrotową jest więc katenoida.

Zadania

19.2. Znaleźć ekstremum całki $\int_A^B (y^2+xy-2y^2y')\,dx$, gdzie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

19.3. Czy całka $\int_A^B (y^2+2xyy')\,dx$ osiąga ekstremum? Dane $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

19.4. Znaleźć ekstremalę całki $\int_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$ przechodzącą przez dane punkty $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ leżące w górnej albo w dolnej półpłaszczyźnie.

19.5. Zbadać, dla jakiej linii łączącej punkty $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ całka $\int_A^B (yy'+x^2+y^2)\,dx$ osiąga ekstremum?

19.6. Rozważmy funkcjonał $L(y)=\int_a^b (x-y)^2\,dx$. Znaleźć równanie Eulera, rozwiązać je oraz obliczyć wartość funkcjonału dla otrzymanej ekstremali.

Rozdział XX

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

§ 20.1. DEFINICJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Rachunek prawdopodobieństwa zajmuje się badaniem praw rządzących zdarzeniami losowymi (przypadkowymi).

Jako pojęcie pierwotne przyjmujemy tak zwane „zdarzenie elementarne". Na przykład przy rzucie kostką mamy sześć zdarzeń elementarnych, które oznaczymy ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 odpowiadających odpowiednio rzutom kostki, przy których na górnej ściance „wypada" 1, 2, 3, 4, 5 albo 6 oczek. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, który w tym przypadku jest 6-elementowy, a więc skończony, oznaczymy literą Ω i będziemy go nazywali *przestrzenią zdarzeń elementarnych* (związanych z danym doświadczeniem, tutaj z rzutem kostką). Przestrzeń zdarzeń elementarnych może być również nieskończona, np. może nią być zbiór liczb rzeczywistych większych od zera a mniejszych od 1, czyli przedział otwarty $(0, 1)$.

W przestrzeni zdarzeń elementarnych wyróżniamy pewną klasę $\mathscr{A}$ podzbiorów, zwanych *zdarzeniami*, (*zdarzeniami losowymi*) spełniającą następujące aksjomaty:

1° zbiór pusty $\emptyset$ i cała przestrzeń Ω należą do klasy $\mathscr{A}$,

2° suma mnogościowa co najwyżej przeliczalnej liczby zbiorów należących do $\mathscr{A}$ również należy do $\mathscr{A}$,

3° dopełnienie [1] A^c dowolnego zbioru A należącego do klasy $\mathscr{A}$ również należy do $\mathscr{A}$.

Klasę podzbiorów spełniających warunki 1°, 2°, 3° podane wyżej nazywamy *σ-ciałem*.

Zbiór pusty $\emptyset$, rozpatrywany jako zdarzenie, nazywamy *zdarzeniem niemożliwym*; całą przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω — *zdarzeniem pewnym*, a dopełnienie A^c zbioru A — *zdarzeniem przeciwnym* do zdarzenia A.

Z określeń aksjomatów wynika, że przekrój (iloczyn mnogościowy) dwóch zdarzeń jest zdarzeniem oraz że różnica mnogościowa dwóch zdarzeń jest zdarzeniem. Mamy bowiem:

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c, \qquad A \setminus B = A \cap B^c.$$

([1]) Przez dopełnienie A^c zbioru A rozumiemy zbiór tych wszystkich punktów danej przestrzeni, w omawianym przypadku przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, które do zbioru nie należą. Z definicji tej wynika, że zbiór A i jego dopełnienie A^c są takimi zbiorami rozłącznymi, których suma mnogościowa równa się całej przestrzeni Ω. Dopełnienie zbioru A probabiliści oznaczają często symbolem $\bar{A}$, który jednak przez ogół matematyków jest używany dla oznaczenia domknięcia zbioru A.

W pierwszym podanym przykładzie, związanym z rzutami kostki, w którym przestrzeń zdarzeń elementarnych możemy identyfikować z 6-cio elementowym zbiorem liczb (1, 2, 3, 4, 5, 6) za zdarzenie uważamy każdy podzbiór tego zbioru, np. zbiór (2, 4, 6) odpowiadający każdemu rzutowi kostki, w którym na górnej ściance jest parzysta liczba oczek.

Zapis formalny $\omega \in A$, czyli zdanie: „zdarzenie elementarne ω należy do zdarzenia A" rozumiemy intuicyjnie w sposób następujący: jeżeli w wyniku doświadczenia zaistniało zdarzenie elementarne ω, to zaistniało także zdarzenie A (którego zdarzenie elementarne ω jest elementem). Z tego powodu zapis $\omega \in A$ odczytujemy: *zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu A*.

Zapis $A \subset B$, czyli zdarzenie A jest zawarte w zdarzeniu B, odczytujemy: *zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B*, ponieważ w tym przypadku prawdziwa jest implikacja: jeżeli zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu A, to zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu B. W podanym przykładzie z rzutami kostką zdarzenie $A=(2, 4, 6)$ odpowiadające każdemu rzutowi kostki z parzystą liczbą oczek pociąga za sobą zdarzenie $D=(2, 3, 4, 5, 6)$ odpowiadające każdemu rzutowi kostki z ilością oczek większą niż 1.

Alternatywą zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazywamy sumę mnogościową $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$; suma ta na podstawie aksjomatu 2° jest zdarzeniem i składa się ze wszystkich zdarzeń elementarnych należących do co najmniej jednego ze zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Alternatywę zapisujemy

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{lub} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

Oznacza to, że alternatywą zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jest zdarzenie, które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi co najmniej jedno z tych zdarzeń, np. w pierwszym przykładzie alternatywą zdarzeń (2, 4, 6) oraz (3, 4) jest zdarzenie (2, 3, 4, 6).

W probabilistyce używamy częściej terminu koniunkcja zdarzeń niż przekrój lub też iloczyn mnogościowy zdarzeń. *Koniunkcja zdarzeń* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, którą zapisujemy

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \quad \text{lub} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

jest to takie zdarzenie, które zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi każde ze zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$, np. koniunkcją zdarzeń (2, 3, 5) oraz (3, 4) jest zdarzenie (3).

Dwa zdarzenia A i B nazywamy *wyłączającymi się* (*wykluczającymi się*), jeżeli ich koniunkcja $A \cap B$ jest zbiorem pustym, np. w pierwszym przykładzie zdarzenia (2, 4, 6) i (3, 5) są zdarzeniami wyłączającymi się.

Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję P określoną w klasie zdarzeń i przyjmującą wartości rzeczywiste z przedziału domkniętego [0, 1], taką że:

1° $P(\Omega)=1$, $P(\emptyset)=0$,

2° dla każdego ciągu skończonego lub nieskończonego zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, z których każde dwa wyłączają się (są zbiorami rozłącznymi), tzn. $A_i \cap A_j=\emptyset$ dla $i \neq j$, mamy

$$P\left(\bigcup_i A_i\right)=\sum_i P(A_i). \tag{20.1.1}$$

Treść aksjomatu 2° da się wyrazić w postaci:

Prawdopodobieństwo alternatywy zdarzeń wyłączających się parami równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń.

W szczególności w przypadku dwóch zdarzeń A, B mamy

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B), \quad \text{jeśli} \quad A \cap B=\emptyset. \tag{20.1.2}$$

Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nie są rozłączne, to prawdopodobieństwo alternatywy ich wyraża się w bardziej skomplikowany sposób; przypadek ten będzie omówiony dalej (por. § 20.2).

Z podanej definicji prawdopodobieństwa P wynika, że prawdopodobieństwo zdarzenia A^c przeciwnego do A równa się $1-P(A)$, tzn.

$$P(A^c)=1-P(A)$$

oraz że

$$\text{jeżeli } A \subset B, \text{ to } P(A) \leqslant P(B).$$

Sens intuicyjny ostatniego zdania jest następujący: jeżeli zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B, to $P(A) \leqslant P(B)$.

W pierwszym podanym przykładzie z rzutami kostki założeniu, że kostka jest prawidłowo zbudowana, odpowiada przyjęcie takiego prawdopodobieństwa P, że dla każdego $i=1, 2, \ldots, 6$ $P(\omega_i)=1/6$, co intuicyjnie oznacza, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Jeżeli przestrzeń składa się z n zdarzeń elementarnych, którym przypisujemy to samo prawdopodobieństwo równe $\frac{1}{n}$, to prawdopodobieństwo zdarzenia A m-elementowego jest równe

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Ten wzór został podany przez Laplace'a (1812 r.) jako definicja prawdopodobieństwa zdarzenia A; określenie to obecnie nazywamy *klasyczną definicją prawdopodobieństwa* w przypadku przestrzeni skończonej. Z punktu widzenia logiki wzoru tego jako definicji prawdopodobieństwa traktować nie można. Aksjomatykę rachunku prawdopodobieństwa podał Kołmogorow (1933 r.).

Podamy teraz kilka przykładów nieskończonych przestrzeni zdarzeń elementarnych.

PRZYKŁAD 2. Zdarzeniami elementarnymi są punkty płaszczyzny zawierającej tarczę strzelecką z pierścieniami oznaczonymi numerami od 1 do 9 oraz kołem środkowym oznaczonym numerem 10. Jako zdarzenie przyjmiemy zewnętrze tarczy oznaczone jako K_0, pierścienie oznaczone jako $K_i (i=1, 2, \ldots, 9)$, koło oznaczone jako K_{10} oraz sumy tych zbiorów. Zdarzeń mamy więc skończoną liczbę. Na tych zdarzeniach określamy prawdopodobieństwo trafienia zgodnie z wynikami doświadczeń, np. $P(K_0)=\frac{1}{5}$, $P(K_1)=P(K_{10})=\frac{1}{50}$, $P(K_2)=P(K_9)=\frac{1}{20}$, $P(K_3)=P(K_8)=\frac{2}{25}$, $P(K_4)=P(K_7)=\frac{11}{100}$, $P(K_5)=P(K_6)=\frac{7}{50}$, oczywiście $\sum_{i=0}^{10} P_i=1$.

PRZYKŁAD 3. Zdarzeniami elementarnymi są liczby naturalne 1, 2, ..., n, ..., zdarzeniami — dowolne zbiory liczb naturalnych, a dla każdego zdarzenia jednoelementowego (n) określamy prawdopodobieństwo $P(n)=\frac{1}{2^n}$, wówczas np. $P(1,2,4)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{13}{16}$.

PRZYKŁAD 4. Zdarzeniami elementarnymi są liczby rzeczywiste należące do przedziału otwartego $(0, 1)$. Zdarzeniami są elementy najmniejszego σ-ciała zbiorów zawierającego wszystkie przedziały otwarte (a, b) zawarte w przedziale $(0, 1)$. Zbiory należące do tego ciała nazywamy *zbiorami borelowskimi*. Prawdopodobieństwo zdarzenia (a, b) określamy jako $b-a$, czyli jako długość przedziału (a, b), tzn. $P(a, b)=b-a$, prawdopodobieństwo sumy skończonej lub przeliczalnej rozłącznych przedziałów otwartych jako sumę ich długości.

Prawdopodobieństwo dowolnego zbioru borelowskiego A określamy jako kres dolny prawdopodobieństw nadzbiorów zbioru A będących skończonymi lub przeliczalnymi sumami zbiorów otwartych, a więc np. $P(0,\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$, $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}))=\frac{1}{2}$, $P(\frac{1}{5},\frac{4}{5})=\frac{3}{5}$.

Trójkę (przestrzeń zdarzeń elementarnych, rodzina zdarzeń, prawdopodobieństwo), czyli przy użyciu wprowadzonych symboli $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nazywamy *przestrzenią probabilistyczną*.

ZADANIE 20.1. Z seryjnej produkcji pobrano próbę liczącą 50 elementów i zbadano je ze względu na trzy cechy wyłączające się, ale nie jedynie możliwe, przy czym okazało się, że cechę A ma 10 elementów, cechę B — 18 elementów, a cechę C — 12 elementów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrany losowo element z tej próby posiada jedną z badanych cech.

Rozwiązanie. Mamy

$$P(A \text{ albo } B \text{ albo } C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{10}{50}+\frac{18}{50}+\frac{12}{50}=\frac{4}{5}.$$

Zadania

20.2. Cztery tomy dzieła ułożono losowo na półce. Jakie jest prawdopodobieństwo, że tomy zostały ułożone w kolejności 1, 2, 3, 4?

20.3. W partii 100 elementów znajdują się 3 braki. Wybieramy losowo jeden element. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie on prawidłowy?

20.4. Jakie jest prawdopodobieństwo przypadkowego złożenia wyrazu TATRY z liter A, R, T, T, Y?

20.5. Rzucamy dwiema kostkami jednocześnie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że

a) suma oczek jest równa 4,

b) suma oczek jest mniejsza od 5,

c) suma oczek jest większa niż 8,

d) suma oczek jest liczbą parzystą,

e) różnica oczek (odejmujemy od liczby większej liczbę nie większą od pierwszej) jest liczbą nieparzystą,

f) iloczyn liczby oczek jest liczbą parzystą,

g) wyrzucimy przynajmniej jedną szóstkę.

20.6. Dane są 4 odcinki o długościach 1, 3, 5, 7 tych samych jednostek. Wybieramy losowo 3 odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia „z wylosowanych odcinków można zbudować trójkąt".

20.7. Losowo ustawiono na półce trzytomowe dzieło. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia „Książki zostały ustawione w kolejności tomów".

20.8. W grupie studenckiej przeprowadzono kolokwium z matematyki, przy czym okazało się, że stosunek liczby ocen niedostatecznych, dostatecznych, dobrych i bardzo dobrych wyraził się stosunkiem 3 : 9 : 2 : 1. a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany student z grupy otrzymał dwójkę. b) Niech zdarzenie A polega na tym, że losowo wybrany student otrzymał trójkę, zaś zdarzenie B, że otrzymał ocenę różną od trójki. Które z tych zdarzeń jest bardziej prawdopodobne?

20.9. W 20 elementach 16 jest pierwszego gatunku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pobierając losowo 3 elementy wszystkie będą pierwszego gatunku?

20.10 Na egzamin przygotowano 45 tematów, z których zdający losuje 3. Student otrzymuje ocenę bardzo dobrą za rozwiązanie trzech tematów, „dobrą" za rozwiązanie dwóch tematów, „dostateczną" za rozwiązanie jednego i „niedostateczną", gdy brak rozwiązań. Jakie jest prawdopodobieństwo P_1 uzyskania oceny co najmniej „dostatecznej", a jakie P_2 oceny „bardzo dobrej", jeśli student przygotował 2/3 tematów?

20.11. W partii towaru składający się z N sztuk znajduje się M sztuk wybrakowanych. Wybieramy losowo n sztuk ($n \leqslant N$). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich znajdzie się: a) dokładnie m sztuk wybrakowanych ($m \leqslant n$), b) co najwyżej m sztuk wybrakowanych.

20.12. Z grupy studenckiej liczącej 30 osób w tym 20 chłopców wybrano delegację z 5 osób, przy czym rozważano różne możliwości liczby chłopców i dziewcząt w delegacji, w każdym razie liczby różne od zera. Obliczyć prawdopodobieństwo, że do delegacji będą wybrane najwyżej 3 dziewczęta.

§ 20.2. ZDARZENIA NIEZALEŻNE. PRAWDOPODOBIEŃSTWO KONIUNKCJI (ILOCZYNU) ZDARZEŃ

Niech A i B oznaczają dwa zdarzenia takie, że $P(B)>0$. Przez *prawdopodobieństwo warunkowe* $P(A|B)$ zdarzenia A pod warunkiem B rozumiemy

$$P(A \mid B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{20.2.1}$$

Dwa zdarzenia A i B nazywamy *niezależnymi*, jeżeli

$$P(A \cap B)=P(A)\,P(B), \tag{20.2.2}$$

a więc dla zdarzeń niezależnych A i B prawdopodobieństwo ich koniunkcji równa się iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń.

Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 3)$ są *niezależne zespołowo* (*en bloc*), jeżeli dla każdego naturalnego $j \leqslant n$ i każdego ciągu liczb naturalnych $k_1 < k_2 < \ldots < k_j \leqslant n$ mamy

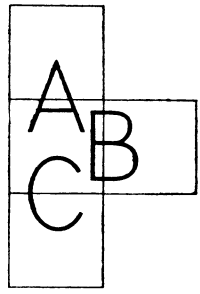
$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_j}) = P(A_{k_1})\, P(A_{k_2}) \ldots P(A_{k_j}). \tag{20.2.3}$$

Z niezależności zespołowej zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wynika w szczególności niezależność każdej pary zdarzeń, tzn.

$$P(A_k \cap A_l) = P(A_k)\, P(A_l), \quad k, l = 1, 2, \ldots, n; \quad k \neq l. \tag{20.2.4}$$

Natomiast z niezależności zdarzeń parami nie wynika niezależność zespołowa zdarzeń, jak to widać z podanego niżej zadania.

ZADANIE 20.13. Zbadano 60 elementów ze względu na 3 cechy A, B, C, przy czym okazało się, że 15 elementów posiada cechę tylko A, 15 — cechę tylko B, 15 — cechą tylko C, a pozostałe 15 posiadają wszystkie trzy cechy A, B, C. Zbadać niezależność wszystkich par cech oraz niezależność zespołową wszystkich trzech cech.



Rys. 20.1

Rozwiązanie. Niech $P(A)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo pobrany element ma cechę A, jest więc (por. rys. 20.1)

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}.$$

Z kolei obliczamy prawdopodobieństwa warunkowe

$$P(A \mid B) = P(B \mid A) = P(B \mid C) = P(C \mid B) = P(A \mid C) = P(C \mid A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}.$$

Z równości $P(A|B) = P(A)$, $P(B|C) = P(B)$ oraz $P(C|A) = P(C)$ wnioskujemy, że każda para A i B, B i C, C i A jest parą zdarzeń niezależnych.

Zbadajmy niezależność zespołową wszystkich trzech zdarzeń A, B, C. W tym celu obliczamy prawdopodobieństwo warunkowe

$$P(A \mid B \cap C) = \frac{15}{15} = 1$$

i stwierdzamy, że nie jest ono równe $P(A)$, stąd wniosek: wszystkie trzy zdarzenia nie są niezależne zespołowo.

* * *

Przy obliczeniu prawdopodobieństwa koniunkcji (iloczynu) zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ korzystamy ze wzoru

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \tag{20.2.5}$$

$$= P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

W przypadku dwóch zdarzeń A, B wzór ten przyjmuje postać

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A) = P(B)\, P(A \mid B). \tag{20.2.6}$$

Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne zespołowo, odpowiednio wzory (20.2.5 - 6) przyjmują postać

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_n), \tag{20.2.7}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B). \tag{20.2.8}$$

Wzór (20.2.7) można opisać w następujący sposób:

Prawdopodobieństwo koniunkcji (tzn. łącznego zajścia) n zdarzeń niezależnych zespołowo równa się iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń.

ZADANIE 20.14. Rozpatrując dane z zadania 20.1 obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrane losowo kolejno z próby trzy elementy będą miały cechę A?

Rozwiązanie. Niech

A_1 oznacza zdarzenie, że pierwszy wylosowany element ma cechę A,

A_2 oznacza zdarzenie, że drugi wylosowany element ma cechę A,

A_3 oznacza zdarzenie, że trzeci wylosowany element ma cechę A,

B oznacza zdarzenie, którego prawdopodobieństwo należy obliczyć.

Zatem

$$P(B)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1\cap A_2)=$$

$$=\tfrac{10}{50}\cdot\tfrac{9}{49}\cdot\tfrac{8}{48}=\tfrac{3}{490}\approx 0{,}6\%.$$

ZADANIE 20.15. Obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia cztery razy po kolei reszki rzucając monetą 4 razy

Rozwiązanie. Zdarzenia: „wyrzucenie reszki" w poszczególnych rzutach są zespołowo niezależne, a prawdopodobieństwo każdego z nich jest równe $\frac{1}{2}$. Zatem

$$P=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{16}.$$

Wrócimy obecnie do zapowiedzianej sytuacji, gdy zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nie koniecznie są rozłączne. W tym przypadku prawdopodobieństwo alternatywy wyraża się wzorem

$$(20.2.9)\quad P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)-$$

$$-P(A_1\cap A_2)-\ldots-P(A_{n-1}\cap A_n)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)+\ldots+$$

$$+P(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)-\ldots-(-1)^{n-1}P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n).$$

Dla dwóch zdarzeń A, B mamy odpowiednio

$$(20.2.10)\qquad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

co oznacza, że:

Prawdopodobieństwo alternatywy dwóch dowolnych zdarzeń równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń zmniejszonej o prawdopodobieństwo ich koniunkcji.

Zwróćmy uwagę, że jeżeli zdarzenia A i B są rozłączne, to prawdopodobieństwo ich koniunkcji jest zdarzeniem niemożliwym, zatem

$$(20.2.11)\qquad P(A\cap B)=0.$$

Korzystając z tej uwagi, widzimy, że w przypadku zdarzeń rozłącznych wzory (20.2.9 - 10) przyjmują postać wzorów (20.1.1 - 2).

ZADANIE 20.16. W laboratorium włókienniczym zbadano pewną liczbę włókien, przy czym okazało się, że 20% spośród nich ma długość większą niż l_0 mm (cecha A), 40% spośród wszystkich ma wytrzymałość co najmniej równą w kG/mm^2 (cecha B), a 15%

wszystkich ma obie cechy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrane włókno ma przynajmniej jedną z tych cech?

Rozwiązanie. Stosujemy wzór (20.2.10) uwzględniając dane zadania otrzymujemy

$$P(A \cup B)=\frac{20}{100}+\frac{40}{100}-\frac{15}{100}=0{,}45.$$

ZADANIE 20.17. Na jednej fantowej loterii jest 80% wygranych, a na drugiej niezależnej od pierwszej — 70% losów wygranych. Kupiono po jednym losie na każdą loterię. Jakie jest prawdopodobieństwo p wygrania przynajmniej na jednej loterii?

Rozwiązanie I. Stosujemy wzór (20.2.10) i korzystając z faktu, że wygrane na obu loteriach są zdarzeniami niezależnymi otrzymujemy

$$p=0{,}80+0{,}70-0{,}80\cdot 0{,}70=0{,}94.$$

Rozwiązanie II. Zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia „wygranie przynajmniej na jednej loterii jest zdarzenie, „przegranie na obu loteriach". Prawdopodobieństwo przegrania na pierwszej loterii jest równe $1-0{,}80=0{,}20$ a na drugiej loterii jest równe $1-0{,}70=0{,}30$, a więc prawdopodobieństwo przegrania na obu loteriach, jako prawdopodobieństwo koniunkcji wymienionych zdarzeń, jest równe $0{,}30\cdot 0{,}20=0{,}06$. Stąd poszukiwane prawdopodobieństwo wynosi $1-0{,}06=0{,}94$.

Zadania

20.18. Niech A, B, C będą zdarzeniami losowymi. W jakich przypadkach zachodzą równości a) $A \cup B \cup C=A$, b) $A \cap B \cap C=A$? c) Uprościć wyrażenie $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

20.19. Niech A, B, C będą zdarzeniami losowymi. Czy zdarzenia A i B są równoważne, jeśli a) $A \cup C=B \cup C$, b) $A=B$, c) $A \cap C=B \cap C$? Wykonać odpowiednie rysunki.

20.20. Niech A, B, C będą dowolnymi zdarzeniami losowymi. Zapisać przy użyciu symboli koniunkcji, alternatywy i dopełnienia następujące zdarzenia, które zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy spośród zdarzeń A, B, C: a) zaszło tylko zdarzenie C, b) zaszły tylko zdarzenia A i B, c) zaszło co najmniej jedno z tych zdarzeń, d) zaszło dokładnie jedno z tych zdarzeń, e) zaszły dokładnie dwa spośród nich, f) zaszło nie więcej niż dwa zdarzenia, g) nie zaszło żadne z trzech zdarzeń.

20.21. Braki wynoszą 4% całej produkcji, a gatunek I stanowi 75% produkcji niebrakowej. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia „wybrany losowo element nie jest brakiem"?

20.22. Niech zdarzenie A polega na wyciągnięciu z talii 52 kart karty koloru pikowego, zdarzenie B na wyciągnięciu asa. Obliczyć prawdopodobieństwa następujących zdarzeń: $\bar{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $\bar{A} \cup \bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$.

20.23. W urnie znajduje się 6 kul czarnych i 4 białe. Wyciągamy losowo 2 razy po jednej kuli, a) ze zwrotem kuli do urny po pierwszym wyjęciu, b) bez zwrotu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że druga wylosowana kula będzie biała, jeśli wiadomo, że pierwsza wylosowana była biała.

20.24. Zdarzenia A i B wyłączają się. Czy te zdarzenia są niezależne?

20.25. Stu wyborowych strzelców celuje do lecącego samolotu. Prawdopodobieństwo trafienia samolotu dla każdego z nich jest stałe i wynosi p. Obliczyć prawdopodobieństwo
a) że samolot nie zostanie trafiony,
b) że zostanie trafiony.

20.26. Z urny o składzie: 13 kul białych i 7 czarnych losujemy 2 kule: a) ze zwrotem, b) bez zwrotu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że obie kule będą białe.

20.27. W pewnym zakładzie produkowany towar podlega dwustopniowej kontroli jakości. Prawdopodobieństwo przepuszczenia braku przy pierwszej kontroli wynosi 0,05, przy następnej zaś kontroli 0,01. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zakład wypuści brak na rynek.

20.28. Niech zdarzenie A polega na wyciągnięciu z talii 52 kart kiera, zdarzenie zaś B na wyciągnięciu asa. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losując 1 kartę wyciągniemy asa bądź kiera.

20.29. Pewien student gra na dwóch loteriach. Prawdopodobieństwo wygrania na I loterii wynosi 0,6, na drugiej 0,75. Obliczyć prawdopodobieństwo, że student wygra przynajmniej na jednej loterii.

20.30. Rzucamy 5 razy kostkę sześcienną. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania a) samych szóstek, b) samych jedynek, c) jednej piątki, d) ani jednej piątki, e) co najmniej 1 szóstki, f) co najwyżej 3 szóstek. Wyjaśnić otrzymane wyniki w punkcie c) i d).

20.31. Z pełnej talii 52 kart wyjmujemy losowo 3 karty jednocześnie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to król, dziesiątka i trójka?

20.32. Wyprowadzić wzór na $P(A \cup B \cup C)$.

20.33. Trzy zdarzenia A, B, C są niezależne zespołowo i nie wykluczające się, przy czym $P(A)=p_1$, $P(B)=p_2$, $P(C)=p_3$. Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia: a) dokładnie jednego spośród trzech zdarzeń, b) dokładnie dwóch zdarzeń, c) wszystkich trzech zdarzeń, d) przynajmniej jednego zdarzenia, e) jaki związek zachodzi pomiędzy prawdopodobieństwami a), b), c) oraz d)?

20.34. Przerwanie obwodu elektrycznego może nastąpić wskutek defektu elementu a_1 lub defektu elementów $a_2 \cup a_3$. Prawdopodobieństwa defektu tych elementów wynoszą odpowiednio: $P(a_1)=0{,}3$, $P(a_2)=P(a_3)=0{,}2$. Obliczyć prawdopodobieństwo przerwania obwodu.

20.35. Na rys. 20.2 podano fragmenty pewnych sieci przewodów elektrycznych, w których $a_1, a_2, \ldots$ oznaczają żarówki. Prawdopodobieństwo przepalenia się każdej z żarówek przed upływem T godzin świecenia wynosi q, $0<q<1$, żarówki przepalają się niezależnie od siebie. Obliczyć prawdopodobieństwo stałego przepływu prądu tzw niezawodności w czasie T godzin dla każdego fragmentu sieci (1), (2), ..., (12). Przykładowo obliczymy niezawodność P dla fragmentu (9)

Rozwiązanie I. Oznaczmy przez A_1, A_2, A_3, A_4 zdarzenia polegające na nie przepaleniu się odpowiednio żarówek a_1, a_2, a_3, a_4; zgodnie z warunkami mamy

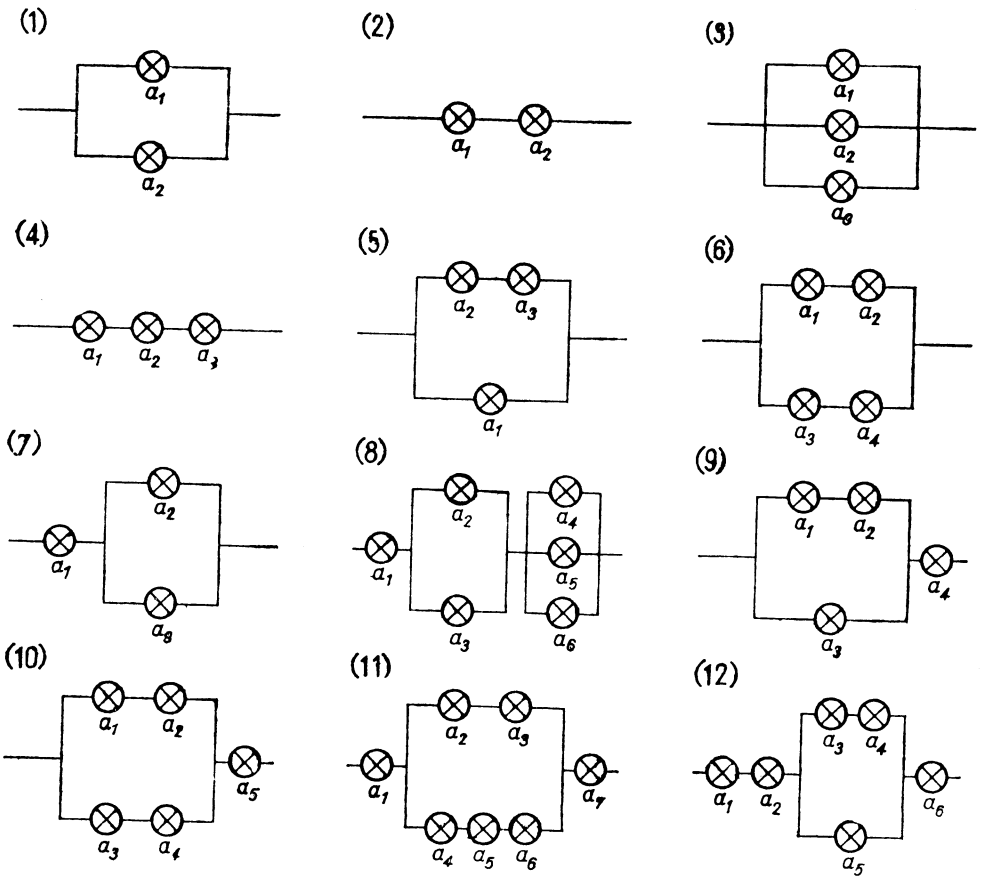
$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=1-q=p, \quad 0<p<1.$$

We fragmencie (9) sieci prąd będzie płyną wtedy i tylko wtedy, kiedy: 1) nie przepalą się żarówki a_1 i a_2 lub nie przepali się żarówka a_3 i 2) nie przepali się żarówka a_4, tzn. kiedy zajdzie zdarzenie będące koniunkcją zdarzeń

$$[(A_1 \cap A_2) \cup A_3] \cap A_4. \tag{1}$$

Ponieważ $P[(A_1 \cap A_2) \cup A_3] = P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = p^2 + p - p^3$ oraz $P(A_4) = p$, więc prawdopodobieństwo P_9 zdarzenia (1) jako prawdopodobieństwo koniunkcji dwóch zdarzeń niezależnych (wzór (20.2.8)) jest równe

$$P_9 = (p^2 + p - p^3)\, p = p^2(1 + p - p^2).$$



Rys. 20.2

Rozwiązanie II. Zdarzenie niezawodnego przepływu prądu we fragmencie sieci (9) zrealizuje się, gdy zajdzie jedno z następujących wykluczających się zdarzeń:

1) świecić będą wszystkie cztery żarówki

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = p^4;$$

2) świecić będą żarówki a_1, a_2, a_4, przepali się **żarówka** a_3

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4) = p^3 q ;$$

3) świecić będą żarówki a_1, a_3, a_4, przepali się żarówka a_2

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4) = p^3 q ;$$

4) świecić będą żarówki a_2, a_3, a_4, przepali się żarówka a_1

$$P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = p^3 q ;$$

5) świecić będą żarówki a_3, a_4, przepalą się żarówki a_1, a_2

$$P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4) = p^2 q^2 .$$

Stosując wzór (20.1.1) otrzymamy

$$P_9 = p^4 + 3p^3 q + p^2 q^2 = p^4 + 3p^3(1-p) + p^2(1-p)^2 = p^2(1+p-p^2) .$$

§ 20.3. TWIERDZENIE O PRAWDOPODOBIEŃSTWIE ZUPEŁNYM (CAŁKOWITYM) WZÓR BAYESA

Można udowodnić następujące twierdzenie, zwane *twierdzeniem o prawdopodobieństwie zupełnym (całkowitym)*:

Niech będą dane zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *parami wykluczające się oraz takie, że* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$; *wówczas dla dowolnego zdarzenia* B *zachodzi następujący wzór*:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P(B \mid A_i), \tag{20.3.1}$$

gdzie $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

ZADANIE 20.36. Trzy maszyny różnego typu produkują seryjnie ten sam towar. W pewnym okresie pierwsza maszyna częściowo zautomatyzowana wykonuje 50 sztuk, podczas gdy druga z obsługą ręczną wykonuje 30 sztuk, a trzecia najstarszego typu 20 sztuk. Zaobserwowano, że średni procent braków produkcji pierwszej maszyny wynosi 3%, drugiej 4%, a trzeciej – 5%. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia na brak w całej produkcji tego towaru.

Rozwiązanie. Prawdopodobieństwo $P(M_1)$ trafienia na sztukę wyprodukowaną przez pierwszą maszynę M_1 wynosi

$$P(M_1) = \frac{50}{50+30+20} = 0{,}5 ,$$

analogicznie

$$P(M_2) = 0{,}3 , \quad P(M_3) = 0{,}2 .$$

Prawdopodobieństwo trafienia na brak B przy warunku, że sztuka pochodzi z M_1, wynosi

$$P(B|M_1)=0{,}03$$

i podobnie

$$P(B|M_2)=0{,}04, \quad P(B|M_3)=0{,}05.$$

Stosujemy teraz wzór na prawdopodobieństwo całkowite i otrzymujemy

$$P(B)=P(M_1)\cdot P(B|M_1)+P(M_2)P(B|M_2)+P(M_3)P(B|M_3)=$$

$$=0{,}5\cdot 0{,}03+0{,}3\cdot 0{,}04+0{,}2\cdot 0{,}05=0{,}037=3{,}7\%.$$

A więc procent braków w łącznej produkcji trzech maszyn wynosi 3,7% i takie jest prawdopodobieństwo trafienia na brak przy wyborze losowym jednej sztuki z łącznej produkcji trzech maszyn.

Przy poprzednio przyjętych założeniach prawdziwy jest następujący wzór:

$$P(A_k|B)=\frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)} \quad (k=1,2,\ldots,n). \tag{20.3.2}$$

Wzór ten nosi nazwę *wzoru Bayesa*. We wzorze tym prawdopodobieństwo $P(A_k)$ nazywamy *prawdopodobieństwem a priori* zdarzenia A_k, a prawdopodobieństwo $P(A_k|B)$ (gdy znany jest już wynik doświadczenia: zaszło zdarzenie B) hipotezy, że przyczyną zajścia zdarzenia B było zdarzenie A_k nazywamy *prawdopodobieństwem a posteriori* zdarzenia A_k. Stąd wzór Bayesa nazywa się również *twierdzeniem o prawdopodobieństwie hipotez (przyczyn)*.

ZADANIE 20.37. Wróćmy do zadania 20.36. Przypuśćmy, że wylosowano jedną sztukę z produkcji łącznej trzech maszyn i okazała się ona brakiem. Obliczyć jakie jest prawdopodobieństwo, że brak ten wyprodukowała trzecia maszyna?

Rozwiązanie. Obliczmy

$$P(M_3|B)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}05}{0{,}5\cdot 0{,}03+0{,}3\cdot 0{,}04+0{,}2\cdot 0{,}05}=\frac{10}{37},$$

i podobnie

$$P(M_2|B)=\tfrac{12}{37}, \quad P(M_1|B)=\tfrac{15}{37}.$$

Tak więc najbardziej prawdopodobne jest wylosowanie braku wyprodukowanego przez pierwszą maszynę mimo, że maszyna ta produkuje najlepszy towar (tylko 3% braków) czytelnik sam wyjaśni ten — na pierwszy rzut oka — paradoks.

Zadania

20.38. Z fabryki F_1 pochodzi 60% elementów, reszta z fabryki F_2. Niezawodność działania w określonym czasie T elementów z F_1 wynosi 95%, z F_2 — 90%. Pobrano losowo jeden element. Obliczyć prawdopodobieństwo niezawodnego działania elementu w czasie T.

20.39. W zakładzie znajdują się 3 maszyny typu A, 5 typu B i 2 typu C, produkują one odpowiednio 5%, 3%, 1% braków:

a) pobieramy losowo z całej przemierzonej masy towarowej jedną sztukę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że będzie ona brakiem

b) pobrano losowo jedną sztukę, która okazała się brakiem. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z maszyny B.

20.40. Zaopatrzenie rynku w ubiory ochronne pokrywają tylko 3 fabryki A, B, C, fabryka A w 45%, B w 20%, resztę pokrywa fabryka C. Gatunek I stanowi 80% produkcji fabryki A, 65% produkcji fabryki B i 90% — C, a pozostałą część produkcji stanowią gatunki II, III, a) jaki % ubiorów ochronnych na rynku stanowi gatunek I? b) a jaki gatunki II i III? c) zakupiono towar gatunku niższego od I, obliczyć prawdopodobieństwo, że wyprodukowany został przez fabrykę C.

20.41. Na linii łączności nadaje się tylko dwa rodzaje sygnałów A i B z prawdopodobieństwami odpowiednio równymi 84% i 16%. Z powodu zakłóceń 1/6 sygnałów A jest odbierana jako sygnały B, a 1/8 sygnałów B jest odbierana jako sygnały A. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na punkcie odbiorczym pojawi się: a) sygnał A, b) sygnał B, c) odebrano sygnał A, jakie jest prawdopodobieństwo, że nadano go?

20.42. Dla sygnalizacji, że tok pracy linii automatycznych wykazuje odchylenia przekraczające określoną normę korzysta się ze specjalnych przyrządów, które podają wówczas sygnał, należą one do trzech typów, stosunek ilościowy ich wyraża się stosunkiem 8 : 10 : 9, a stosunek prawdopodobieństwa, że podadzą sygnał po przekroczeniu określonej normy odchylenia, wyraża się stosunkiem 12 : 11 : 13. Do jakiego typu najprawdopodobniej należy sygnalizujący przyrząd?

20.43. Prawdopodobieństwa oddania celnego strzału z kolejnych pięciu karabinów przez pewnego strzelca wynoszą odpowiednio 5/6, 3/4, 2/3, 1/2, 1/3. a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że strzelec wybierając losowo karabin trafi do celu, b) przy założeniu, że oddany strzał był celny, obliczyć prawdopodobieństwo, że strzelec wybrał pierwszy karabin.

§ 20.4. ZMIENNE LOSOWE, ICH ROZKŁADY. DYSTRYBUANTA

Zmienna losową nazywamy dowolną funkcję X określoną w przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, przyjmującą wartości rzeczywiste i spełniającą warunek:

(1) dla każdej liczby rzeczywistej α zbiór $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) < \alpha\}$ jest zdarzeniem.

Warunek (1) wyrażamy krótko: funkcja X jest $\mathcal{A}$-mierzalna, gdzie $\mathcal{A}$, jak poprzednio, oznacza klasę zdarzeń, która jest σ-ciałem.

Z warunku (1) wynika spełnienie następujących warunków:

(2) dla każdej liczby rzeczywistej β zbiór $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) \leqslant \beta\}$ jest zdarzeniem,

(3) dla każdej liczby rzeczywistej γ zbiór $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) > \gamma\}$ jest zdarzeniem,

(4) dla każdej liczby rzeczywistej δ zbiór $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega) = \delta\}$ jest zdarzeniem.

Zbiory $\{\omega \in \Omega\colon X(\omega)<\alpha\}$ oznaczamy krócej $\{X<\alpha\}$ i podobne oznaczenia mają symbole $\{X\leqslant\beta\}$, $\{X>\gamma\}$, $\{X=\delta\}$.

PRZYKŁAD 1. Z partii drutu kontrola techniczna pobiera losowo pewną ich liczbę i bada ich wytrzymałość na zerwanie, zdarzeniu (losowo wybrany drut) przyporządkowujemy liczbę (odpowiadającą wytrzymałości na zerwanie wyrażoną w kG/mm^2).

PRZYKŁAD 2. W każdym kraju — częściej niż spisy narodowe — dokonuje się spisów częściowych: polegają one na tym, że wybiera się losowo w skali np. województwa czy też całego państwa pewną liczbę gospodarstw i sprawdza się np. stan pogłowia bydła rogatego, zdarzeniu (losowo wybrane gospodarstwo) przyporządkowujemy liczbę głów bydła rogatego.

Zmienną losową nazywamy *skokową*, jeżeli zbiór jej wartości jest skończony lub co najwyżej przeliczalny.

W przypadku gdy przestrzeń zdarzeń elementarnych jest skończona lub co najwyżej przeliczalna, każda zmienna losowa jest skokowa.

Załóżmy, że X oznacza zmienną losową skokową i oznaczmy przez $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ jej wartości. Oznaczmy następnie

$$p_i = P\{X=x_i\}. \tag{20.4.1}$$

Wówczas *rozkładem zmiennej losowej skokowej* nazywamy zbiór par (x_i, p_i), przy czym dla uproszczenia rozpatrujemy tylko te pary, dla których p_i jest dodatnie.

Często rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej skokowej X podaje się w postaci następującej tablicy, zwanej *tablicą rozkładu prawdopodobieństwa*:

(20.4.2)

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$P\{X=x_i\}$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Mówimy, że *zmienna losowa* jest *ciągła*, jeżeli istnieje taka nieujemna i całkowalna w przedziale $(-\infty, +\infty)$ funkcja $f(x)$, że dla dowolnej wartości x

$$P\{X<x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad \text{przy czym} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{20.4.3}$$

Zapis $P\{X<x\}$ czytamy: prawdopodobieństwo zdarzenia, że zmienna losowa X przyjmie wartość mniejszą niż x. Funkcję $f(x)$ nazywamy *gęstością prawdopodobieństwa* (lub po prostu *gęstością*) zmiennej losowej ciągłej X. W przypadku zmiennej losowej ciągłej, prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmie konkretną wartość x_0, jest zawsze równe zeru, tzn. $P\{X=x_0\}=0$, mimo że nie jest to zdarzenie niemożliwe.

Zdarzenie, że zmienna losowa X (skokowa lub ciągła) przyjmie wartość mniejszą niż x, ma dla każdej wartości x określone prawdopodobieństwo, które oznaczamy $F(x)$ i nazywamy *dystrybuantą zmiennej losowej* X, zatem

$$F(x) = P\{X<x\}. \tag{20.4.4}$$

Dla zmiennej losowej skokowej dystrybuanta wyraża się wzorem

$$F(x)=\sum_{x_i<x} p_i, \tag{20.4.5}$$

a dla ciągłej – wzorem

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \tag{20.4.6}$$

Różniczkując całkę powyższą względem górnej granicy całkowania otrzymujemy w punktach ciągłości funkcji f związek pomiędzy dystrybuantą, a gęstością

$$F'(x)=f(x). \tag{20.4.7}$$

Dystrybuanta dowolnej zmiennej losowej X jest funkcją niemalejącą, przynajmniej lewostronnie ciągłą, oraz spełnia warunki

$$\begin{aligned} &F(-\infty)=0, \quad F(+\infty)=1, \\ &P\{a\leqslant X<b\}=F(b)-F(a), \end{aligned} \tag{20.4.8}$$

przy czym w przypadku zmiennej losowej ciągłej, nierówność po lewej stronie (20.4.8) można zastąpić przez nierówności $a\leqslant X\leqslant b$, $a<X\leqslant b$ albo $a<X<b$.

Zadania

20.44. Zmienna losowa X podlega rozkładowi podanemu w tabelce

x_i	-2	-1	0	3	5
p_i	0,1	0,5	0,2	C	0,1

a) obliczyć stałą C, b) wyznaczyć i naszkicować dystrybuantę, c) obliczyć $P\{-1,5<X\leqslant 10\}$ oraz zaznaczyć je na wykresie dystrybuanty.

20.45. Dobrać tak stałą C, by funkcja

$$f(x)=\begin{cases} Cx^2 & \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant 3, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

była gęstością prawdopodobieństwa, a) wyznaczyć dystrybuantę, b) obliczyć $P\{|X|<1\}$.

20.46. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x\leqslant -1, \\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin x+\frac{1}{2} & \text{dla} \quad -1<x<1, \\ 1 & \text{dla} \quad x>1 \end{cases}$$

zwany rozkładem arcus sinusa; a) naszkicować dystrybuantę, b) wyznaczyć gęstość, c) obliczyć $P\{-\frac{1}{2} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{3}\}$.

20.47. Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x<1, \\ \dfrac{C}{x^2} & \text{dla} \quad x \geqslant 1; \end{cases}$$

a) wyznaczyć C, b) znaleźć dystrybuantę $F(x)$, c) obliczyć $P\{2<X<3\}$ w jednym doświadczeniu, d) obliczyć, że w trzech niezależnych doświadczeniach ani razu X nie przyjmie wartości z przedziału (2, 3).

§ 20.5. WARTOŚĆ PRZECIĘTNA, MOMENTY, WARIANCJA ZMIENNEJ LOSOWEJ

Wartością przeciętną (*wartością oczekiwaną*, *wartością średnią*) *zmiennej losowej* X nazywamy

$$E(X)=\sum_i x_i p_i, \tag{20.5.1}$$

gdy X jest zmienną losową skokową, oraz

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx, \tag{20.5.2}$$

gdy X jest zmienną losową ciągłą. W przypadku wzoru (20.5.1) zakładamy, że szereg, a wzoru (20.5.2) — że całka są zbieżne bezwzględnie (por. I, § 3.3).

ZADANIE 20.48. Wykonano 5 jednakowo dokładnych pomiarów, w wyniku których otrzymano 12, 17, 13, 18, 15 odpowiednich jednostek. Znaleźć wartość przeciętną.

Rozwiązanie. Poszczególne wyniki traktujemy jako realizacje zmiennej losowej X, która przyjęła każdą z powyższych wartości z jednakowym prawdopodobieństwem, a więc równym $\frac{1}{5}$. Zgodnie ze wzorem (20.5.1) otrzymujemy

$$E(X)=12\cdot\tfrac{1}{5}+17\cdot\tfrac{1}{5}+13\cdot\tfrac{1}{5}+18\cdot\tfrac{1}{5}+15\cdot\tfrac{1}{5}=15.$$

Zauważmy, że dla jednakowo dokładnych pomiarów wartością przeciętną jest średnia arytmetyczna wyników pomiarów.

ZADANIE 20.49. Znaleźć wartość przeciętną zmiennej losowej, której gęstość $f(x)$ wyraża się wzorami

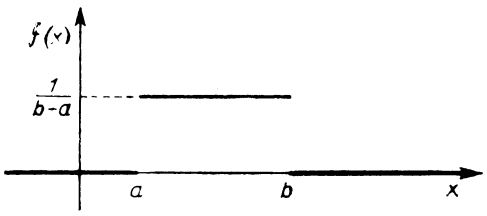
(1)
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{dla} \quad a<x<b, \\ 0 & \text{dla} \quad x \leqslant a \quad \text{oraz} \quad x \geqslant b. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Zgodnie ze wzorem (20.5.2) uwzględniając (1) otrzymamy

$$m=E(X)=\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0\,dx+\int_{a}^{b} x\cdot\frac{dx}{b-a}+\int_{b}^{+\infty} x\cdot 0\,dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x\,dx=\frac{a+b}{2}.$$

Wartością przeciętną jest więc — zgodnie z intuicją — odcięta środka przedziału $\langle a,b\rangle$.

O zmiennej losowej, której gęstość $f(x)$ (rys. 20.3) wyraża się wzorem (1) mówimy, że ma *rozkład równomierny* (*jednostajny, prostokątny*).



Rys. 20.3

Momentem zwykłym rzędu k zmiennej losowej X nazywamy wartość przeciętną zmiennej losowej X^k. Jeżeli moment ten oznaczymy m_k, to dla zmiennej losowej skokowej X mamy

$$m_k=E(X^k)=\sum_i x_i^k p_i, \tag{20.5.3}$$

a dla zmiennej losowej ciągłej X mamy

$$m_k=E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx, \tag{20.5.4}$$

przy czym zakładamy, że zarówno szereg, jak i całka są zbieżne bezwzględnie.

Zmienną losową postaci

$$Z=X-E(X) \tag{20.5.5}$$

nazywamy *zmienną scentrowaną* lub *odchyleniem zmiennej losowej* X od jej wartości przeciętnej. *Wariancją zmiennej losowej* X nazywamy moment zwykły rzędu drugiego zmiennej losowej Z. Wariancję zmiennej losowej X oznaczamy $V(X)$ lub $D^2(X)$. Zatem

$$V(X)\equiv D^2(X)=E\big(X-E(X)\big)^2. \tag{20.5.6}$$

Wzór ten łatwo sprowadzić do postaci

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X). \tag{20.5.7}$$

Dla zmiennej losowej skokowej X przyjmującej skończoną liczbę wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, każdą z prawdopodobieństwem $p_1, p_2, \ldots, p_n$, wariancję oblicza się według wzoru

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\bar{x})^2, \quad \text{gdzie} \quad \bar{x}=\sum_{1}^{n} p_i x_i. \tag{20.5.8}$$

Jeżeli $p_i=1/n$ dla $i=1, 2, \ldots, n$, to

$$V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2. \tag{20.5.9}$$

Wzór ten łatwo sprowadzić do postaci

$$V(X)\equiv D^2(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2. \tag{20.5.10}$$

Pierwiastek kwadratowy z wariancji nosi nazwę *odchylenia standardowego* (dawniej nazywano je odchyleniem średnim) i jest oznaczany symbolem σ_x lub po prostu σ.

Zatem

$$\sigma\equiv\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{D^2(X)}. \tag{20.5.11}$$

Jeżeli określoną wzorem (20.5.5) zmienną losową Z podzielimy przez odchylenie standardowe σ_x zmiennej losowej X, to tak otrzymaną zmienną losową

$$T=\frac{Z}{\sigma_x}=\frac{X-E(X)}{\sigma_x} \tag{20.5.12}$$

nazywamy *zmienną losową standaryzowaną* (*unormowaną*). Ma ona wartość przeciętną równą 0, a wariancję (i odchylenie standardowe) równą 1, tzn.

$$E(T)=0, \quad V(T)=1.$$

Zarówno wariancja, jak i odchylenie standardowe określają miarę rozproszenia (rozrzutu, dyspersji) zmiennej losowej X od jej wartości przeciętnej.

ZADANIE 20.50. Obliczyć wariancję i odchylenie standardowe zmiennej losowej z zadania 20.48.

Rozwiązanie. W zadaniu 20.48 obliczyliśmy, że $m=E(X)=15$. Dalsze obliczenia dokonujemy za pomocą tabelki:

x_i	12	17	13	18	15
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_i-m	-3	2	-2	3	0
$(x_i-m)^2$	9	4	4	9	0
$p_i(x_i-m)^2$	$9\cdot\frac{1}{5}$	$4\cdot\frac{1}{5}$	$4\cdot\frac{1}{5}$	$9\cdot\frac{1}{5}$	$0\cdot\frac{1}{5}$

Zatem — wobec tego, że w tym zadaniu wszystkie $p_i=\frac{1}{5}$ — mamy zgodnie ze wzorem (20.5.9)

$$V(X)=\tfrac{1}{5}(9+4+4+9+0)=\tfrac{26}{5},$$

skąd $\sigma=\sqrt{\frac{26}{5}}\approx 2{,}280$.

Zadania

20.51. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x)=\begin{cases}|x| & \text{dla} \quad -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & \text{dla pozostałych } x.\end{cases}$$

a) Naszkicować wykres gęstości, b) obliczyć $E(X)$ i $V(X)$, c) wyznaczyć dystrybuantę, d) obliczyć $P\{|X|>\frac{1}{2}\}$ i zaznaczyć je na wykresie gęstości oraz na wykresie dystrybuanty.

20.52 Rzucamy monetą 4 razy. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie wyrzuconych orłów; a) podać rozkład tej zmiennej losowej, b) obliczyć $E(X)$ i $V(X)$, c) obliczyć $P\{1\leqslant X<3\}$.

20.53. Gracz rzuca raz kostką i otrzymuje 1 zł, gdy wyrzuci parzystą liczbę oczek, otrzymuje 2 zł, gdy wyrzuci 5 oczek, w pozostałych przypadkach przegrywa 3 zł; a) podać rozkład zmiennej losowej X, która jest wygraną gracza, b) wyznaczyć dystrybuantę zmiennej X i naszkicować ją, c) wyznaczyć wartość przeciętną tej zmiennej i odpowiedzieć na pytanie, czy gra jest sprawiedliwa, tj. czy $E(X)=0$.

20.54. Dystrybuanta zmiennej losowej X określona jest wzorem

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad x<0,\\ 0{,}5-0{,}5\cos x & \text{dla} \quad 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 1 & \text{dla} \quad x>\pi;\end{cases}$$

a) znaleźć gęstość, b) obliczyć $E(X)$, $V(X)$, c) obliczyć prawdopodobieństwo $P\{0\leqslant X\leqslant \pi\}$.

§ 20.6. ROZSTĘP, MEDIANA, MODA

Dla zmiennej losowej skokowej X, przyjmującej skończoną liczbę wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$, za miarę rozproszenia przyjmuje się też tzw. *rozstęp* R, definiowany za pomocą wzoru

$$R=x_{\max}-x_{\min}, \tag{20.6.1}$$

gdzie $x_{\max}=\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_{\min}=\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

ZADANIE 20.55. Wracając do zadania 20.48 widzimy, że $x_{\max}=18$, $x_{\min}=12$, zatem

$$R=x_{\max}-x_{\min}=18-12=6.$$

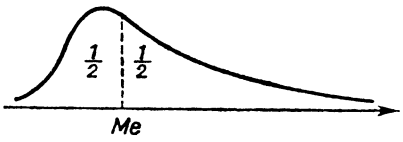
Medianą (wartością środkową) zmiennej losowej ciągłej X nazywamy taką wartość $x=m_e$, dla której dystrybuanta jest równa $\frac{1}{2}$, tzn. (rys. 20.4):

$$F(m_e)=\tfrac{1}{2}. \tag{20.6.2}$$

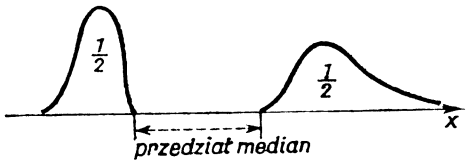
Innymi słowy mediana jest pierwiastkiem równania

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\tfrac{1}{2}. \tag{20.6.3}$$

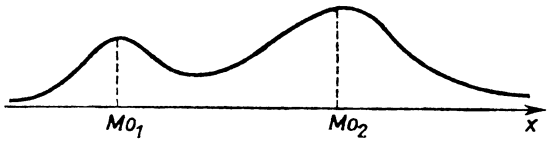
Wartość taka może być jedna, ale może ich być też nieskończenie wiele (rys. 20.5).



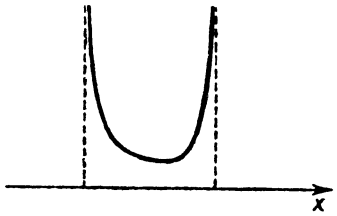
Rys. 20.4



Rys. 20.5



Rys. 20.6



Rys. 20.7

Modą (*wartością modalną, dominantą*) *zmiennej losowej ciągłej* X nazywamy każdą odciętą m_0 maksimum lokalnego gęstości $f(x)$ (jeśli takie istnieją). Widzimy więc, że w przypadku gdy gęstość jest funkcją różniczkowalną, warunkiem koniecznym istnienia mody m_0 jest spełnienie równości

$$f'(m_0)=0. \tag{20.6.4}$$

Rysunek 20.6 ilustruje gęstość *rozkładu dwumodalnego*.

Zwracamy uwagę, że istnieją tzw. *rozkłady antymodalne*, tzn. nie mające mody, co ilustruje rysunek 20.7.

Zadania

20.56. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \quad \text{dla} \quad x\in R;$$

a) wyznaczyć dystrybuantę, b) obliczyć medianę i modę, c) czy wartość przeciętna istnieje?

20.57. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Obliczyć $E(X)$, $V(X)$, medianę i modę.

20.58. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{przy} \quad x\leqslant 0,\\ Cxe^{-x^2} & \text{przy} \quad x>0;\end{cases}$$

a) wyznaczyć C, b) obliczyć medianę i modę, c) obliczyć $E(X)$ i $V(X)$.

20.59. Gęstość rozkładu zmiennej losowej wyraża się wzorem

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{przy} \quad x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{(\ln x-a)^2}{2}\right] & \text{przy} \quad x>0.\end{cases}$$

Obliczyć $E(X)$ i $V(X)$.

§ 20.7. TWIERDZENIE BERNOULLIEGO. ROZKŁAD DWUMIANOWY (BERNOULLIEGO)

Powiemy, że doświadczenia $D_1, D_2, \ldots, D_n$ są *niezależne zespołowo*, jeśli wyniki ich będące zdarzeniami losowymi, są niezależne zespołowo.

TWIERDZENIE BERNOULLIEGO. *Prawdopodobieństwo $b(k; n, p)$, że w ciągu n niezależnych doświadczeń, takich że w wyniku każdego z nich może zajść dane zdarzenie z tym samym prawdopodobieństwem p, realizuje się dane zdarzenie k razy $(k=0, 1, \ldots, n)$ w dowolnej kolejności, jest równe*

$$b(k;n,p)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k} \quad (q=1-p,\ k=0,1,\ldots,n). \tag{20.7.1}$$

Mówimy, że zmienna losowa X skokowa ma *rozkład dwumianowy* (*Bernoulliego*), jeśli przy danych wartościach n, p może przyjąć wartości $0, 1, \ldots, k, \ldots, n$, każdą odpowiednio z prawdopodobieństwem $b(k, n, p)$ danym wzorem (20.7.1).

Zauważmy, że

$$\sum_{k=0}^{n} b(k,n,p)=(q+p)^n=1. \tag{20.7.2}$$

Łatwo policzyć, że w rozkładzie dwumianowym Bernoulliego wartość przeciętna jest równa

$$E_B(X)=np, \tag{20.7.3}$$

a wariancja – równa

$$V_B(X)=npq, \tag{20.7.4}$$

skąd

$$\sigma_B=\sqrt{npq}. \tag{20.7.5}$$

ZADANIE 20.60. Obliczyć, jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucając pięć razy kostką wyrzucimy trzy razy „piątkę", a następnie obliczyć wartość przeciętną oraz odchylenie standardowe.

Rozwiązanie. Mamy tu $n=5$, $p=\frac{1}{6}$, $k=3$, zatem

$$b\left(3;5,\frac{1}{6}\right)=\frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{10\cdot 5^2}{6^5}.$$

Dalej, $m_B=np=5\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$, a $\sigma_B=\sqrt{npq}=\sqrt{5\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=\frac{5}{6}$.

Gdy n jest duże, kłopotliwe obliczenie $b(k;n,p)$ ułatwiają tablice logarytmów silni (lub korzysta się z odpowiednich tablic wartości $b(k;n,p)$).

Liczba najbardziej prawdopodobna zdarzeń z prawdopodobieństwem p przy n doświadczeniach niezależnych jest to taka liczba k, dla której prawdopodobieństwo $b(k;n,p)$ jest największe. Wykazuje się, że:

1) jeśli $(n+1)p$ nie jest liczbą całkowitą, to najbardziej prawdopodobną liczbą zajść zdarzeń jest $[(n+1)p]$, tj. część całkowita liczby $(n+1)p$,

2) jeśli $(n+1)p$ jest liczbą całkowitą, to istnieją dwie najbardziej prawdopodobne (a więc jednakowo prawdopodobne) liczby zajść zdarzeń, są nimi $(n+1)p$ oraz liczba o jeden mniejsza, tj. $(n+1)p-1$.

ZADANIE 20.61. Znaleźć najbardziej prawdopodobną liczbę wyrzuconych „trójek" gdy rzucamy 17 razy kostką.

Rozwiązanie. Jest tutaj $n=17$, $p=\frac{1}{6}$, więc $(n+1)p=3$. Największe, a jednocześnie jednakowe prawdopodobieństwo jest, że wyrzucamy trzy albo dwa razy „trójkę".

Zadania

20.62. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w każdym doświadczeniu jest równe $\frac{1}{3}$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu 9 niezależnych doświadczeń zdarzenie A zajdzie 6 razy w dowolnej kolejności.

20.63. Obliczyć prawdopodobieństwo, że spośród 15 przejeżdżających samochodów osobowych dwa posiadają numer rejestracyjny zakończony cyfrą 5.

20.64. Na wykład przybyło 365 studentów. Zakładając, że prawdopodobieństwo urodzenia się każdego z nich określonego dnia w roku wynosi $\frac{1}{365}$, obliczyć: a) prawdopodobieństwo, że trzech spośród tych studentów urodziło się 1 stycznia. Następnie zastępując liczbę 365 przez n, obliczyć: b) przybliżoną wartość tego prawdopodobieństwa przy n rosnącym nieograniczenie.

20.65. Z urny zawierającej 2 kule białe i 3 czarne losujemy 5 razy po 2 kule, przy czym po każdym losowaniu wylosowaną parę kul wrzucamy z powrotem do urny. Obliczyć prawdopodobieństwo trzykrotnego wylosowania pary kul różnokolorowych.

20.66. W hali fabrycznej znajdują się trzy typy maszyn: 50% typu A, 20% typu B, reszta typu C. Maszyny te produkują odpowiednio 3%, 5%, 4% braków. Z produkcji jednej zmiany wybrano losowo 5 sztuk towaru. Zakładając, że każda maszyna niezależnie od typu produkuje w tym czasie taką samą liczbę sztuk towaru, obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród pobranych pięciu sztuk: a) nie będzie braku, b) będzie jeden brak.

§ 20.8. TWIERDZENIE I ROZKŁAD POISSONA

TWIERDZENIE POISSONA. *Gdy przy* $n\to\infty$, *prawdopodobieństwo* $p_n\to 0$ *w ten sposób, że* $\lim_{n\to\infty} np_n=\lambda$ *jest stałą, to dla każdego* k

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ np_n=\lambda}} b(k;n,p_n)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad (k=0,1,2,\ldots). \tag{20.8.1}$$

Twierdzenie to nosi również nazwę *prawa małych liczb.*

Uwaga. Wzór powyższy można stosować, gdy

1) n jest rzędu kilkudziesięciu,

2) $0<p_n\leqslant 0{,}1$,

3) np_n nie przekracza kilkunastu.

Dla wygody zapisu lewą stronę wzoru (20.8.1) oznaczać będziemy $p(k;\lambda)$; tak więc

$$p(k;\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad (k=0,1,2,\ldots). \tag{20.8.2}$$

ZADANIE 20.67. Prawdopodobieństwo wyprodukowania braku przy pewnej precyzyjnej produkcji wynosi średnio 3 promille. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w partii liczącej 1000 sztuk będą dokładnie 2 braki.

Rozwiązanie. Mamy tutaj $n=1000$, $p=0{,}003$, więc $\lambda=np=3$, czyli wszystkie trzy warunki są spełnione. Stosując wzór (20.8.2), otrzymujemy

$$p(2;3)=\frac{e^{-3}3^2}{2!}=\frac{9}{2e^3}\approx 22.5\%.$$

Mówimy, że zmienna losowa skokowa X ma *rozkład Poissona*, jeśli przyjmuje wartości $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$, każdą odpowiednio z prawdopodobieństwem $p(k;\lambda)$ danym wzorem (20.8.2). Zauważmy, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(k;\lambda)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1. \tag{20.8.3}$$

W rozkładzie Poissona wartość przeciętna $E_P(X)$ wyraża się wzorem

$$E_P(X)=\lambda, \tag{20.8.4}$$

a wariancja – wzorem

$$V_P(X)=\lambda, \tag{20.8.5}$$

skąd

$$\sigma_P=\sqrt{\lambda}. \tag{20.8.6}$$

Zadania

20.68. W paczce igieł dziewiarskich zawierającej 1000 sztuk znajduje się średnio 0,3% braków. Obliczyć prawdopodobieństwo, że liczba braków w tej paczce będzie: a) jedna, b) co najmniej dwie, c) obliczyć najbardziej prawdopodobną liczbę braków oraz d) prawdopodobieństwo wystąpienia jej.

20.69. Zmienna losowa X przyjmuje wartości całkowite nieujemne z prawdopodobieństwami $p_k=C\frac{a^k}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$ Wiadomo, że $E(X)=\lambda$. Obliczyć C i a.

20.70. Dane z zad. 20.67. Obliczyć prawdopodobieństwo, że liczba braków wyniesie nie więcej niż trzy.

§ 20.9. ROZKŁAD NORMALNY

Mówimy, że zmienna losowa X ciągła ma *rozkład normalny*, jeżeli jej gęstość wyraża się wzorem

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (-\infty<x<+\infty), \tag{20.9.1}$$

przy czym $-\infty<m<+\infty$, $\sigma>0$ są stałymi. Dystrybuanta tego rozkładu ma postać

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)dt. \tag{20.9.2}$$

W rozkładzie normalnym wartość przeciętna jest równa parametrowi m, a odchylenie standardowe – parametrowi σ, tzn

$$E_N(X)=m, \quad V_N(X)=\sigma^2. \tag{20.9.3}$$

Rozkład normalny o parametrach m, σ oznaczamy $N(m,\sigma)$. Rozkład normalny $N(0,1)$, czyli *rozkład normalny standaryzowany*, ma gęstość określoną wzorem

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}, \tag{20.9.4}$$

a dystrybuantę – wzorem

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt. \tag{20.9.5}$$

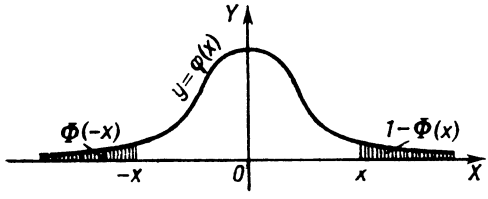
Wykres funkcji $\varphi(x)$ podajemy na rysunku 20.8.

Ze wzoru (20.9.4) wynika, że funkcja $\varphi(x)$ jest parzysta, tzn.

$$\varphi(-x)=\varphi(x), \tag{20.9.6}$$

a z rysunku 20.8 wnioskujemy, że

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x). \tag{20.9.7}$$



Rys. 20.8

Ze względu na liczne zastosowania funkcji (20.9.4 i 5) zostały stablicowane. Na str. 425 podajemy tablicę wartości funkcji $\Phi(x)$ dla x dodatnich. Dla x ujemnych wartość funkcji $\Phi(x)$ obliczamy korzystając z własności (20.9.7).

Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa o rozkładzie $N(m, \sigma)$ przyjmie wartość z przedziału $\langle x_1, x_2\rangle$, wyraża się wzorem (por. § 20.4, wzór (20.4.8)):

$$P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)dx=F(x_2)-F(x_1). \tag{20.9.8}$$

Korzystanie z tego wzoru byłoby jednak kłopotliwe. Standaryzując zmienną X, tzn. wprowadzając nową zmienną t za pomocą wzoru

$$t=\frac{X-m}{\sigma}, \tag{20.9.9}$$

wzór (20.9.8) sprowadzimy do postaci

$$P\{x_1\leqslant X\leqslant x_2\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=\Phi(t_2)-\Phi(t_1), \tag{20.9.10}$$

gdzie

$$t_1=\frac{x_1-m}{\sigma}, \quad t_2=\frac{x_2-m}{\sigma}, \tag{20.9.11}$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,500	1,30	0,903	2,60	0,995
0,05	0,520	1,35	0,911	2,65	0,996
0,10	0,540	1,40	0,919	2,70	0,997
0,15	0,560	1,45	0,926	2,75	0,997
0,20	0,579	1,50	0,933	2,80	0,997
0,25	0,587	1,55	0,939	2,85	0,998
0,30	0,608	1,60	0,945	2,90	0,998
0,35	0,637	1,65	0,951	2,95	0,998
0,40	0,655	1,70	0,955	3,00	0,999
0,45	0,674	1,75	0,960		
0,50	0,691	1,80	0,964	3,10	0,999 03
0,55	0,709	1,85	0,968		
0,60	0,726	1,90	0,971	3,20	0,999 31
0,65	0,742	1,95	0,874		
0,70	0,758	2,00	0,977	3,30	0,999 51
0,75	0,773	2,05	0,980		
0,80	0,780	2,10	0,982	3,40	0,999 66
0,85	0,802	2,15	0,984		
0,90	0,816	2,20	0,986	3,50	0,999 76
0,95	0,829	2,25	0,988		
1,00	0,841	2,30	0,989	3,60	0,999 84
1,05	0,853	2,35	0,991		
1,10	0,864	2,40	0,992	3,70	0,999 89
1,15	0,875	2,45	0,993		
1,20	0,885	2,50	0,994	3,80	0,999 93
1,25	0,894	2,55	0,995		

wyrażającej się za pomocą dystrybuanty rozkładu standaryzowanego $N(0, 1)$, której wartości są stablicowane.

ZADANIE 20.71. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(15, 2)$. Obliczyć prawdopodobieństwo spełnienia nierówności $|X-13|<5$.

Rozwiązanie. Z rozwiązania nierówności $|X-13|<5$ otrzymujemy $8<X<18$. Zatem

$$P\{|X-13|<5\}=P\{8<X<18\}.$$

Korzystając ze wzorów (20.9.11) obliczamy

$$t_1=\frac{8-15}{2}=-\frac{7}{2}, \qquad t_2=\frac{18-15}{2}=\frac{3}{2},$$

skąd na podstawie wzoru (20.9.10) (przy uwzględnieniu wzoru (20.9.7) obliczamy

$$P\{8<X<18\}=\Phi(\tfrac{3}{2})-\Phi(-\tfrac{7}{2})=\Phi(\tfrac{3}{2})-[1-\Phi(\tfrac{7}{2})]=\Phi(\tfrac{3}{2})+\Phi(\tfrac{7}{2})-1.$$

Z tablicy odczytujemy, że $\Phi(\frac{3}{2})=0{,}933$, $\Phi(\frac{7}{2})=0{,}999$, zatem

$$P\{|X-13|<5\}=0{,}933+0{,}999-1=0{,}932\approx 93{,}2\%.$$

Zadania

20.72. W jednym układzie współrzędnych naszkicować gęstość rozkładów
a) $N(1, 1)$, $N(2, 1)$, $N(-\frac{1}{2}, 1)$,
b) $N(1, 1)$, $N(1, 2)$, $N(1, \frac{1}{2})$.
Wyjaśnić zaobserwowane prawidłowości.

20.73. Zmienna losowa X podlega rozkładowi $N(-1, \frac{5}{2})$. Obliczyć następujące prawdopodobieństwa:
a) $P\{0<X<2\}$, b) $P\{-2<X\leqslant 0\}$, c) $P\{X>1\}$,
d) $P\{|X-1|<1\}$, e) $P\{|2X+1|>2\}$.

20.74. Zmienna losowa X podlega rozkładowi $N(m, \sigma)$. Obliczyć:
a) $P\{|X-m|<\sigma\}$, b) $P\{|X-m|<3\sigma\}$,
c) dobrać stałą k, aby

$$P\{|X-m|<k\sigma\}=\begin{cases}0{,}99,\\0{,}95.\end{cases}$$

§ 20.10. PRZYBLIŻENIE ROZKŁADU BERNOULLIEGO DO ROZKŁADU NORMALNEGO

Gdy liczba n niezależnych doświadczeń w zagadnieniu Bernoulliego jest duża oraz $0<p<1$, można aproksymować rozkład Bernoulliego przez rozkład normalny $N(m, \sigma)$ z parametrami

$$m=np, \quad \sigma=\sqrt{npq} \tag{20.10.1}$$

zgodnie ze wzorami (20.7.3) i (20.7.5). Przez standaryzowanie zmiennej losowej sprowadzamy rozkład $N(m, \sigma)$ do rozkładu normalnego $N(0, 1)$. Wynika to z twierdzenia

TWIERDZENIE MOIVRE'A-LAPLACE'A. *Prawdopodobieństwo, że liczba S_n pomyślnych zdarzeń o stałym prawdopodobieństwie p $(0<p<1)$ w serii n niezależnych doświadczeń po zestandaryzowaniu będzie się zawierała w przedziale $\langle a, b\rangle$, spełnia związek*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{a\leqslant\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\leqslant b\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{1}{2}t^2}dt, \tag{20.10.2}$$

gdzie a, b mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

ZADANIE 20.75. Prawdopodobieństwo produkcji braku w pewnej gałęzi przemysłu wynosi średnio 2%. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w partii liczącej 2500 sztuk liczba braków B będzie się zawierać pomiędzy 36 a 57.

Rozwiązanie. Mamy tu $n=2500$, $p=0{,}02$, $q=0{,}98$, więc $np=50$, $\sqrt{npq}=7$. Z treści zadania wynika, że ma być $36\leqslant B\leqslant 57$, więc po dokonaniu standaryzacji będzie

$$\frac{36-50}{7}\leqslant\frac{B-np}{\sqrt{npq}}\leqslant\frac{57-50}{7},$$

czyli

$$P\{36\leqslant B\leqslant 57\}=P\left\{-2\leqslant\frac{B-np}{npq}\leqslant 1\right\}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{1}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt=$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-2)=0{,}841-(1-0{,}977)\approx 81{,}8\%.$$

Uwaga. Mogłoby się wydawać, że wobec małego prawdopodobieństwa ($p=0{,}02$) oraz dużego n ($n=2500$) należy tu stosować wzór Poissona. Jak wynika jednak z uwagi zamieszczonej po wzorze (20.8.1) z trzech warunków stosowalności wzoru Poissona spełnione są tu tylko pierwsze dwa.

Zadania

20.76. Prawdopodobieństwo przekroczenia granic tolerancji dla pojedynczego elementu wynosi 20%. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ze 100 pobranych losowo elementów takich, które przekroczą granice tolerancji, będzie: a) nie więcej niż 20, b) co najmniej 30.

20.77. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w jednym doświadczeniu jest równe 0,4. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu 600 niezależnych doświadczeń liczba zajść zdarzenia A zawiera się pomiędzy 200 a 250.

20.78. Ile niezależnych doświadczeń należy wykonać, aby z prawdopodobieństwem 90% częstość zdarzenia różniła się (co do wartości bezwzględnej) od prawdopodobieństwa tego zdarzenia równego 0,4 nie więcej niż o 0,1?

Wskazówka. Ma być $0{,}3<\frac{k_n}{n}<0{,}5$, gdzie $\frac{k_n}{n}$ częstość względna; ale $E_B(k)=0{,}4\,n$, $\sigma_B=\sqrt{n\cdot 0{,}4\cdot 0{,}96}=0{,}62\sqrt{n}$, po zestandaryzowaniu otrzymamy równanie

$$P\left\{\frac{-0{,}1n}{0{,}62\sqrt{n}}<t<\frac{0{,}1n}{0{,}62\sqrt{n}}\right\}=0{,}90,$$

skąd $\Phi(0{,}16\sqrt{n})-\Phi(-0{,}16\sqrt{n})=0{,}90$, dalej wzór (20.10.2).

§ 20.11. PRAWO WIELKICH LICZB BERNOULLIEGO

Oznaczmy przez k_n liczbę pomyślnych zdarzeń (sukcesów) w n niezależnych doświadczeniach o stałym prawdopodobieństwie p zajścia zdarzenia pomyślnego w jednym doświadczeniu, wówczas stosunek k_n/n jest zmienną losową i nazywa się *częstością względną zdarzenia pomyślnego*.

Na początku XVIII w. Bernoulli sformułował i udowodnił twierdzenie dotyczące granicznego zachowania się częstości względnej k_n/n przy $n\to+\infty$.

PRAWO WIELKICH LICZB BERNOULLIEGO. *Jeśli liczba doświadczeń n rośnie nieograniczenie, to prawdopodobieństwo, że częstość względna k_n/n zdarzeń pomyślnych różni się od prawdopodobieństwa p zdarzenia pomyślnego o więcej niż ε, dąży do zera przy każdej dowolnie małej dodatniej liczbie ε, tzn.*

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{k_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}=0. \tag{20.11.1}$$

Dla sprawdzenia tego prawa dokonywano długich serii rzutów monetą, a oto wyniki otrzymane

liczba rzutów	liczba orłów	częstość względna
4 040	2 048	0,50693
24 000	12 012	0,50005

Mniej ściśle wypowiada się prawo wielkich liczb Bernoulliego w następującej postaci

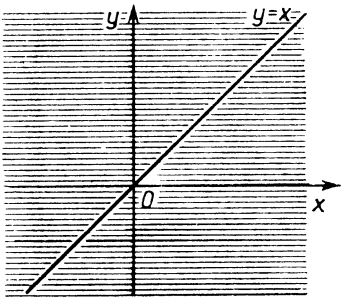
Przy dużej liczbie doświadczeń z praktyczną pewnością częstość względna k_n/n różni się mało od prawdopodobieństwa p.

ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

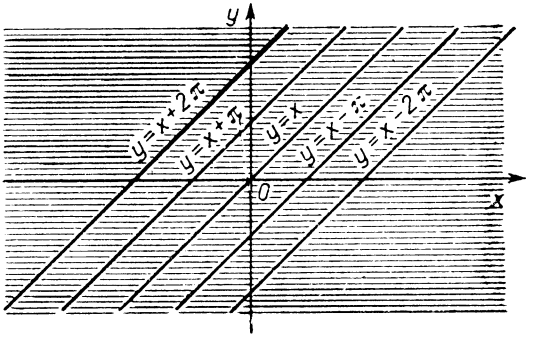
DO ROZDZIAŁU I

1.1. 13; jest to odległość tego punktu od początku układu współrzędnych czyli od punktu zerowego.

1.3. Suma mnogościowa $A \cup B = \{1, 4, 2, 7\}$, suma algebraiczna $A + B = \{3, 5, 6, 8, 11\}$.



Rys. R.1.1



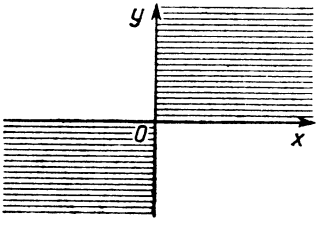
Rys. R.1.2

1.4. a) obszar ograniczony (wnętrze prostokąta);

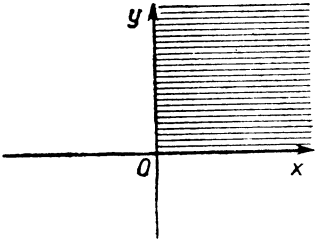
b) obszar domknięty ograniczony (prostokąt o bokach $2a$, $2b$ wraz z brzegiem);

c) zbiór otwarty (ale nie obszar) nieograniczony;

d) zbiór ograniczony, którego każdy punkt jest brzegowy



Rys. R.1.3



Rys. R.1.4

1.5. a) nie; b) tak do $(1, 0)$; c) tak do $(2, 1)$; d) nie.

1.6. a) Cała płaszczyzna poza prostą $y = x$ (rys. R.1.1);

b) cała płaszczyzna z wyjątkiem nieskończenie wielu prostych równoległych o równaniach postaci $y = x + k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą (rys. R.1.2);

c) I i III ćwiartka płaszczyzny (domknięte) (rys. R.1.3);

d) I ćwiartka płaszczyzny (domknięta) (rys. R.1.4);

e) część płaszczyzny ograniczona prostymi $y=x$ i $y=-x$, a zawierająca oś Ox (rys. R.1.5).

1.11. Nie istnieje.

1.12. Nie istnieje.

1.13. Istnieje i równa się 0.

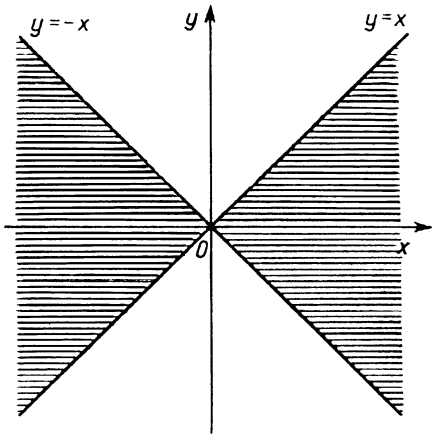
1.14. Istnieje i równa się 1.

1.15. Istnieje i równa się $\frac{1}{6}$.

1.16. Nie istnieje.

1.17. Istnieje i równa się 0.

1.18. Nie istnieje.



Rys. R.1.5

1.19. Funkcja jest ciągła w (0, 1), więc jej granica równa się wartości funkcji w tym punkcie, tj. $\sin \pi = 0$.

1.20. Nie istnieje.

1.21. Istnieje i równa się 0.

1.22. Nie istnieje.

1.23. Istnieje i równa się 0.

1.24. Istnieje i równa się 0.

1.25. Istnieje i równa się 0.

1.26. Istnieje i równa się e.

1.27. Istnieje i równa się 1.

1.28. Istnieje i równa się $\frac{1}{2}$.

1.29. Nie istnieje.

1.45. $\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2xyz^3-\sin z$, $\frac{\partial u}{\partial z}=3xy^2z^2-y\cos z$.

1.46. $y>0$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}-\frac{e^z}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=-e^z\ln y$.

1.47. $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\frac{y}{2x\sqrt{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

1.48. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-y\cos\alpha}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-x\cos\alpha}{z}$.

1.49. $\frac{\partial l}{\partial \rho}=e^{\pi\cos\varphi}$, $\frac{\partial l}{\partial \varphi}=-\rho\pi\sin\varphi e^{\pi\cos\varphi}$.

1.50. $\operatorname{tg} y>0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\cos(x^2)\sqrt{\operatorname{tg} y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\sin(x^2)}{2\cos^2 y\sqrt{\operatorname{tg} y}}+e^{\sin z}\sin 2y$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-e^{\sin z}\cos^2 y\cos z.$$

1.51. $z>0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+\cos^2 y}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos y\left(\dfrac{-\sin y}{\sqrt{x^4+\cos^2 y}}+e^{\sqrt{z}}\right)$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{\sin y}{2\sqrt{z}}e^{\sqrt{z}}$.

1.52. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=100y^2z^4(5xy^2-3yz^2)^{19}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=20z^4(5xy^2-3yz^2)^{19}(10xy-3z^2)$,

$$\frac{\partial u}{\partial z}=4z^3(5xy^2-3yz^2)^{19}(5xy^2-33yz^2).$$

1.53. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{y}\,x^{\sqrt{y}-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\ln x}{2\sqrt{y}}x^{\sqrt{y}}$.

1.54. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yz(xy)^{z-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=xz(xy)^{z-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$.

1.55. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=zyx^{zy-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=zx^{zy}\ln x$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=yx^{zy}\ln x$.

1.56. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\ln(1+xy)+xy(1+xy)^{y-1}$.

1.57. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+\ln y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y(x+\ln y)}$.

1.58. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}$.

1.59. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\operatorname{ctg}(x-2t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}=-2\operatorname{ctg}(x-2t)$.

1.60. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x\ln y(\sin x)^{\ln y-1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\ln\sin x}{y}(\sin x)^{\ln y}$.

1.61. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z}{y}x^{\frac{1}{y-1}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-z}{y^2}x^{1/y}\ln x$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{1/y}$.

1.62. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=x^{y\operatorname{arc tg} z-1}y\operatorname{arc tg} z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{y\operatorname{arc tg} z}\ln x\operatorname{arc tg} z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{y\operatorname{arc tg} z}\dfrac{y\ln x}{1+z^2}$.

1.63. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y\sqrt{y}\sin 2x(y\sin^2 x+5)^{\sqrt{y}-1}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(y\sin^2 x+5)^{\sqrt{y}-1}\left[\frac{y\sin^2 x+5}{2\sqrt{y}}\ln(y\sin^2 x+5)+\sqrt{y}\sin^2 x\right].$$

1.64. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=6x^2-30xy^3-2\sin 2y$.

Wynik jest ilustracją twierdzenia: *Jeżeli pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji dwóch zmiennych, różniące się kolejnością, są ciągłe, to są równe.*

1.65. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=(3x+2z)^{\sqrt{yz}-1}\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}(3x+2z+6x\sqrt{yz})$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=(3x+2z)^{\sqrt{yz}}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}(1+\sqrt{yz}\ln(3x+2z)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=(3x+2z)^{\sqrt{yz}-1}\frac{y\sqrt{x}}{2\sqrt{z}}((3x+2z)\ln(3x+2z)+4z).$$

1.66. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x(\sin y)^{\sin z}(\sin x)^{(\sin y)^{\sin z}-1}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cos y\sin z(\sin y)^{\sin z-1}(\sin x)^{(\sin y)^{\sin z}}\ln\sin x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\cos z(\sin y)^{\sin z}(\sin x)^{(\sin y)^{\sin z}}\ln\sin x\ln\sin y.$$

1.73. $\dfrac{\pi R^3}{3}$, $\dfrac{2\pi Rh}{3}$. **1.74.** $\operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{3}}{15}$.

1.75. $\operatorname{tg}\alpha=4$, $\operatorname{tg}\alpha_1=\infty$, $\operatorname{tg}\beta=\infty$, $\operatorname{tg}\beta_1=4$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\gamma_1=\frac{1}{4}$.

1.76. $\dfrac{\partial S}{\partial a}=\dfrac{1}{2h}$, $\dfrac{\partial S}{\partial b}=\dfrac{1}{2h}$, $\dfrac{\partial S}{\partial h}=\frac{1}{2}(a+b)$. **1.82.** $z=\frac{25}{36}$. **1.83.** 3,98.

1.84. Błąd bezwzględny $\Delta V=1{,}1$, błąd względny $\delta_V=4\%$.

1.85. Błąd bezwzględny $\Delta V<1{,}3$.

1.92. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2\sin(4x+2y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin(4x+2y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=8\cos(4x+2y)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2\cos(4x+2y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=4\cos(4x+2y).$$

1.93. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{xe^y+y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xe^y+y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{xe^y+2y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(xe^y+1)e^{xe^y+y}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=e^{xe^y+y}(xe^y+1).$$

1.94. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2x}{x^2+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x^2+y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y-x^2)}{(x^2+y)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{(x^2+y)^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2x}{(x^2+y)^2}.$$

1.95. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$. **1.96.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{1}{x}\,y^{\ln x-1}(1+\ln x\ln y)$.

1.97. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y(2x-y)^3}}$. **1.98.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=0$.

1.99. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. **1.102.** $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}=0$.

1.105. $f(x+h,y+k)=2x^3+y^2+x^2y+(6x^2+2xy)h+(2y+x^2)k+(6x+y)h^2+$
$+2xhk+k+2h^3+h^2k$.

1.106. $f(x+h,y+k)=e^{xy}[1+yh+xk+\frac{1}{2}y^2h^2+(1+xy)hk+\frac{1}{2}x^2k^2+\frac{1}{6}y^3h^3+$
$+\frac{1}{2}(2y+xy^2)h^2k+\frac{1}{2}(2x+yx^2)hk^2+\frac{1}{6}x^3k^3+\ldots]$.

1.107. $f(x+h,y+k)=$

$$=\ln xy+\frac{1}{x}h+\frac{1}{y}k-\frac{1}{2x^2}h^2-\frac{1}{2y^2}k^2+\frac{1}{3x^3}h^3+\frac{1}{3y^3}k^3-\frac{1}{4x^4}h^4-\frac{1}{4y^4}k^4+\ldots$$

1.111. Funkcja nie ma ekstremów.

1.112. W punktach $A(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $B(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ jest $z_{\min}=-8$, w punkcie $(0,0)$ nie istnieje ekstremum.

1.113. W punkcie $(0,-1)$ jest $z_{\min}=-7$.

1.114. W punkcie (a,a) jest $z_{\text{extr}}=-a^3$, przy czym przy $a>0$ zachodzi minimum, a przy $a<0$ jest maksimum.

1.115. Pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ jednocześnie równe zeru w punktach $A(0,-\frac{5}{2})$, $B(-1,-1)$ i $C(3,-1)$, ale ekstremum funkcji jest tylko w punkcie A, mianowicie $z_{\max}=\frac{75}{4}$.

1.116. W punkcie $(-\frac{4}{3},\frac{1}{3})$ jest $z_{\min}=-\frac{4}{3}$. **1.117.** $z_{\min}=-\frac{11}{3}$ w punkcie $(\frac{8}{3},\frac{2}{3})$.

1.118. $z_{\min}=-27\frac{1}{4}$ w punkcie $(\frac{27}{2},5)$. **1.119.** $z_{\min}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ w punkcie $(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2},\frac{1}{2}\sqrt[3]{2})$.

1.120. $z_{\min}=-1$ w punkcie $(1,0)$. **1.121.** $z_{\min}=-448$ w punkcie $(8,24)$.

1.122. $z_{\min}=-7$ w punkcie $(-1,3)$. **1.123.** $z_{\max}=1$ w punkcie $(0,0)$.

1.124. $z_{\max}=\frac{a^6}{432}$ w punkcie $(\frac{1}{6}a,\frac{1}{3}a)$. **1.125.** $z_{\min}=108$ w punkcie $(2,3)$.

1.126. $z_{\max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ w punkcie $(\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{3}\pi)$. **1.127.** $z_{\max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ w punkcie $(\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{6}\pi)$.

1.128. $z_{max}=\sin^3\frac{1}{3}a$ w punkcie $(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a)$.

1.129. W punkcie $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ jest $z_{max}=\frac{3}{8}\sqrt{3}$ w punkcie $(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$ jest $z_{min}=-\frac{3}{8}\sqrt{3}$.

1.130. W punkcie (1, 1) siodło $z=-1+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}$.

1.131. $z_{min}=7-10\ln 2$ w punkcie (1, 2).

1.132. $z_{min}=1$ w punkcie (0, 0), siodło $z=\frac{1}{2}e^{-2}$ w punkcie $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

1.133. $z_{max}=e^{-13}$ w punkcie (1, 3), $z_{min}=-26e^{-1/52}$ w punkcie $(-\frac{1}{26}, \frac{3}{26})$.

1.134. $z_{min}=-28$ w punkcie (2, 1), $z_{max}=28$ w punkcie $(-2, -1)$.

1.135. $z_{min}=0$ w punkcie (1, 0). **1.136.** Funkcja nie posiada ekstremów.

1.137. $z_{min}=-8$ w punktach $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

1.138. $z_{max}=\dfrac{ab}{3\sqrt{3}}$ w punktach $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}\right), \left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}}, -\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$,

$z_{min}=-\dfrac{ab}{3\sqrt{3}}$ w punktach $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, -\dfrac{b}{\sqrt{3}}\right), \left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)$.

1.139. $z_{max}=\sqrt{3}$ w punkcie $(1, -1)$.

1.140. Oznaczając odpowiadające bokom kąty środkowe przez x, y i $2\pi-x-y$ mamy $F=\frac{1}{2}r^2\,[\sin x+\sin y+\sin(2\pi-x-y)]$ F_{max}, jeśli kąty środkowe są równe, tj. jeśli trójkąt jest równoboczny.

1.141. $z=xy(a-x-y)$; z_{max}, gdy $x=y=\frac{1}{3}a$.

1.142. $F=\sqrt{s(s-x)(s-y)(x+y-s)}$; F_{max}, gdy trójkąt jest równoboczny.

1.143. $P_1(3, -3)$, $P_2(9, 5)$. **1.144.** $P(2, 2)$.

1.145. $x=y=z=\frac{2}{3}\sqrt{3}R$. **1.146.** $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **1.147.** Sześcian.

1.148. $a=\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a}$. **1.149.** $M(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. **1.150.** $\frac{3}{4}p$, $\frac{1}{4}p$, $\frac{3}{4}p$.

1.151. $x=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$, $y=\dfrac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$.

1.155. $z=-8$, $z=8$. **1.156.** $z=0$, $z=-2$. **1.157.** $z=0$, $z=2$.

DO ROZDZIAŁU II

2.7. $y'=\dfrac{-A}{B}$, $B\neq 0$.

2.8. $y'=\dfrac{b^2x}{a^2y}$, $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, $y'=\pm\dfrac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}}$, gdy $|x|>a$.

2.9. $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$. **2.10.** $y'=\dfrac{x(6xy-5)}{2(y-x^3)}$, gdy $y-x^3\neq 0$.

2.11. $y'=\dfrac{\cos y-\sin 2x}{x\sin y}$, gdy $x\neq 0$, $\sin y\neq 0$. **2.12.** $\frac{1}{2}$.

2.13. $x>0$, $y>0$, $y'=\dfrac{y(y^2-2x^2\ln y)}{x(x^2-2y^2\ln x)}$, $x^2-2y^2\ln x\neq 0$. **2.14.** $-\dfrac{y}{x}$.

2.15. $y'=\dfrac{(\operatorname{arc tg} y-y\cos x)(1+y^2)}{(1+y^2)\sin x-x}$, $(1+y^2)\sin x-x\neq 0$.

2.16. $y'=\dfrac{ye^{-x}+1}{e^{-x}+1}=\dfrac{1+(x+1)e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=e^x\dfrac{e^x+x+1}{(e^x+1)^2}$.

2.17. $\dfrac{x^2+ye^{y/x}}{(e^{y/x}-x)x}$. **2.18.** $\dfrac{2ye^{2x}-e^{2y}}{2xe^{2y}-e^{2x}}$. **2.19.** $\dfrac{y^x\ln y}{1-xy^{x-1}}$.

2.20. $y'=\dfrac{1}{y}\,\dfrac{b^2x-(x^2+y^2-ax)(2x-a)}{2(x^2+y^2-ax)-b^2}$, z zastrzeżeniem, że mianownik nie staje się zerem.

2.21. $y'=\dfrac{2Ax+By+D}{Bx+2Cy+E}$, gdy $Bx+2Cy+E\neq 0$,

$$y''=\frac{\Delta}{(Bx+2Cy+E)^2},\quad \text{gdzie}\quad \Delta=\begin{vmatrix} 2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix}.$$

2.22. $y'=\dfrac{x+1}{2-y}$, gdy $y\neq 2$; $y''=\dfrac{(y-2)^2+(x+1)^2}{(2-y)^3}$.

2.23. $y'=\frac{2}{3}$, $y''=0$. **2.24.** $y'=\dfrac{e^y}{2-y}$, gdy $y\neq 2$; $y''=\dfrac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^3}$.

2.25. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{y-1}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y}{(1-y)^3}$. **2.26.** $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y}{x^2}$.

2.27. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+\alpha y}{\alpha x-y}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(\alpha^2+1)(x^2+y^2)}{(\alpha x-y)^3}$.

2.28. $\dfrac{dx}{dt}=\frac{1}{8}\pi-1$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{8}\pi(1-\frac{1}{4}\pi)-1$.

2.29. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{4}\pi-1)$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=4(\frac{1}{4}\pi-1)\left[1+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}(\frac{1}{4}\pi-1)\right]$.

2.30. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{1}{4}$. **2.31.** $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{1}{4}$.

2.32. $\frac{dx}{dt}=8$, $\frac{d^2x}{dt^2}=144$.

2.33. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}=3$ lub -1; $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1}=8$ lub -8.

2.34. $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=2}=0$. **2.35.** $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\frac{1}{4}\pi}=-1$.

2.36. $\pm\frac{3}{4}$. **2.37.** a) $(-1,3)$ i $(-1,-1)$; b) $(1,1)$ i $(-3,1)$.

2.38. Równanie określające y jest równaniem pary prostych.

2.41. $z^2-xy\neq 0$; $z'_x=\frac{yz}{z^2-xy}$, $z'_y=\frac{xz}{z^2-xy}$,

$$z''_{xx}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3},\quad z''_{xy}=\frac{-z(x^2y^2+2xyz^2-z^4)}{(z^2-xy)^3},\quad z''_{yy}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$$

2.42. $z\neq 0$; $z'_x=-\frac{x}{z}$, $z'_y=-\frac{y}{4z}$,

$$z''_{xx}=-\frac{1}{z^3}(x^2+z^2),\quad z''_{xy}=-\frac{xy}{4z^3},\quad z''_{yy}=-\frac{1}{4z^3}(\tfrac{1}{4}y^2+z^2).$$

2.43. $ye^{zy}+x\neq 0$; $z'_x=-\frac{z}{ye^{zy}+x}$, $z'_y=-\frac{ye^{zy}}{ye^{zy}+x}$,

$$z''_{xx}=\frac{z(2x+2ye^{zy}-zy^2e^{zy})}{(ye^{zy}+x)^3},\quad z''_{xy}=\frac{e^{zy}[(ye^{zy}+x)(y+z+z^2y)-y^3e^{zy}]}{(ye^{zy}+x)^3},$$

$$z''_{yy}=-\frac{(e^{zy}+yze^{zy})(x^2-y^2e^{2zy})+y^4e^{3zy}}{(ye^{zy}+x)^3}.$$

2.44. $ye^z+e^{3x}\neq 0$; $z'_x=-\frac{3ze^{3x}}{ye^z+e^{3x}}$, $z'_y=-\frac{e^z}{ye^z+e^{3x}}$,

$$z''_{xx}=-\frac{9ze^{3x}(yze^{3x+z}+y^2e^{2z}-e^{6x})}{(ye^z+e^{3x})^3},\quad z''_{yy}=\frac{ye^{3z}+2e^{2z+3x}}{(ye^z+e^{3x})^3},$$

$$z''_{xy}=\frac{3e^{x+z}(zye^z+ze^{3x}-zye^{2x+z}+ye^{2x+z}+e^{5x})}{(ye^z+e^{3x})^3}.$$

2.45. $z'_x=\frac{y}{3e^{3z}+1}$, $z'_y=-\frac{x}{3e^{3z}+1}$, $z''_{xx}=-\frac{9y^2e^{3z}}{(3e^{3z}+1)^3}$.

$$z''_{yy}=-\frac{9x^2e^{3z}}{(3e^{3z}+1)^3},\quad z''_{xy}=-\frac{9xye^{3z}+9e^{6z}+6e^{3z}+1}{(3e^{3z}+1)^3}.$$

2.46. $z'_x=-\operatorname{tg}x$, $z'_y=-\operatorname{tg}y$.

2.47. $\sin(x+y+z)\neq 1$, $z'_x=-1$, $z'_y=-1$, $z''_{xx}=z''_{xy}=z''_{yy}=0$.

2.48. $z'_x=\frac{a}{c}$, $z'_y=\frac{b}{c}$. **2.49.** $z'_x=\frac{x^2-yz}{xy-z^2}$, $z'_y=\frac{6y^2-3xz-2}{3(xy-z^2)}$.

2.50. $z'_x=\frac{y}{2z}$, $z'_y=\frac{x}{2z}$. **2.53.** $z''_{xx}=\frac{4-4z+z^2+x^2}{(2-z)^3}$.

2.54. $z''_{xy}=\frac{36(1-2x)z^2y^2-2(4z^2-1)^2}{(4z^3-1)^3}$.

2.61. Funkcja przyjmuje minima w punktach $x=-13$, $x=1$ równe odpowiednio $y=\frac{15}{2}$ oraz $y=\frac{1}{2}$. Minima te są przyjęte na różnych gałęziach jednoznacznych określających daną funkcję uwikłaną.

2.62. Funkcja uwikłana przyjmuje w punkcie $x=4$ minimum $y=1$ oraz maksimum $y=3$. Punkty (4,1), (4,3) leżą na różnych gałęziach jednoznacznych określających tę funkcję.

2.63. Funkcja uwikłana przyjmuje w punkcie $x=\sqrt[3]{3}$ maksimum $y=\sqrt[3]{9}$ oraz minimum $y=-\sqrt[3]{9}$. Punkty $(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9})$ oraz $(\sqrt[3]{3}, -\sqrt[3]{9})$ leżą na różnych gałęziach jednoznacznych określających tę funkcję.

2.64. W punkcie $x=-1$ funkcja przyjmuje maksimum $y=1$.

2.65. W punkcie $x=4\sqrt[3]{2}$ funkcja przyjmuje maksimum $y=4\sqrt[3]{4}$.

2.66. $z\neq 1$, funkcja uwikłana wieloznaczna $z=f(x,y)$ przyjmuje na jednej gałęzi w punkcie (1, 1) minimum $z=0$, a na drugiej gałęzi w tym samym punkcie (1, 1) maksimum $z=2$.

2.67. $z\neq\frac{2}{3}$, funkcja uwikłana wieloznaczna $z=f(x,y)$ przyjmuje na jednej gałęzi w punkcie $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ minimum $z=\frac{4-\sqrt{6}}{6}$, a na drugiej gałęzi w tym samym punkcie $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ maksimum $z=\frac{4+\sqrt{6}}{6}$.

2.68. $z_{\min}=-12\sqrt{3}$, gdy $x=-6$, $y=6\sqrt{3}$;
$z_{\max}=12\sqrt{3}$, gdy $x=-6$, $y=-6\sqrt{3}$.

2.69. Funkcja osiąga maximum w punkcie $(0,0,c)$, zaś minimum w punkcie $(0,0,-c)$.

2.70. Funkcja osiąga minimum w punkcie $(0,0,0)$.

2.73. $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{1}{2}$, $u=x+y$, $v=x-y$, $\Delta=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant z,\ 1-x\leqslant y\leqslant 2-x\}$.

2.74. $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\sqrt{u}$, $u=x$, $v=\frac{y}{x}$, $x>0$, $\Delta=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$.

2.75. $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=-1$, $u=x$, $v=x-y$, $\Delta=\{(x,y)\colon 0<x<1,\ 0<y<1\}$.

2.76. $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=-5$, $u=\dfrac{x+3y}{5}$, $v=x-2y$.

2.77. $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{1}{3}$, $u=\dfrac{y^2}{x}$, $v=\dfrac{x^2}{y}$, $(x,y)\neq(0,0)$.

Obrazem prostej $u=a$ jest parabola $y^2=ax$, a prostej $v=b$ parabola $y=\dfrac{x^2}{b}$.

2.79. $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}=r$.

2.80. Przekształcenie jest jednokrotne, bo jakobian jest różny od zera.

2.83. $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=2x(y-z+1)$, $x\neq 0$, $y\neq z-1$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+z-yz-z^2}{x(z-y-1)},\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{y(y+z)}{y(z-y-1)}.$$

2.84. $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=-e^y-e^z$. Jakobian układu jest zawsze różny od zera.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^z-e^x}{e^y-e^z},\qquad \frac{dz}{dx}=\frac{e^y-e^x}{e^y-e^z}.$$

2.85. $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=-\dfrac{(z+y)}{zy}$, $y\neq -z$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(x-z)}{x(z+y)}$, $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{z(x+y)}{x(z+y)}$.

2.86. $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\dfrac{2(z-y^2)}{y}$, $y^2\neq z$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{yz}{x(y^2-z)}$, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{y^2}{x(y^2-z)}$.

2.87. $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=1-8yz$, $y\neq\dfrac{1}{8z}$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2(2z-x)}{8yz-1}$, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1-4xy}{8yz-1}$.

2.90. Funkcja przyjmuje minimum w punkcie $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ równe $\frac{3}{4}$.

2.91. Funkcja przyjmuje minimum w punktach $(1,1)$, $(-1,-1)$ równe 2.

2.92. W punkcie $(1,1)$ funkcja osiąga minimum równe 2.

2.93. Funkcja przyjmuje maksimum w punkcie $(0,0)$ równe 0.

2.94. $(2,2)$ lub $(-2,2)$ funkcja osiąga maksimum $f(x,y)=4$; $(2,-2)$ lub $(-2,2)$ minimum równe -4.

2.95. Funkcja przyjmuje minimum w punkcie $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ równe $-\sqrt{2}$, maksimum w punkcie $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, równe $\sqrt{2}$.

2.96. W punkcie $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ funkcja osiąga minimum równe $\frac{8}{9}$.

2.97. $x=-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}1$, $y=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}1$.

2.98. Dla punktów spełniających równanie

$$\sin^2 x=\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\pm a}{2(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \sin^2 y=\frac{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\pm b}{2(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}};$$

funkcja osiąga ekstrema

$$f_{\min}(x,y)=\tfrac{1}{2}[a+b-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}],\quad f_{\max}(x,y)=\tfrac{1}{2}[a+b+(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}].$$

2.99. Funkcja osiąga maksimum

$$f(x,y)=5\arcsin(\tfrac{3}{4})^2+3\arccos\tfrac{3}{4}=5{,}155.$$

2.102. $\frac{3}{2}$. **2.103.** 4. **2.104.** 4.

2.105. Jednorodna stopnia -2.

2.106. Jednorodna stopnia 3.

2.107. Jednorodna stopnia 0.

2.108. Jednorodna stopnia π.

2.109. Niejednorodna.

2.110. Jednorodna stopnia -3.

2.111. Jednorodna stopnia $\frac{3}{2}$.

2.112. Jednorodna stopnia $\sqrt{2}$.

2.113. Dla przykładu podajemy

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}=y^{-2}\frac{1}{\sqrt{u^2+4}},\quad \ln\frac{x}{y}=y^0\ln u,\quad 3x^{\sqrt{2}}\ln\frac{y}{x}=-y^{\sqrt{2}}u^{\sqrt{2}}\ln u.$$

DO ROZDZIAŁU III

3.4. $y=2x$, $x+2y-5=0$.

3.5. $y=x-1$, $y=-x+1$.

3.6. $y=\frac{1}{2}x$, $2x+y-5=0$.

3.7. $2x+y-4=0$, $x-2y+3=0$.

3.8. $x-y\sqrt{3}+\frac{5}{3}=0$, $3x+y\sqrt{3}-\frac{17}{3}=0$. **3.9.** $3x-2y-p=0$.

3.10. $2x-y-r=0$. **3.11.** $x+y-3a=0$. **3.12.** $y=a(\ln a)x+a(1-\ln a)$.

3.13. $29x+27y-6=0$, $6x-5y+21=0$. **3.14.** $(e^2-1)x-2ey+2m=0$.

3.16. $x=2\pi a$.

3.17. $y=x-\frac{1}{4}\pi r\sqrt{2}$, $y=-x+r\sqrt{2}$.

3.18. k nieparzyste, $y=x+e^{k\pi}$, $y=-x-e^{k\pi}$; k parzyste, $y=x-e^{k\pi}$, $y=-x+e^{k\pi}$.

3.22. $R=\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

3.23. $x>0$, $R=\dfrac{(2x+p)^{3/2}}{\sqrt{p}}$, $R_0=p$.

3.24. $R=\frac{1}{2}(\sqrt{17})^3$. **3.25.** $R=8$. **3.26.** $k=\frac{3}{64}\sqrt{3}$. **3.27.** $k(0)=\dfrac{b}{a^2}$, $k(a)=\dfrac{a}{b^2}$.

3.28. Gdy $x=1$ lub $x=-1$, wówczas $k_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **3.29.** $R=\dfrac{(a^4+1)^{3/2}}{2a^4}$.

3.30. $R=36$. **3.31.** $R=\dfrac{108^{3/2}}{6}$. **3.32.** $R_1=\frac{3}{8}m$, $R_2=\frac{3}{2}m$.

3.33. $R=\frac{1}{4}(\sqrt{5})^3$. **3.34.** $R=\dfrac{a}{\cos\dfrac{x}{a}}$.

3.35. $R=\dfrac{(1+36\cos^2 2x)^{3/2}}{-12\sin 2x}$, $R_{\pi/2}=-\dfrac{1}{12}$. **3.36.** $R=\left[\dfrac{(1+4\sin^2\frac{1}{2}x)^{3/2}}{|\cos\frac{1}{2}x|}\right]_{x=\frac{1}{3}\pi}=3\sqrt{6}$.

3.37. $R=\dfrac{37\sqrt{37}}{18}$. **3.38.** $R=\dfrac{(1+4e^2)^{3/2}}{3e}$. **3.39.** $R=\dfrac{y^2}{c}$ (dla $x=0$, $y=c$, $R_0=c$).

3.40. $k=1$. **3.41.** $R=rt_0$. **3.42.** $R=\dfrac{13\sqrt{13}}{6}$. **3.43.** $R=[4a\sin\frac{1}{2}t]_{t=\frac{1}{3}\pi}=2a$.

3.44. $R=\frac{3}{4}a\cos^2\frac{1}{3}\theta$. Gdy $\theta=0$ lub $\theta=3\pi$, wówczas $x=a$, $y=0$ i $R_{\max}=\frac{3}{4}a$; gdy $\theta=\frac{3}{2}\pi$, wówczas $x=0$, $y=0$, i $R_{\min}=0$.

3.45. $R=a$ (constans), linia jest okręgiem. **3.46.** $R=a\dfrac{(1+\theta_0^2)^{3/2}}{2+\theta_0^2}$. **3.47.** $R=\frac{1}{3}a$.

3.48. $N=\frac{1}{4}\sqrt{2}mv^2$. **3.49.** $p_n=|a|$. **3.55.** $(x-15)^2+(y-6)^2=288$, $R=12\sqrt{2}$.

3.56. $x^2+y^2=1$ i $x^2+(y-2)^2=1$. **3.57.** $(x-\frac{2}{3}a)^2+(y-\frac{1}{3}a)^2=\frac{8}{9}a^2$.

3.58. $27py^2=8(x-p)^3$ jest to parabola półsześcienna.

3.59. $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$. **3.60.** $(ax)^{2/3}-(by)^{2/3}=(a^2+b^2)^{2/3}$.

3.61. $(x+y)^{2/3}-(x-y)^{2/3}=(4a)^{2/3}$. **3.62.** $x=\frac{3}{2}(1+2t^2-t^4)$, $y=-4t^3$.

3.63. $x=a\ln\dfrac{y\pm\sqrt{y^2-4a^2}}{2a}\mp\dfrac{y\sqrt{y^2-4a^2}}{4a}$.

3.64. $x=a(\arccos t-t^{-1}\sqrt{1-t^2})$; $a\ln t=a+y$.

3.65. $x=r(t-\sin t)+\pi r$, $y=r(1-\cos t)-2r$; jest to taka sama cykloida, ale przesunięta.

3.66. $\xi=a\ln\operatorname{tg}\frac{1}{2}t$, $\eta=\dfrac{a}{\sin t}=\dfrac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}t+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}\right)$; po podstawieniu $\operatorname{tg}\frac{1}{2}t=e^{\xi/a}$ otrzymujemy równanie linii łańcuchowej

$$\eta=\tfrac{1}{2}a(e^{\xi/a}+e^{-\xi/a})=a\cosh\frac{\xi}{a}.$$

3.67. Hipocykloida $x=3a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=3a(2\sin t+\sin 2t)$.

3.71. $4x+y+9z-36=0$. **3.72.** $6x+7y+6z-19=0$. **3.73.** $2x+y-z-11=0$.

3.74. $x+y-2z=0$. **3.77.** $y=\frac{1}{4}x^4$. **3.78** $y=x+\sqrt{2}$, $y=x-\sqrt{2}$.

3.79. $x^2+\frac{2y^3}{3\sqrt{3}}=0$, $x^2-\frac{2y^3}{3\sqrt{3}}=0$. **3.80.** $y=-\frac{1}{4}x^2$.

3.81. $x^2+y^2-2xy-6x-6y+9=0$. **3.82.** $y=\frac{1}{4}x^2$. **3.83.** $y=\frac{3x^4}{4\sqrt[3]{4}}$.

3.84. $x=1$, $x=-1$. **3.85.** $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$. **3.86.** $y=-\ln 2-\frac{1}{4x^2}$.

3.88. $\frac{x-e}{e}=\frac{y-e^{-1}}{-e^{-1}}=\frac{z-1}{2}$. **3.89.** $\frac{x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{y-1}{2}=\frac{4z-a\pi}{4a}$.

3.90. $x=y+1=z$. **3.91.** $x\sqrt{2}=y\sqrt{2}=z$. **3.92.** $y+2z=0$.

3.93. $x+2y+3z-5=0$. **3.94.** $-(x-4)=y+2=-(z-2)$, $x-y+z-8=0$.

3.97. $4x\cos t-4y\sin t-3z-\cos 2t=0$. **3.98.** $kx-z=0$.

3.99. $bx+ay+abz-2ab=0$.

3.103. $\frac{x-1}{11}=\frac{y-1}{8}=\frac{z-1}{-9}$, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-3}=z-1$.

3.104. $x=-\frac{1}{4}y=-z+1$, $\frac{1}{2}x=y=\frac{z-1}{-2}$.

3.105. $\frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{26}=\frac{z-1}{-22}$, $\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{-8}=-z+1$,

3.107. styczna $\frac{x-a\cos t}{-a\sin t}=\frac{y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{z-bt}{b}$,

binormalna $\frac{x-a\cos t}{b\sin t}=\frac{y-a\sin t}{-b\cos t}=\frac{z-bt}{a}$,

normalna główna $\frac{x-a\cos t}{\cos t}=\frac{y-a\sin t}{\sin t}$, $z=bt$,

pł. normalna $xa\sin t-yb\cos t-bz+b^2t=0$,

pł. ściśle styczna $bx\sin t-by\cos t+az-abt=0$,

pł. prostująca $x\cos t+y\sin t-a=0$.

3.108. styczna $\frac{x-1}{2}=y-1=\frac{z-1}{4}$,

binormalna $\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{-8}=-z+1$,

normalna główna $\frac{x-1}{31}=\frac{y-1}{26}=\frac{z-1}{-22}$,

pł. normalna $2x+y+4z-7=0$,

pł. ściśle styczna $6x-8y-z+3=0$,

pł. prostująca $31x+26y-22z-35=0$.

3.110. $k=-\tau=\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$. **3.111.** $k=\frac{6}{25\sin 2t}$, $\tau=\frac{8}{25\sin 2t}$.

3.112. $k=\tau=\frac{1}{2a\cosh^2 t}$. **3.113.** $k=-\tau=\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$. **3.114.** $k=\frac{2}{a^2+1}$.

3.115. $t=\frac{1}{4}\pi+k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ **3.116.** $t=2k\pi$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3.117. $x-4y-2z+3=0$.

Wskazówka. Wystarczy wykazać, że istnieją trzy liczby a, b, c różne od zera, dla których $ax+by+cz=$stałej; przyjmujemy np. $a=1$, wtedy

$$x+by+cz=\frac{1-b+(2+c)t+(1-c)t^2}{1-t^2}.$$

Aby ułamek ten był stałą, winno być $c=-2$ itd.

DO ROZDZIAŁU IV

4.8. $[\frac{1}{2}x^2]_0^4[\frac{1}{2}y^2]_4^{12}=512$. **4.9.** $\frac{1}{6}a^2b^2(a-b)$. **4.10.** $6b^3$.

4.11. $\frac{1}{5}a^5[\theta-\frac{1}{15}\sin\theta(3\cos^4\theta+4\cos^2\theta+8]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{1}{5}a^5(\frac{1}{2}\pi-\frac{8}{15})$.

4.12. $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\sin(2x-a)-x\cos a]_0^a=\frac{1}{2}[\sin a-a\cos a]$ lub

$[-\frac{1}{2}y\cos a-\frac{1}{4}\sin(2y-a)+\sin y]_0^a=\frac{1}{2}[\sin a-a\cos a]$.

4.13. $[y^2]_0^1=1$ lub $[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+x]_{-1}^0+[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x]_0^1=1$.

4.14. $[\frac{4}{27}x^3+\frac{10}{9}x^2+\frac{16}{9}x]_{-1}^0+[-\frac{14}{27}x^3+\frac{10}{9}x^2+\frac{16}{9}x]_0^2=\frac{14}{3}$ lub

$[\frac{4}{3}y^3]_0^1+[-\frac{8}{3}y^3+10y^2-8y]_1^2=\frac{14}{3}$.

4.15. $4a$.

4.16. $V=\frac{(d-c)(f-e)}{3}\left(\frac{c^2+cd+d^2}{a^2}+\frac{e^2+ef+f^2}{b^2}\right)$.

4.17. $V=\frac{5}{6}$. **4.18.** $V=45$. **4.19.** $V=\frac{41}{162}a^4$. **4.20.** $V=\frac{88}{105}$. **4.21.** $V=\pi$.

4.22. $V=\pi$. **4.23.** $V=\dfrac{\ln 2}{\pi}$. **4.24.** $V=\frac{225}{2}$. **4.25.** $V=\frac{3}{4}$. **4.26.** $V=\frac{17}{12}-\ln 2$.

4.27. $V=\frac{38}{3}\pi$. **4.28.** $V=\frac{1}{2}\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)$.

4.29. $\left[x\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}+2\arcsin x\right]_{-1}^{1}=2\pi$ albo we współrzędnych biegunowych:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,dr\,d\theta}{r}=2\pi.$$

4.30. $V=\int_0^2\left[\int_0^{y=\sqrt{4-x^2}} 3x\,dy\right]dx=8$. **4.31.** $V=10\pi-\frac{16}{3}$. **4.32.** $V=\pi a(1-e^{-R^2})$.

4.33. $V=2\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\dfrac{x^2+y^2}{c}\,dy=\dfrac{3}{32}\cdot\dfrac{a^4\pi}{c}$.

4.34. $V=\frac{256}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{1024}{9}$. **4.35.** $V=\pi a^3(\alpha-\beta)$.

4.36. Równania powierzchni $x^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=a^2$,

$$V=8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy=\tfrac{16}{3}a^3.$$

4.37. $V=\frac{2}{3}\pi^4$. **4.38.** $V=8\pi(2\sqrt{2}-1)$.

4.39. $V=c\int_0^a dx\int_0^{b(1-x/a)}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,dy=\frac{1}{24}abc\pi(5\sqrt{2}-4)$.

4.40. $V=4\int_0^a\int_0^{rx/a}\sqrt{r^2-\dfrac{a^2y^2}{x^2}}\,dxdy=\frac{1}{2}\pi ar^2$. **4.41.** $V=\frac{1}{3}\pi a^3(6\sqrt{3}-5)$.

4.42. $\dfrac{3\sqrt{3}-2}{2}$. **4.43.** $V=\frac{3}{2}\pi ab$. **4.44.** $V=\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2}-1)$.

4.48. $S=\iint_D\sqrt{1+\dfrac{x^2}{z^2}+\dfrac{y^2}{z^2}}\,dxdy=\iint_D\sqrt{1+\dfrac{r^2}{a^2-r^2}}\,rdrd\theta$,

gdzie D jest wnętrzem koła $r=a\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Obliczenie daje

$$S=2\pi\left[-a\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\cos\varphi}=2\pi a^2(1-\sin\varphi).$$

4.49. $S=\frac{1}{20}\pi R^2(\sin 54^\circ-\sin 48^\circ)=\frac{1}{10}\pi R^2\cos 51^\circ\sin 3^\circ$.

4.50. $S=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{p^2}}\,dxdy=\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{r^2}{p^2}}\,rdrd\theta$,

gdzie D jest wnętrzem koła $r=a$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Obliczenie daje

$$S=\frac{\pi}{p}\left[\frac{2}{3}(\sqrt{p^2+r^2})^3\right]_0^a=\frac{2}{3}\frac{\pi}{p}[(\sqrt{p^2+a^2})^3-p^3].$$

4.51. $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$. **4.52.** $S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

4.53. $S=\int\limits_0^b\int\limits_0^a\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy=\frac{1}{3}ab\sqrt{1+a^2+b^2}+$

$$+\frac{1}{6}a(3+a^2)\ln\frac{b+\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+a^2}}+$$

$$+\frac{1}{6}b(3+b^2)\ln\frac{a+\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+b^2}}-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{ab}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

4.54. Równania powierzchni: $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$,

$$S=8a\int\limits_0^a\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2}}=8a^2.$$

4.55. $S=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **4.56.** $S=\frac{1}{2}\pi-1$. **4.57.** $S=4$.

4.58. $S=\frac{5}{2}\int\limits_1^7\left(\int\limits_{y=(x+1)/2}^{y=(3x-1)/2}dy\right)dx=9\sqrt{5}$.

4.59. $S=\frac{1}{2}\pi$. **4.60.** $S=\frac{8}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$. **4.61.** $S=4\pi(3+2\sqrt{3})$.

4.62. $S=144$. **4.63.** $S=200\arcsin\frac{3}{5}$. **4.64.** $S=\frac{1}{9}(20-3\pi)$. **4.65.** $S=\pi\sqrt{2}$.

4.66. $S=\frac{1}{2}\sqrt{2}a^2$. **4.67.** $S=4\pi a(a-\sqrt{a^2-b^2})$. **4.68.** $S=2\pi a^2$.

4.70. $S=\frac{1}{9}a^2(20-3\pi)$. **4.71.** $S=\pi^2a^2$. **4.72.** $S=2a^2$. **4.73.** $S=\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

4.74. $S=\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$. **4.75.** $S=\frac{1}{6}(a+b)\sqrt{2ab}$.

4.79. $M=\int\limits_{-R}^{R}\left[\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\delta(R-y)\,dy\right](R-x)\,dx=2\delta R^4$. **4.80.** $d=\frac{1}{3}\sqrt{3}a$.

4.81. $B=2\mu\pi\int\limits_0^l\left[\int\limits_{(r_2-r_1)x/l+r_1}^{(R_2-R_1)x/l+R_1} r^3dr\right]dx=\frac{1}{10}\mu\pi l\left(\frac{R_2^5-R_1^5}{R_2-R_1}-\frac{r_2^5-r_1^5}{r_2-r_1}\right)$.

4.82. $B=2\mu b\int\limits_0^{\frac{1}{2}a}\left[\int\limits_0^{x\sqrt{3}} y^2dy\right]dx=\frac{1}{32}\sqrt{3}\mu ba^4$. **4.83.** $K=a\omega\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{rd\varphi dr}{\sqrt{(a^2+r^2)^3}}$.

4.84. $L=2miR\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi x dx}{\sqrt{(R^2+x^2)^3}}=4\pi mi$.

DO ROZDZIAŁU V

5.7. $\frac{3}{4}-\ln 2$. **5.8.** $3(a-1)^2\ln a$. **5.9.** 0. **5.10.** $\frac{4}{5}\left[2x^3-3x^2+2x\right]_0^1=\frac{4}{5}$.

5.11. $\frac{1}{4}a^2b^2c$. **5.12.** 0. **5.13.** $\frac{1}{2}\pi a^4b$. **5.14.** $\frac{1}{6}\pi a^2b^3$. **5.15.** 64.

5.16. $\frac{a^4h}{4}\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}=0$. **5.17.** $\frac{1}{15}\pi(2\sqrt{2}-1)$. **5.18.** $\frac{1}{8}\pi$. **5.19.** $M=\frac{1}{16}\pi R^4$.

5.20. $M=\frac{1}{24}ab(6c^2-a^2-b^2)$.

5.21. Ponieważ $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ oraz ślad paraboloidy hiperbolicznej na płaszczyźnie Oxy stanowią dwie symetryczne względem osi Ox proste tworzące z sobą kąt $\operatorname{arc tg}\sqrt{\frac{b}{a}}$, więc

$$V=2\int\limits_{\varphi=0}^{\operatorname{arc tg}\sqrt{b/a}}\int\limits_{\rho=0}^{r}\int\limits_{z=0}^{\rho^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{2a}-\frac{\sin^2\varphi}{2b}\right)}\rho d\rho dz d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}r^4\left[\frac{1}{2a}(\varphi+\sin\varphi\cos\varphi)-\frac{1}{2b}(\varphi-\sin\varphi\cos\varphi)\right]_0^{\operatorname{arc tg}\sqrt{b/a}}=$$

$$=\frac{r^4}{8ab}\left[\sqrt{ab}+(b-a)\operatorname{arc tg}\sqrt{\frac{b}{a}}\right].$$

5.22. $V=4\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_{\rho=0}^{a\sin\varphi}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho d\rho dz d\varphi=\frac{2}{9}a^3(3\pi-4)$.

5.23. $V=4\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_{\rho=0}^{a\sin\varphi}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{a^2-\rho^2\sin^2\varphi}}\rho d\rho d\varphi dz=\frac{1}{6}a^3\left[11\sqrt{2}-9\ln(1+\sqrt{2})\right]=1{,}2707a^3$.

5.24. $V=8\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_{\rho=0}^{a}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{a^2-\rho^2\cos^2\varphi}}\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=\frac{8}{3}a^3\left[\frac{\sin\varphi-\cos^2\varphi-1}{\cos\varphi}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=$

$=\frac{8}{3}a^3\left[\frac{\cos\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi}{-\sin\varphi}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\frac{16}{3}a^3.$

5.25. $V=\frac{4}{3}\pi$. **5.26.** $V=\frac{1}{3}(2+3\pi)$, **5.27.** $V=\frac{2}{3}(3\pi-4)$.

5.28. $V=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2-2x}^{2+\frac{1}{2}x}dy\int\limits_0^{2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y}dz+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x}^{2+\frac{1}{2}x}dy\int\limits_0^{2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y}dz+\int\limits_0^3 dx\int\limits_{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x}^{7-2x}dy\int\limits_0^{2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y}dz=$

$=\frac{35}{8}$.

5.29. $V=\iint\limits_D\left[\int\limits_0^{a+xy/a}dz\right]d\xi$, gdzie D oznacza wnętrze kwadratu o wierzchołkach $A(a,0)$, $B(0,a)$, $C(-a,0)$, $D(0,-a)$. W obszarze D mamy $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant a$, $|xy|\leqslant a^2$, przeto funkcja $z=a+\frac{xy}{a}$ przybiera w tym obszarze wartości nieujemne

$$V=\int\limits_{-a}^0 dx\int\limits_{-a-x}^{a+x}dy\int\limits_0^{a+xy/a}dz+\int\limits_0^a dx\int\limits_{-a+x}^{a-x}dy\int\limits_0^{a+xy/a}dz=2a^3.$$

5.30. $V=\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1}\left[\int\limits_{R\sin\varphi_1}^{\sqrt{R^2-r^2}}dz\right]r\,dr\right\}d\theta+\pi R^3\cos^2\varphi_2(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)=$

$=\pi R^3(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)\left[1-\frac{1}{3}(\sin^2\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\sin^2\varphi_1)\right].$

Uwaga. Otrzymany wynik można przekształcić dwoma sposobami.

1° $V=\pi R^3(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)\left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1)+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin^2\varphi_2)+\right.$

$\left.+\frac{1}{6}(\sin^2\varphi_2-2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\sin^2\varphi_1)\right]=$

$=\pi R^3(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)\left[\frac{1}{2}\cos^2\varphi_1+\frac{1}{2}\cos^2\varphi_2+\frac{1}{6}(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)^2\right].$

Wprowadzając oznaczenia:

$$R\cos\varphi_1=r_1,\quad R\cos\varphi_2=r_2,$$

$$R(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)=h,$$

otrzymujemy wzór

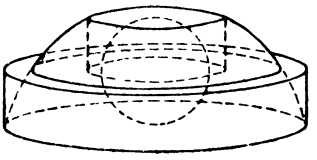
$$V=\tfrac{1}{2}\pi r_1^2h+\tfrac{1}{2}\pi r_2^2h+\tfrac{1}{6}\pi h^3.$$

Jest to wzór znany z geometrii elementarnej: objętość warstwy kulistej równa się sumie objętości trzech brył, mianowicie: 1) walca o podstawie równej dolnej podstawie warstwy kulistej i wysokości równej połowie wysokości warstwy, 2) walca o podstawie równej górnej podstawie warstwy i wysokości równej połowie wysokości warstwy, 3) kuli o średnicy równej wysokości warstwy kulistej (rys. R.5.1).

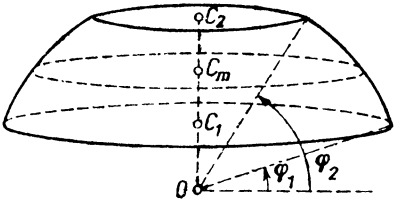
2^0 A oto drugi sposób przekształcenia wzoru na objętość warstwy kulistej (rys. R.5.2).

Niechaj C_1 oznacza środek dolnej podstawy warstwy kulistej, a C_2 niechaj oznacza środek górnej podstawy warstwy. Poprowadzimy płaszczyznę równoleżnika przechodzącą przez środek C_m odcinka C_1C_2. Odległość OC_m tej płaszczyzny od środka kuli wyraża się wzorem

$$OC_m=\frac{R\sin\varphi_1+R\sin\varphi_2}{2},$$



Rys. R.5.1



Rys. R.5.2

a promień r_m tego równoleżnika według wzoru

$$r_m^2=R^2-(OC_m)^2=R^2-\left(\frac{R\sin\varphi_1+R\sin\varphi_2}{2}\right)^2=$$

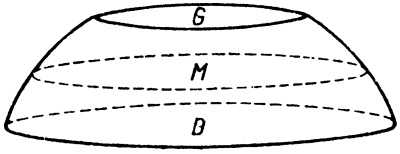
$$=R^2\left[1-\frac{\sin^2\varphi_1+2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2}{4}\right].$$

Teraz wykonujemy przekształcenia

$$V=\pi R^3(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)\left[1-\tfrac{1}{3}(\sin^2\varphi_1+\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2)\right]=$$

$$=\tfrac{1}{6}\pi R^2h\left[(1-\sin^2\varphi_2)+(1-\sin^2\varphi_1)+4-(\sin^2\varphi_1+2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2)\right]=$$

$$=\tfrac{1}{6}h\left[\pi R^2\cos^2\varphi_2+\pi R^2\cos^2\varphi_1+4\pi R^2\left(1-\frac{\sin^2\varphi_1+2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2}{4}\right)\right].$$



Rys. R.5.3

We wzorze tym wyraz $G=\pi R^2\cos^2\varphi_2$ oznacza pole górnej podstawy warstwy kulistej, wyraz $D=\pi R^2\cos^2\varphi_1$ oznacza pole dolnej podstawy tej warstwy, wreszcie wyraz

$$4M=4\pi R^2\left(1-\frac{\sin^2\varphi_1+2\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2}{4}\right)=4\pi r_m^2$$

oznacza czterokrotne pole małego koła poprowadzonego w połowie wysokości warstwy kulistej (rys. R.5.3).

Otrzymujemy wzór

$$V=\tfrac{1}{6}h(G+D+4M).$$

Jest to *wzór Leibniza-Simpsona.*

5.32. $(0,0,\tfrac{2}{5}a)$.

5.33. Środek ciężkości leży na osi stożka w odległości $\tfrac{3}{4}h$ od jego wierzchołka.

5.34. $(\tfrac{4}{3},0,0)$.

5.35. $\left(\tfrac{3}{16}\pi a\,\dfrac{\sin\varphi_2-\sin\varphi_1}{\varphi_2-\varphi_1},\ \tfrac{3}{16}\pi a\,\dfrac{\cos\varphi_1-\cos\varphi_2}{\varphi_2-\varphi_1},\ \tfrac{3}{8}a\right)$.

5.36. $\tfrac{1}{60}\pi\rho h a^2(2h^2+3a^2)$. **5.37.** $\tfrac{1}{12}\pi a^2h(3a^2+4h^2)$.

5.38. $V=\int\limits_{-4}^{2}dy\int\limits_{y^2/4}^{2-y/2}dx\int\limits_{0}^{4-2x-y}dz=\tfrac{81}{5}$, $\xi=\tfrac{17}{14}$, $\eta=-1$, $\zeta=\tfrac{9}{7}$.

5.39. $V=\int\limits_{0}^{3}dx\int\limits_{-1}^{1-2x/3}dy\int\limits_{y^2}^{1}dz=2$, $\xi=\tfrac{9}{10}$, $\eta=-\tfrac{1}{5}$, $\zeta=\tfrac{3}{5}$.

5.40. $M_{xz}=2\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_{\rho=0}^{a\sin\varphi}\int\limits_{z=0}^{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\rho\,dz=$

$=\tfrac{1}{4}a^4[\tfrac{2}{5}\sin^5\varphi-\tfrac{1}{3}\sin^3\varphi-\varphi\cos\varphi+\sin\varphi]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\tfrac{4}{15}a^4$,

$M_{xy}=2\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\int\limits_{0}^{a\sin\varphi}\int\limits_{0}^{a^2-\rho^2}z\,\rho\,d\rho\,dz\,d\varphi=$

$=\tfrac{1}{4}a^4[\tfrac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi-\tfrac{5}{8}\sin\varphi\cos\varphi+\tfrac{5}{8}\varphi]_0^{\frac{1}{2}\pi}=\tfrac{5}{64}\pi a^4$,

$$\xi=0,\quad \eta=\frac{6}{5}\cdot\frac{a}{3\pi-4}=0{,}2212a,\quad \zeta=\frac{45}{128}\cdot\frac{\pi}{3\pi-4}a\approx 0{,}2036a.$$

DO ROZDZIAŁU VI

6.5. $I=\tfrac{4}{3}ab^2$. **6.6.** $I=\tfrac{4}{3}\cdot 19$. **6.7.** $I=-2\pi a^2$. **6.8.** $I=\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$.

6.9. $I=\tfrac{1}{15}R^2(6\sqrt{R}-5R)$. **6.10.** $I=-88$. **6.13.** $1+\sqrt{2}$. **6.14.** $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$.

6.15. $\tfrac{1}{3}R^4$. **6.16.** $\dfrac{a^2b}{8(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}-\dfrac{b(2b^2-a^2)\sqrt{a^2-b^2}}{a^4}\right)$.

6.17. $\tfrac{1}{2}\pi a^3$. **6.18.** 0. **6.19.** $\ln\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$. **6.20.** $\dfrac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.

6.21. $\tfrac{1}{54}(145^{\frac{3}{2}}-10^{\frac{3}{2}})-\tfrac{1}{6}\left(6\sqrt{145}-\tfrac{2}{3}\sqrt{10}+\ln\sqrt{\dfrac{12+\sqrt{145}}{3+\sqrt{10}}}\right)$.

6.22. $\frac{256}{15}a^3$. **6.23.** $\frac{a^5\sqrt{1+m^2}}{5m}$. **6.24.** $a^2\sqrt{2}$.

6.26. $L=\int\limits_c K_x\,dx+K_y\,dy=\frac{1}{10}a$. **6.27.** $L=\int\limits_0^1(x^4+5x^3+3x^8)\,dx=\frac{107}{60}$.

6.28. $L=\int\limits_c P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\frac{1}{4}k\sqrt{2}(2+\pi)$. **6.30.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}(e^2-1)$.

6.31. $(2\pi a^2+\frac{8}{3}\pi^3b^2)\sqrt{a^2+b^2}$. **6.37.** 12. **6.38.** 8. **6.39.** 4.

6.40. -2. **6.41.** 64. **6.42.** $-\frac{3}{2}$. **6.43.** 9. **6.44.** 1. **6.45.** $1+\pi$.

6.48. $U(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+C$. **6.49.** $U(x,y,z)=e^{xyz}+C$.

6.50. $\lambda=2$, $U(x,y,z)=\dfrac{xy^2z^2-1}{x^2}+C$.

6.56. Nie. **6.57.** $V=5x^5y-3xy^2-5y+1$. **6.58.** Tak. **6.63.** $\frac{1}{2}\pi(1+\sqrt{2})$.

6.64. $\frac{1192}{15}\pi$. **6.65.** $\frac{2}{15}\pi R^6$. **6.66.** $\pi[R\sqrt{R^2+1}+\ln(R+\sqrt{R^2+1})]$.

6.67. $16+2\pi$. **6.68.** $\frac{2}{15}\pi(1+6\sqrt{3})$. **6.69.** $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\ln 2$.

6.70. $\frac{1}{420}(125\sqrt{5}-1)$. **6.71.** $[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})]\pi^2$. **6.72.** $\frac{1}{120}\sqrt{3}$.

6.73. $\frac{3}{2}\pi\sqrt{2}$. **6.74.** $8\pi\sqrt{3}$. **6.75.** $\frac{2}{3}a\pi(a-h)^2(2a+h)$.

DO ROZDZIAŁU VII

7.12. $y=Ce^{-1/2x}$. **7.13.** $y=a+C-e^{1/x}$. **7.14.** $x-y+c=\ln[y^b(a+x)^a]$.

7.15. $\dfrac{y^2}{x}+\ln x=C$. **7.16.** $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C$.

7.17. $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(1+y^2+y\sqrt{1+y^2})+C$. **7.18.** $y=Ce^{(x+b)^2/2}-a$.

7.19. $x\neq -1$, $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-2\ln|x+1|+C$.

Przez punkt (x_0,y_0), gdzie $x_0\neq -1$, przechodzi linia całkowa

$$y-y_0=(x-x_0)[\tfrac{1}{3}(x^2+xx_0+x_0^2)-\tfrac{1}{2}(x+x_0)+1]-2\ln\left|\frac{x+1}{x_0+1}\right|.$$

7.20. $-1\leqslant x\leqslant 1$, $y=\pm\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+C$. Przez punkt (x_0,y_0), gdzie $-1\leqslant x_0\leqslant 1$, przechodzą dwie linie całkowe

$$y-y_0=\pm\tfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x-x_0\sqrt{1-x_0^2}-\arcsin x_0).$$

7.21. $0<x\leqslant 1$, $y=\pm[\sqrt{x(1-x)}+\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)]+C$.

7.22. $y=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **7.23.** $\frac{1}{3}x^3+\ln x+\frac{1}{2}y^2-\ln y=C$.

7.24. $\arcsin y-\operatorname{arctg}x=C$. **7.25.** $\ln(xy)=C+y-x$. **7.26.** $\sin x\cos y=C$.

7.27. $\cos y=C\cos x$. **7.28.** $e^{-1/x}+\ln y=C$. **7.29.** $1+e^y=C(1+x^2)$.

7.30. $\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+C$. **7.31.** $\dfrac{x}{(1+x)(y-1)}=C$.

7.32. $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2\ln\dfrac{x}{y}+C$. **7.33.** $(x+1)(y+1)=C(x-1)(y-1)$.

7.34. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2+x+1}{y^2-y+1}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\dfrac{2y-1}{\sqrt{3}}=C$.

7.35. $x^2-2\ln(1+e^y)=C$. **7.36.** $\frac{1}{2}e^{2x}-e^y-\ln\sqrt{1+y^2}-\operatorname{arctg}y=C$.

7.37. $y=2\operatorname{arctg}(Ce^x-\frac{1}{2}\pi)$. **7.38.** $y=2\operatorname{arctg}Ce^x$. **7.39.** $y=\arcsin Ce^{-1/x}$.

7.40. Podstawienie: $\dfrac{y^2}{x}=t$, otrzymamy równanie $\dfrac{dt}{1-3t}=\dfrac{dx}{x}$.

Odpowiedź: $y=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{C}{x^2}\right)}$.

7.41. $y=\dfrac{C}{2}e^x-\dfrac{a^2}{2Ce^x}$. **7.42.** $y=\dfrac{2Ce^{-x}}{Ce^{-2x}+1}$. **7.43.** $(x^2-1)(y^2-1)=C$.

7.44. $y=a\operatorname{tg}\left(C-\dfrac{\sqrt{ax-x^2}}{x}\right)$. **7.45.** $y=\dfrac{1}{x}\operatorname{tg}(\frac{1}{4}x^2+C)$. **7.46.** $xy=C(y-1)$

7.47. $y^2=Cx^2(1+y^2)$. **7.48.** $(1+x^2)(1+y^2)=C$. **7.49.** $1+y^2=C(1-x^2)$.

7.50. $x=\ln\dfrac{C}{e^y-1}$. **7.51.** $e^y=\ln\dfrac{C}{x+\sqrt{1+x^2}}$. **7.52.** $y+\operatorname{arctg}y=x+\ln x+C$.

7.53. $x+\sqrt{1+x^2}=Ce^{\sqrt{1+y^2}}(y+\sqrt{1+y^2})^2$.

7.54. $x^2-y^2+y\sqrt{1+y^2}+x\sqrt{1+x^2}+\ln[(y+\sqrt{1+y^2})(x+\sqrt{1+x^2})]=C$.

7.55. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\ln\dfrac{y}{x}=C$. **7.56.** $\arcsin x+\arcsin y=C$.

7.57. $y=e^{\operatorname{ctg}(x/2)}$ lub $y=C^{\operatorname{tg}(x/2)}$. **7.58.** $\operatorname{ctg}^2 y=\operatorname{tg}^2 x+C$.

7.59. $x^2+y^2=\ln Cx^2$. **7.60.** $x^2(1+y^2)=C$. **7.61.** $(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$.

7.62. $a\neq 1$, $xy(1-Cx^{a-1})=a-Cx^{a-1}$; $a=1$, $(xy-1)\ln Cx=1$.

7.63. $x^2e^{x^2y^2}=Cy^2$. **7.64.** $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}(u-v)\right)=u+c$. **7.65.** $y=x-a$.

7.66. $y^2-1=2\ln(e^x+1)-2\ln(e+1)$. **7.67.** $y=(x+1)^2$.

7.68. $\frac{ds}{dt}=5t$, $s=\frac{5}{2}t^2+C$. **7.69.** $\frac{ds}{dt}=-2s^2$, $s=\frac{1}{2t+C}$.

7.70. $i=\frac{U}{\omega L}\cos\omega t+C$. **7.71.** $Pv^k=C$. **7.72.** $L=\frac{1}{2}k^2(t-\frac{1}{6}\sin 6t)+C$.

7.73. $y+y'x=0$, $xy=6$. **7.74.** $xy=\sqrt{4-x^2}$, $y=\sqrt{4-x^2}-2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|$

7.75. $m\frac{dv}{dt}=k\frac{t}{v}$, $k=20$, $v(60)=265{,}3$ cm/sek.

7.76. $\frac{dT}{dt}=k(T-T_0)$, $T=T_0+Ce^{kt}$. **7.77.** $\frac{dv}{dt}=g-kv^2$, $v=\sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{C\exp(2t\sqrt{gk}-1)}{C(\exp(2t\sqrt{gk}+1)}$.

7.78. $\frac{dp}{dx}=\frac{M}{lS}\frac{\omega^2}{p_0}px$, $p=Ce^{M/ls\cdot\omega^2x^2/2p_0}$, gdzie $C=p_0$,

$$\int_0^t \frac{M\omega^2}{lS2p_0}xdx.$$

7.79. $y^2=4ax$. **7.80.** $L=10e^{0{,}001T}$, $T=1000\ln 1{,}01$.

DO ROZDZIAŁU VIII

8.3. $y=Ce^x-x-4$. **8.4.** $3x-2y+1=\frac{3-e^{C-2x}}{2}$.

8.5. $5x-3y+7=\frac{5-e^{C-3x}}{2}$. **8.6.** $x-\operatorname{tg}(x-y)-\frac{1}{\cos(x-y)}=C$.

8.7. $y=-2x+\sqrt{Ce^{2x}-1}$ lub $y=-2x-\sqrt{Ce^{2x}-1}$, gdzie $C>0$.

Przez punkt (x_0, y_0) nie leżący na prostej $y=-2x$ przechodzi krzywa całkowa

$$y=-2x+\varepsilon\sqrt{[(y_0+2x_0)^2+1]e^{2(x-x_0)}-1},$$

gdzie $\varepsilon=+1$, gdy $y_0>-2x_0$ i $\varepsilon=-1$, gdy $y_0<-2x_0$.

Jeżeli zaś $y_0=-2x_0$, to z punktu (x_0, y_0) wychodzą dwie gałęzie krzywej całkowej o równaniach

$$y=-2x\pm\sqrt{e^{2(x-x_0)}-1}.$$

Uwaga. W punkcie (x_0, y_0) leżącym na prostej $y=-2x$ styczna do obu gałęzi krzywej całkowej jest równoległa do osi Oy.

8.8. $\operatorname{arc tg}(x+y)=x+C$.

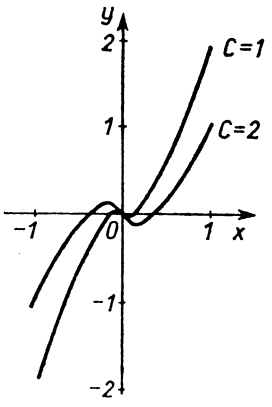
8.9. $y=x-\dfrac{1}{x+C}$.

8.10. $y=-4x+\frac{3}{2}+\operatorname{tg}(4x+C)$. Przez punkt (x_0, y_0) przechodzi krzywa całkowa

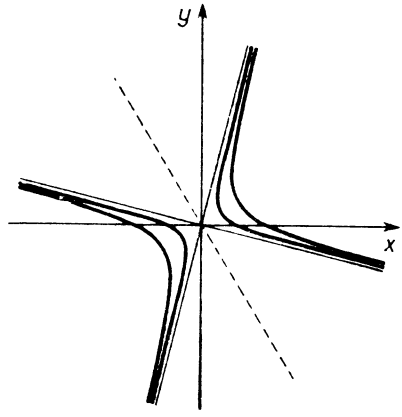
$$y=-4x+\tfrac{3}{2}+\operatorname{tg}[4(x-x_0)+\operatorname{arc tg}(4x_0+y_0-\tfrac{3}{2})].$$

8.11. $8x+2y+1=2\operatorname{tg}(4x+C)$.

8.12. $x+2y+3=\sqrt{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}(x\sqrt{2}+C)$.



Rys. R.8.1



Rys. R.8.2

8.13. $4x+2y+5=\sqrt{2}\operatorname{tg}(2x\sqrt{2}+C)$.

8.14. $1+x+y=Ce^y$.

8.15. $x+y=2\operatorname{tg}(C+\frac{1}{2}y)$.

8.16. $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C$.

8.17. $5x+10y+C=3\ln|10x-5y+6|$.

8.20. $x\neq 0$, $y=x\ln|x|+Cx$. Zauważmy, że według reguły de l'Hospitala mamy

$$\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x+C}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

więc przy $x\to 0$ krzywe całkowe (rys. R. 8.1.) mają wspólny punkt graniczny O (0, 0).

Przez punkt (x_0, y_0), gdzie $x_0\neq 0$, przechodzi krzywa całkowa o równaniu

$$y=x\ln|x|+\left(\frac{y_0}{x_0}-\ln|x_0|\right)x$$

8.21. $x^2+4xy-y^2=C$, czyli $y=2x\pm\sqrt{5x^2+C}$.

Gdy $C=0$, otrzymujemy linie całkowe w postaci dwóch prostych wzajemnie prostopadłych:

(a) $$y=(\sqrt{5}+2)x,$$

(b) $$y=-(\sqrt{5}-2)x.$$

Gdy $C<0$, otrzymujemy rodzinę hiperbol równoosiowych, dla których proste (a) i (b) są asymptotami, przy czym wspólną osią rzeczywistą tych hiperbol jest prosta

(c) $$y=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x.$$

Wszystkie te hiperbole są jednokładne względem początku współrzędnych. Każda gałąź hiperboli $x^2+4xy-y^2=C$, gdzie $C<0$, przecina oś Oy w punkcie, w którym styczna do hiperboli jest równoległa do prostej $y=2x$.

Gdy $C>0$, otrzymujemy drugą rodzinę hiperbol równoosiowych (rys. R.8.2) mających te same asymptoty, przy czym ich wspólną osią rzeczywistą jest prosta

(d) $$y=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x.$$

Hiperbole te są również jednokładne względem początku współrzędnych. Każda gałąź hiperboli $x^2+4xy-y^2=C$, gdzie $C>0$, przecina prostą $y=2x$ w punkcie, w którym styczna do hiperboli jest równoległa do osi Oy.

Przez punkt (x_0, y_0) przechodzi linia całkowa

$$x^2+4xy-y^2=x_0^2+4x_0y_0-y_0^2.$$

8.22. $x^2+2xy=C$. **8.23.** $(y+x)^2(y+2x)^3=C$.

8.24. $y^2+2xy=C$. **8.25.** $y=Ce^{x/y}$. **8.26.** $(x-y)^2=Cy$.

8.27. $\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{-\operatorname{arc\,tg}(y/x)}$. **8.28.** $y=Cx^2-\frac{1}{4C}$, $C>0$.

8.29. $x^2-Cy-C\sqrt{y^2-x^2}=0$. **8.30.** $xe^{\sqrt{y/x}}=C$. **8.31.** $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=C$.

8.32. Podstawienie: $\frac{y}{x}=t^2$; $\frac{e^{-\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}}}{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|\sqrt{|x-y|}}=C$. **8.33.** $y(y-2x)^3=C(y-x)^2$.

8.34. $y=x[\arcsin Cx+2k\pi]$ lub $y=x[-\arcsin Cx+(2k+1)\pi]$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, $-1\leqslant Cx\leqslant 1$.

8.35. $y=x\arcsin\left(\frac{x}{C}\right)$. **8.36.** $x=Ce^{-\sin(y/x)}$. **8.37.** $xy\cos\frac{y}{x}=C$.

8.38. $y=x\cdot e^{1+Cx}$. **8.39.** $y=xe^{Cx}$. **8.40.** $x^2+y^2=Cy$.

8.41. $y^3(x+y)=Cx^2(x-y)$. **8.42.** $Cy=e^{y/x}$. **8.43.** $y^2+xy=Cx$.

8.44. $x^4+2x^2y^2=C$. **8.45.** $y=Ce^{y/x}$. **8.46.** $y^2=Cxe^{-y/x}$.

8.47. $3x^4+8x^3y+6x^2y^2=C$. **8.48.** $\ln|x|=\frac{xe^{y/x}}{x+y}+C$. **8.49.** $\ln|x|+e^{x/y}=C$.

8.50. $2x^2+y^2=C\sqrt{x^2+y^2}$. **8.51.** Podstawienie: $y=t^2$; $\frac{(3y-2x^2)^2}{3y-x^2}=C$.

8.54. Przesuwamy początek układu współrzędnych do punktu (1,1) przecięcia się prostych: $x-2y+1=0$ i $5x-y-4=0$, dokonując podstawienia $x=1+u$, $y=1+v$, otrzymamy wówczas $2(u-2v)\,du+(5u-v)\,dv=0$,

$$(v+u)^2=C(2u-v), \quad \text{czyli} \quad (x+y-2)^2=C(2x-2).$$

8.55. $(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C$.

8.56. $C(y+x-2)^2=y-x$. **8.57.** $3y-x=8\ln|x-2y+1|+C$.

8.58. $x^2-xy+y^2+x+y-C=0$. **8.59.** $(x-y)^2+2(x-xy+y)=C$.

8.60. $3x+y+2\ln|x+y-1|=C$. **8.61.** $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$.

8.62. $x^2-y^2+2xy-4x+8y=C$. **8.63.** $(x+y+1)^3=C(x-y+3)$.

8.64. Podstawienie: $x^3=u$, $y^4=v$; $\ln|x|+6\ln|y|-\frac{5}{3}\ln|y^4+x^3|=C$.

DO ROZDZIAŁU IX

9.2. $x\neq 0$, $y=Cx^2e^{1/x}$. Przez punkt (x_0, y_0), gdzie $x_0\neq 0$, przechodzi krzywa całkowa $y=y_0\frac{x^2}{x_0^2}e^{1\,x-1/x_0}$.

9.3. $\cos x\neq 0$, $y=\frac{C}{\cos x}$. Przez punkt (x_0, y_0) przechodzi krzywa całkowa $y\cos x=y_0\cos x_0$.

9.4. $y=Ce^{1/x}$. **9.5.** $y^4=C\frac{x-2}{x+2}$. **9.6.** $y^3=Cx$. **9.7.** $y=Ce^{-x\cos x}$.

9.13. $y=-\frac{2}{3}+Ce^{3x}$. **9.14.** $y=Ce^{x^2}+\frac{1}{2}x^2$.

9.15. $y=e^{-x^2}(\frac{1}{2}x^2+C)$. Przez punkt (x_0, y_0) przechodzi krzywa całkowa

$$ye^{x^2}-\tfrac{1}{2}x^2=y_0\,e^{x_0^2}-\tfrac{1}{2}x_0^2.$$

9.16. $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$. Przez punkt (x_0, y_0) przechodzi krzywa całkowa

$$y=\sin x-1+(y_0-\sin x_0+1)e^{\sin x_0-\sin x}.$$

9.17. $\cos x \neq 0$, $y = -2\cos^2 x + C\cos x$. Jeżeli $\cos x_0 \neq 0$, to przez punkt (x_0, y_0) przechodzi krzywa całkowa

$$y = \cos x\left(\frac{y_0}{\cos x_0} + 2\cos x_0 - 2\cos x\right).$$

Proste $x = (2k+1)\frac{1}{2}\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, są liniami całkowymi równania

$$(y - 2\cos^2 x)\frac{dx}{dy} + \operatorname{ctg} x = 0.$$

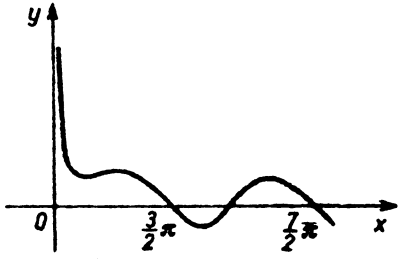
9.18. $3y = 2\operatorname{tg} x(3 - \sin^2 x) + \dfrac{C}{\cos x}$. **9.19.** $x(y-x) = C$.

9.20. $y = (x+1)^2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2 + C\right]$.

9.21. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C + \ln\left|\dfrac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|\right)$.

9.22. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|\right)$.

9.23. $y = \dfrac{b}{a} + Ce^{-a\operatorname{arc tg} x}$. **9.24.** $y = C\sqrt{1-x^2} + a$. **9.25.** $y = \dfrac{x^2 + Cx - a^2}{x\sqrt{a^2+x^2}}$.



Rys. R.9.1

9.26. $y = (x+C)\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$. **9.27.** $y = (2\sqrt{\sin x} + C)\operatorname{arc tg} x$.

9.28. $y = \dfrac{C - \cos x}{\sqrt{1+x^2}}$. **9.29.** $y = (x + \sqrt{1+x^2})(a\arcsin x + C)$.

9.30. $y = -x - \frac{1}{2} + Cx^2$. **9.31.** $y = \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{x^2}{5}$.

9.32. $x \neq 0$, $y = -\cos x + \dfrac{\sin x + C}{x}$. Na rysunku R.9.1 jest $C = 1$. Przez punkt (x_0, y_0) przechodzi krzywa całkowa

$$xy + x\cos x - \sin x = x_0 y_0 + x_0\cos x_0 - \sin x_0.$$

Prosta $x=0$ jest krzywą całkową równania

$$x\,dy+(y-x\sin x)\,dx=0.$$

9.33. $y=x^2(e^{-1/x}+C)$. **9.34.** $y=\frac{1}{2}x^2+C\sqrt{x}$. **9.35.** $y=Cx^2-\frac{1}{x}$.

9.36. $y=Cx^{2-3/e^x}$. **9.37.** $y=ax+C\sqrt{1-x^2}$. **9.38.** $y=a+C\sqrt{1-x^2}$.

9.39. $y^2-2x=Cy^3$.

Uwaga. Przyjmujemy y za zmienną niezależną, a x za zmienną zależną, wobec czego otrzymujemy równanie

$$\frac{dx}{dy}-\frac{3}{y}x=-\frac{1}{2}y.$$

9.40. $y=ax+Cx\sqrt{x^2-1}$. **9.41.** $y=Ce^{-\operatorname{arc tg} x}+\operatorname{arc tg} x-1$.

9.42. $y=\sin x+C\cos x$. **9.43.** $y=\frac{C-\cos 2x}{2\cos x}$. **9.44.** $y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{C}{\cos x}+\frac{x}{2\cos x}$.

9.45. $y=\frac{1}{2}x^2+C\cos x$. **9.46.** $y=\frac{1}{4}x^2+C\sin x$.

9.47. $y=2\operatorname{tg} x-\frac{2}{3}\operatorname{tg} x\sin^2 x+\frac{C}{\cos x}$. **9.48.** $y=e^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C)$.

9.57. Całka próbna: $y_1=(ax+b)e^x$. Całka ogólna: $y=(2x+C)e^x$.

9.58. Całka próbna: $y_1=me^{-x}$ zawodzi. Druga próba: $y_1=(mx+n)e^{-x}$.
Całka ogólna: $y=(x+C)e^{-x}$.

9.59. Całka próbna: $y_1=ae^{7x}$. Całka ogólna: $y=\frac{1}{10}e^{7x}+Ce^{-3x}$.

9.60. $y=Ce^{6x}+e^{4x}$. **9.61.** $y=Ce^{-2x}-4e^{6x}$. **9.62.** $y=(3x+C)e^{2x}$.

9.63. Całka próbna: $y_1=ax+b$. Całka ogólna: $y=2x-1+Ce^{-2x}$.

9.64. Całka próbna: $y_1=ax+b$. Całka ogólna: $y=2x-2+Ce^{-x}$.

9.65. $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{2}x^2-x$. **9.66.** $y=2x^2-6x+7+Ce^{-x}$.

9.67. $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{13}{9}x+\frac{13}{27}+Ce^{3x}$. **9.68.** $y=2x^2-\frac{27}{7}x+\frac{234}{49}+Ce^{4x/7}$

9.69. Całka próbna: $y_1=ax^3+bx^2+cx+d$.
Całka ogólna: $y=x^3-2x^2+5x-4+Ce^{-x}$.

9.70. $y=Ce^{2x}-(\frac{1}{2}x^4+x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{4})$. **9.71.** $y=2\sin 2x-\cos 2x+Ce^x$.

9.72. Całka próbna: $y_1=a\sin x+b\cos x$.
Całka ogólna: $y=\sin x+2\cos x+Ce^{-2x}$.

9.73. $y=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+Ce^x$. **9.74.** $y=Ce^{-4x}-\frac{3}{5}\cos 3x+\frac{4}{5}\sin 3x$.

9.75. $y=2\sin x+Ce^{-2x}$. **9.76.** $y=\frac{33}{29}\sin x+\frac{10}{29}\cos x+Ce^{-5x/2}$.

9.77. Całka ogólna: $y=(x-1)e^{2x}+Ce^{x}$. **9.78.** $y=(3x^2+2x+1)e^{2x}+Ce^{x}$.

9.79. Całka próbna: $y_1=(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x$.
Całka ogólna: $y=x\sin x+(-x+1)\cos x+Ce^{-x}$.

9.80. $y=-x\sin x-x\cos x-\cos x+Ce^{x}$. **9.81.** $y=3e^{4x}\sin 3x+Ce^{2x}$.

9.82. Całka ogólna: $y=\frac{1}{2}+Ce^{2x}$. Całka spełniająca żądany warunek początkowy: $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2x}$.

9.83. $y=(x+\frac{4}{5})e^{5x}$. **9.84.** $y=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)$.

9.85. Całka próbna: $y_1=me^{ax}$ daje $m=\dfrac{1}{a-b}$, jeśli $a\neq b$; wówczas całka ogólna: $y=\dfrac{1}{a-b}e^{ax}+Ce^{bx}$, a przez punkt $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ przechodzi krzywa całkowa

$$y=\frac{1}{a-b}e^{ax}-\frac{b}{a}-\frac{1}{a-b}e^{bx}.$$

Jeżeli $a=b$, to całka próbna $y_1=me^{ax}$ zawodzi.
Druga próba: $y_1=(mx+n)e^{ax}$ daje całkę ogólną $y=(x+C)e^{ax}$ i wówczas przez punkt $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ przechodzi krzywa całkowa $y=\left(x+\dfrac{1}{a}\right)e^{ax}$.

9.86. $i=Ae^{-t/RC}+\dfrac{U}{\sqrt{R^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}}}\sin(\omega t+\varphi)$, gdzie

$$\sin\varphi=\frac{\dfrac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}}},\qquad \cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\dfrac{1}{\omega^2C^2}}}.$$

9.89. Całka próbna: $y_1=ax^3+bx^2+cx+d$ dla równania

$$\frac{dy}{dx}-2y=3x^2-2x^3.$$

Całka próbna: $y_2=(ax+b)\sin 2x+(cx+d)\cos 2x$ dla równania

$$\frac{dy}{dx}-2y=(4x-2)\cos x-4x\sin x.$$

Całka ogólna: $y=x^3+2x\sin 2x+\cos 3x+Ce^{2x}$.

9.90. Całki próbne: $y_1=(ax+b)\sin x+(cx+d)\cos x$, $y_2=(ax+b)e^{-3x}$.
Całka ogólna: $y=-x\sin 3x+x\cos 3x+(x+C)e^{-3x}$.

9.91. Całki próbne: $y_1=(ax+b)\sin 2x+(cx+d)\cos 2x$,
$y_2=a\sin x+b\cos x$, $y_3=ax^2+bx+c$.
Całka ogólna: $y=x\cos 2x+\sin x+x^2-2x+2+Ce^{-x}$.

9.92. $y=\sin 4x-3\cos 4x+e^{4x}+Ce^{-2x}$. **9.93.** $y=(2x+1)e^{3x}+3\sin 2x+Ce^{x}$.

9.94. $y=(x^2+2x+2)e^{x}+e^{3x}+Ce^{-x}$. **9.95.** $y=(x^3+2x)e^{2x}+x\sin 2x+Ce^{-3x}$.

9.96. $y=(x+1)\sin 2x+(x^2-2x+4)\cos x+Ce^{x}$.

9.97. $y=x^2+3x+2xe^{x}+Ce^{-4x}$. **9.98.** $y=(2x^2+5x)\cos x+\sin 3x+Ce^{-x}$.

DO ROZDZIAŁU X

10.4. $(x+1)\dfrac{dy}{dx}=y+1$. **10.5.** $\left(1-\dfrac{dy}{dx}\right)\left(\dfrac{dy}{dx}x-y\right)=m\dfrac{dy}{dx}$. **10.6.** $y\dfrac{dy}{dx}+x=0$.

10.7. $(x^2-y^2)\dfrac{dy}{dx}=2xy$. **10.8.** $2x\dfrac{dy}{dx}=y$. **10.9.** $x\dfrac{dy}{dx}+x-2y-2=0$.

10.10. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y-x\sqrt{3}}{x}$. **10.11.** $y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-2xy\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$.

10.12. $2xy\dfrac{dy}{dx}=y^2-2x^2$. **10.13.** $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}-y^2=1$. **10.14.** $y+x\dfrac{dy}{dx}=0$.

10.15. $y=2\left(\dfrac{y'}{3}\right)^{3/2}$. **10.16.** $y'=\dfrac{x-y}{3}+1$. **10.17.** $\dfrac{y}{y'}=\dfrac{x-4}{3}$.

10.18. $y=x-\dfrac{x(1-y')}{\ln\left|\dfrac{1-y'}{2}\right|}$.

10.19. $\left(x-y\dfrac{dx}{dy}\right)\left(x+y\dfrac{dy}{dx}\right)=1$. **10.20.** $\left(y-x\dfrac{dy}{dx}\right)\left(x-y\dfrac{dx}{dy}\right)=a$.

10.21. $\dfrac{dy}{dx}=ay$, $a\neq 0$, $y=Ce^{ax}$. **10.22.** $y=a\ln|x|+C$, $a\neq 0$.

10.23. $a>0$, $y=Ce^{x/a}$ lub $y=Ce^{-x/a}$.

10.24. $a>0$, $y^2=2ax+C$ lub $y^2=-2ax+C$.

10.25. $2xy'-y=0$, $y^2=Cx$. **10.26.** $\sqrt{a^2-y^2}=yy'(x-c)^2=a^2$.

10.30. $x^2+y^2-Cy=0$. **10.31.** $y=Ce^{-x}$. **10.32.** $2x^2+(y-2)^2-C$, $C>0$.

10.33. $\frac{x^2}{2C^2}+\frac{y^2}{C^2}=1$. **10.34.** $y=x^{\lambda^2}$. **10.35.** $y=C|x|^n$. **10.36.** $x^2-y^2=C$.

10.37. $y^2=2x+C$. **10.38.** $(x^2+y^2)^2-Cxy=0$. **10.39.** $r^m=C\cos m\varphi$.

10.40. $r=C(1-\cos\varphi)$. **10.41.** $(x^2+y^2)^2=C(y^2+2x^2)$. **10.42.** $x^2+\sigma y^2=C$.

10.43. $r=Ce^{-\varphi^2+\frac{2\varphi^3}{3\pi}}$. **10.44.** $(x^2+y^2)^3=Cy(y^2+3x^2)$.

DO ROZDZIAŁU XI

11.3. $y^2(1+Ce^{x^2})=1$. **11.4.** $y^{-2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$. **11.5.** $y=C\sqrt[4]{1-x^2}-\frac{1}{3}(1-x^2)$.

11.6. $y=x^4(C+\ln\sqrt{x})^2$. **11.7.** $y=\sqrt{2\sqrt{1-x^2}-x^2-1}$. **11.8.** $y=\frac{x}{C-x}$.

11.9. $\frac{1}{y}=Cx+\ln x+1$. **11.10.** $\frac{1}{y}=x(C-\frac{1}{2}\ln^2 x)$.

11.11. $2Cy=2\cos^2 x-ay(\sin^2 x-2\ln\sin x)$. **11.12.** $y^3(3+Ce^{\cos x})=1$.

11.13. $\frac{1}{y}=x[C-\frac{1}{2}a(\ln x)^2]$. **11.14.** $\frac{1}{y}=C\sqrt{1-x^2}-a$.

11.15. $y^2=-x\ln x+Cx$. **11.16.** $2x^3y^3-3a^2x^2=C$. **11.17.** $x=y^2+Cy^2e^{1/y}$.

11.18. $\frac{1}{x}=Ce^{-y^2/2}-y^2-2$. **11.19.** $y(C+\frac{1}{7}x^7)=x^3$.

11.20. $\frac{1}{y^2}=(x+1)^2[\frac{1}{2}(x+1)^2+C]$. **11.21.** $y=\frac{1}{\sqrt[3]{3+Ce^{\cos x}}}$. **11.22.** $e^{-y}=Cx+1$.

11.23. $y=\sqrt{\frac{x}{C-\sqrt{1-x^2}}}$. **11.24.** $x+y^2+1+Ce^x=0$. **11.25.** $x^2+y^4=Cy^2$.

11.26. $y=\frac{(C+x^2)^2}{4e^{2x^2}}$.

11.27. $y=(Ce^{x^3}-\frac{1}{3}x^3)^3$.

11.28. $y=\frac{1}{x^2+a^2}\left[C-a\ln\left|\frac{a}{x}+\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2+1}\right|+\sqrt{x^2+a^2}\right]$.

11.31. $y=x+1+e^{\frac{1}{2}x^2+2x}(C-\int e^{\frac{1}{2}x^2+2x}dx)^{-1}$ $(v=x+1)$.

11.32. $y=x+\dfrac{1}{1+Ce^x}$. **11.33.** $y=\dfrac{-Cx^{2/3}+2x}{Cx^{5/3}-x^2}$.

11.34. $y=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x(C-\ln|x|)}$. **11.35.** $xy(Ce^x-1)=4x+2(Ce^x-1)$.

11.36. $y=\dfrac{2x^3-C}{x(C+x^3)}$. **11.37.** $y=-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{Cx+x\ln x}$. **11.38.** $y=\dfrac{2x^4-2C}{x^5+Cx}$.

11.39. $y=1+\dfrac{1}{Cx-x^2}$. **11.40.** $y=x+\dfrac{1}{Cx^2-x}$. **11.41.** $y=x+\dfrac{1}{1+Cx}$.

11.42. $y=-\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{Cx+x\ln x}$. **11.43.** $y=\dfrac{4x^3+C}{x^4+Cx}$.

W odpowiedziach zadań 11.46 - 11.57 podano tylko całki osobliwe:

11.46. $y=-\frac{1}{4}x^2$. **11.47.** $y=\frac{1}{4}x^2$. **11.48.** $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$. **11.49.** $y^4=-\frac{32}{27}x^3$.

11.50. $y^2=2x$. **11.51.** $y=1{,}5x^{2/3}$. **11.52.** $x^2+y^2=1$. **11.53.** $y=-\sqrt{a^2-x^2}$.

11.54. $y^2-x^2=1$. **11.55.** $y=Cx+\sqrt{1-C^2}$, $y^2-x^2=1$ $(y>0)$.

11.56. $xy=1$. **11.57.** $x=Cy+C^2$, $x=-\frac{1}{4}y^2$.

11.60. $x=\dfrac{C}{p^2}+\dfrac{2p}{3}$, $y=\dfrac{2C}{p}+\dfrac{p^2}{3}$. **11.61.** $x=C\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{p^3}$, $y=\dfrac{2C}{p}-\dfrac{1}{p^2}$.

11.62. $y=-\frac{1}{4}x^2+Cx+C^2$, całka osobliwa $y=-\frac{1}{2}x^2$.

11.63. $x=\dfrac{C}{\sqrt{p}}-\dfrac{p}{3}$. **11.64.** $x=\dfrac{1}{2p^2}\ln|p+\sqrt{1+p^2}-p\sqrt{1+p^2}|+C$.

11.65. $x=\dfrac{C(p+\sqrt{1+p^2})}{\sqrt{1+p^2}}$, $y=-\dfrac{C}{\sqrt{1+p^2}}$.

11.66. $x=2(1-p)+Ce^{-p}$, $y=2-p^2+Ce^{-p}(1+p)$.

11.67. $y=(\sqrt{2x+C}-1)e^{\sqrt{2x+C}-1}$.

11.68. $Cy=(x-C)^2$, całka osobliwa $y=0$ i $y=-4x$.

11.69. Jeśli $k\neq 1$, $x^2+y^2=\dfrac{2Cx+C^2}{k^2-1}$, $k=1$, $x^2+y^2=Cx$.

11.70. $x=\dfrac{p-\ln p+C}{(p-1)^2}$, $y=p^2x-p$.

11.71. $y=(C+\sqrt{x+1})^2$, całka osobliwa $y=0$.

11.72. $x=-p-\frac{1}{2}+\frac{C}{(1-p)^2}$, $y=p^2x+p^3$.

11.73. $p^2x=C+\ln p$, $py=2xp^2+1$. **11.74.** $y=\frac{C+a\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}}-ap$.

11.76. $x^2+y^2-2xy=0$ $(x^2+y^2\neq 0)$. **11.77.** $x^2-xy+2y^2=C$

11.78. $x^2+2xy+2y^2=C$. **11.79.** $x^2-y^2+2xy=0$ $(x^2+y^2\neq 0)$.

11.80. $x^3+3xy-3y^3=C$.

11.81. $x^3+y^3-2xy+C=0$, gdy $C=0$ liść Kartezjusza.

11.82. $x^3-y^2(1-x)+C=0$. **11.83.** $x^2y+3xy^2-y^3=3$.

11.84. $x^3-6x^2y-6xy^2+y^3=C$. **11.85.** $x^3+3x^2y^2+y^4=C$.

11.86. $xy^2(x+y)=C$. **11.87.** $x^2y^2+y^2(y+1)^2-9(y+1)^2+C=0$.

11.88. $\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)+C=0$, gdy $C=0$ lemniskata.

11.89. $xe^y-y^2=C$. **11.90.** $e^x+e^y+e^{x+y}=C$. **11.91.** $2x+x^2y=Cy$.

11.92. $\frac{x}{y}=C$. **11.93.** $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}=C$. **11.94.** $\ln(x+y)-\frac{y}{x+y}=0$.

11.95. $\frac{xy}{x-y}+\ln\frac{x}{y}=C$. **11.96.** $x^2+y^2+2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}=C$.

11.97. $x\ln y-x^2-y^2=C$.

11.98. $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=C$. **11.99.** $\sqrt{x^2-y^2}-x=C$.

11.100. $\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\,dx+x\,dy=0$, $\frac{2x\,dx+2y\,dy}{2\sqrt{x^2+y^2}}+y\,dx+x\,dy=0$,

$$\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}+d(xy)=0,\quad xy+\sqrt{x^2+y^2}=C.$$

11.101. $e^y-1=C(\ +x^2)$. **11.102.** $x+ye^{x/y}=C$.

11.103. $x^2\sin y+y^2\cos x+y=C$.

11.104. $x+\sin\frac{y}{x}-\frac{1}{y}-\cos\frac{x}{y}=C$. **11.105.** $x\operatorname{ctg}y+y\operatorname{tg}x+\arcsin\frac{x}{y}=C$.

11.106. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}+\sqrt{1+x^2+y^2}=C$. **11.109.** $x^2-y=Cx$.

11.110. $\mu=\frac{1}{x^2}$, $x+\frac{y}{x}=C$.

11.111. $\mu=y^{-2}$, $x^2y+2x=Cy$.

11.112. $x^2+y^2=Ce^{-x}$.

11.113. $\mu=e^{-2x}$, $y^2=(C-2x)e^{2x}$.

11.114. $\mu=\frac{1}{x^4}$, $y^2=Cx^3+x^2$.

11.115. $\mu=\frac{1}{y}$, $xy-\ln y=0$.

11.116. $\mu=\frac{1}{x^2}$, $y(x-y)=Cx$.

11.117. $x^2y-x+y^2+y\ln y=Cy$.

11.118. $\mu=x$, $x^2(3y+xy^3)=C$.

11.119. $6x^2y-2y^3-12x^4-3x^5=Cx^3$.

11.120. $\mu=\cos y$, $x^2\sin y+\frac{1}{2}\cos 2y=C$.

11.121. $\mu=\frac{1}{\sin y}$, $\frac{x}{\sin y}+x^3=C$.

11.122. $x\sin y+y\cos y-\sin y=Ce^{-x}$.

11.123. $\mu=e^{-y}$, $e^{-y}\cos x=x+C$.

11.124. $u=\frac{1}{x}$, $x\sin y+y\ln x=C$.

11.125. $f(x)=3x$, $g(y)=y$, $x^3+2xy-3y=C$.

11.126. $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(y)=y$, $x^3y-2x^2y^2+3y^4=C$.

11.127. $f(x)=\frac{2}{x}$, $g(y)=y^2$, $4x^2+y^2=Cx$.

11.128. $f(x)=x$, $g(y)=y$, $x^4+6x^2y^2+y^4=C$.

11.129. $f(x)=x^2$, $g(y)=e^y$, $x^3e^y-y=C$.

11.130. $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(y)=\frac{1}{y}$, $y+xe^{-y}=C$.

11.131. $f(x)=1+x^2$, $g(y)=e^y$, $x^2+x^2e^y+e^y=C$.

11.132. $f(x)=x$, $g(y)=e^y$, $xe^y-y^2=C$.

11.133. $f(x)=2x$, $g(y)=\cos y$, $x^2\cos^2 y+y^2=C$.

11.134. $f(x)=x$, $g(y)=\frac{1}{\sin 2y}$, $x^2\cos 2y+2x=C$.

11.135. $f(x)=x$, $g(y)=\cos y$, $x^2\cos y+y^2\cos x=C$.

DO ROZDZIAŁU XII

12.2. $y=\ln|C_1 e^{-x}+C_2 e^{x}|$. **12.3.** $y=-\ln\cos(x+C_1)+C_2$.

12.4. $y=C_1 x+x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}+C_2$.

12.5. $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1$. **12.6.** $y=\frac{1}{6}x^3+C_1 x-\sin x+C_2$.

12.7. $y=-\frac{1}{8}\sin 2x+C_1 x+C_2$. **12.8.** $y=C_1\sin x-x-\frac{1}{2}\sin 2x+C_2$.

12.9. $y=-\cos x-x\sin x+\frac{1}{2}C_1 x^2+C_2$. **12.10.** $y=\frac{1}{3}x^3+C_1 e^{x}+C_2$.

12.11. $y=\pm\arcsin(C_1 e^{x/a})+C_2$. **12.12.** $y=xe^{x}+C_1 e^{x}-e^{x}+C_2$.

12.13. $y=\frac{1}{3}e^{x}-\frac{1}{2}C_1 e^{-2x}+C_2$. **12.14.** $y=C_1\ln x+C_2$.

12.15. $y=C_1 x^2+C_2$. **12.16.** $y=\frac{1}{2}x^2+A\ln|x|+B$.

12.17. $y=\frac{1}{9}x^3+x+A\ln|x|+B$. **12.18.** $y=(C_1 x-C_1^2)e^{x/C_1+1}+C_2$.

12.19. $y=e^{x}(x-1)+C_1 x^2+C_2$. **12.20.** $y=A\ln|1+2x|+B$.

12.21. $y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x+C_1\operatorname{arctg} x+C_2$. **12.22.** $y=-\dfrac{1}{C^2}\ln|1-Cx|-\dfrac{1}{C}x+C_2$.

12.23. $y=(1+C_1^2)\ln(x+C_1)-C_1 x+C_2$. **12.24.** $y=C_1 x(\ln x-1)+C_2$.

12.25. $y=C_2-C_1\cos x-x$. **12.26.** $y=\frac{1}{2}\ln^2 x+C_1\ln x+ax+C_2$.

12.27. $y=\dfrac{1}{x}+C_1\ln x+C_2$.

12.28. $y=C_2-\frac{1}{2}\sqrt{1-C_1^2}\,x^2+\frac{1}{2}C_1 x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}C_1\arcsin x$.

12.29. $y=\dfrac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+2C_1}+\dfrac{2C_1-1}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2C_1}|+C_2$.

12.30. $y=\frac{1}{3}(x+C_1)^3+C_2$. **12.31.** $y=x+\frac{1}{3}(x+C_1)^3+C_2$.

12.32. $y=\frac{6}{5}(x+C_1)+\frac{5}{12}(x+C_1)^3+C_2$. **12.33.** $y=\ln|\operatorname{tg}(\frac{1}{2}x+C_1)|+C_2$.

12.34. $y=\frac{1}{2}C_1 x^2+C_1^2 x+C_2$. **12.35.** $y=\frac{3}{7}(x+C_1)^{7/3}-\frac{3}{4}C_1(x+C_1)^{4/3}+C_2$.

12.36. a) $y=-\int_0^x e^{-x^2}dx$; b) $y=0$. **12.37.** $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{2x}-\frac{16}{5}$.

12.38. $y=x+1-\cos 2x$. **12.39.** $y=C_1 x+C_2-\ln\cos x$, $y=-\ln\cos x$.

12.40. a) $y=x^2-x$, $y=-x^2-x$; b) $y=0$, $y=\frac{1}{3}x^3$.

12.41. $y=\dfrac{P}{EJ}(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}lx^2)$. **12.42.** $y=\dfrac{w}{JE}(-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}lx^3+\frac{1}{2}l^2x^2-\frac{5}{6}l^3x)$.

12.43. $x=5t^2+5t$, $x(2)=30$ m. **12.45.** $y=C\sin(x+C_1)$.

12.46. $y=C_1e^{ax}+C_2e^{-ax}$. **12.47.** $C_2^2(x-C_1)=(C_2y^{2/3}+2)\sqrt{C_2y^{2/3}-1}$.

12.48. $3x+C_2=4\sqrt{C_1+\sqrt{y}}\,(\sqrt{y}-2C_1)$. **12.49.** $y=C_2-\ln|x-C_1|$.

12.50. $y=\ln|C_1e^x+C_2e^{-x}|$. **12.51.** $\dfrac{y+a}{\sqrt{2C_1}}=\operatorname{tg}\sqrt{\tfrac{1}{2}C_1(x-C_2)}$.

12.52. $(x-C_1)+(y-C_2)=1$. **12.53.** $x+C_2=\dfrac{1}{C_1}\ln\dfrac{\sqrt{C_1^2+3e^y}-C_1}{\sqrt{C_1^2+3e^y}+C_1}$.

12.54. $e^y+\frac{1}{4}C_1=(x+C_2)^2$. **12.55.** $x-C_2=-\frac{1}{2}y^2\ln y+\frac{3}{4}y^2+C_1y$.

12.56. $y=\arcsin(C_1e^x-1)+C_2$. **12.57.** $y=C_2e^{C_1x}$.

12.58. $C_1x+C_2=\ln\left|\dfrac{y}{y+C_1}\right|$.

12.59. $C_1x+C_2=\ln\left|y+\sqrt{y^2-\dfrac{1}{C_1^2}}\right|$ lub po dojściu do postaci $\dfrac{dy}{\sqrt{C^2y^2-1}}=dx$

podstawić $Cy=\cosh t$, uzyskujemy wówczas równoważną odpowiedź

$$y=C_2\cosh\frac{x+C_1}{C_2},\quad \text{gdzie}\quad C_2=\frac{1}{C}.$$

12.60. $\ln y=C_2e^x+C_2e^{-x}$. **12.61.** $y\ln y+x+C_1y+C_2=0$.

12.62. $Cy=a+C_1e^{cx}$. **12.63.** $(x-C_1)^2=4C(y-C)$.

12.64. $y\cos^2(x+C_1)=C_2$. **12.65.** $2(C_1y-1)^{2/3}=3C_1x+C_2$.

12.66. $2C_2y^2=2C_1C_2+C_2^2e^{2x}+(C_1^2-1)e^{-2x}$.

12.67. $\ln|y+\sqrt{y^2+1}|=C_1x+C_2$ lub $y=\sinh[C_3(x-C_4)]$.

12.68. $y=1+\dfrac{1}{C_1x+C_2}$. **12.69.** $y=4-C_1\sin^2t$, $2x=C_2+C_1(2t-\sin 2t)$.

12.70. $x=C_1+C_2\ln|y+z|+\ln|y-C_1z|$, $z^2=y^2+1-C_1^2$.

12.71. $y=\frac{1}{3}(x+C)^3+C_1$. **12.72.** $3x=2(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}+C_2$.

12.73. $y=C_1\dfrac{1+C_2e^x}{1-C_2e^x}$. **12.74.** $x=C_1\ln\left|\dfrac{y-C_2}{y+C_2}\right|$. **12.75.** $x=-\frac{3}{2}(y+2)^{2/3}$.

12.76. $y=\sin x+1$. **12.77.** $y=-\ln|x-1|$. **12.78.** $x=-\frac{1}{2}e^{-y^2}$.

12.79. $yy''+n(1+y'^2)=0$,

$n=1$, $(x+C_1)^2+y^2=C$ okręgi,

$n=-1$, $y=\frac{1}{2}C_2 e^{x\sqrt{C}}+\frac{1}{2CC_2}e^{-x\sqrt{C}}$ linie łańcuchowe,

$n=\frac{1}{2}$, $x=\pm\frac{1}{2}C(2t-\sin 2t)-C_1$, $y=\frac{1}{2}C(1-\cos 2t)$ cykloidy,

$n=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{C}{4}x^2+\frac{C_2}{2}x+\frac{C_2^2+4}{4C}$ parabole $(CC_1=C_2)$.

12.82. $y=C_1 e^{C_2 x}$. **12.83.** $y(C_2-C_1 x)=1$. **12.84.** $y=C_1 e^{x^3+C_2 x}$.

12.85. $\ln C_2 y=4x^{5/2}+C_1 x$. **12.86.** $y^3=C_1(x+C_2)^2$, $y=C$.

12.87. $y\cos^2(x+C_1)=C_2$.

12.88. $\ln|y|=\ln|x^2-2x+C_1|+\int\frac{2x\,dx}{(x-1)^2+C_1-1}+C_2$, $y=C$.

12.89. $y=C_1 x^2+C_2$. **12.90.** $y(C_2+x^2)=C_1 x$. **12.91.** $y=C_2 x e^{-C_1/x}$.

12.92. $y=C_2 x(\ln C_1 x)^2$, $y=Cx$. **12.93.** $2\ln C_1 y=\frac{C_2}{x}+\frac{x}{C_2}$.

12.94. $y=C$, $y=Ce^{-x}$. **12.95.** $y=C_2\left|\frac{x}{x+C_1}\right|^{1/C_1}$, $y=C$.

12.96. $y=C_2(x+\sqrt{x^2+1})^{C_1}$. **12.97.** $y=C_2|x|^{C_1-\frac{1}{2}\ln|x|}$

DO ROZDZIAŁU XIII

13.6. $y=C_1+C_2 x$. **13.7.** $y=C_1\sin x+C_2\cos x$. **13.8.** $y=C_1+C_2 e^{2x}$.

13.9. $y=C_1 e^{2x}+C_2 e^{-2x}$. **13.10.** $y=C_1 e^{3x}+C_2 e^{-3x}$.

13.11. $y=C_1\sin\frac{x}{\sqrt{3}}+C_2\cos\frac{x}{\sqrt{3}}$ **13.12.** $y=e^{-x/2}(C_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x+C_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x)$

13.13. $y=(C_1 x+C_2)e^{-x/2}$. **13.14.** $y=C_1 e^{x}+C_2 e^{-2x}$.

13.15. $y=C_1 e^{2x}+C_2 e^{-x}$. **13.16.** $y=C_1 e^{-x}+C_2 x e^{-x}$.

13.17. $y=(C_1 x+C_2)e^{x}$. **13.18.** $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

13.19. $y=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **13.20.** $y=(C_1 x+C_2)e^{-3x}$.

13.21. $y=C_1 e^{x}+C_2 e^{2x}$. **13.22.** $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

13.23. $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **13.24.** $y=C_1 e^{6x}+C_2 e^{-x}$.

13.25. $y=C_1 e^{2x}+C_2 e^{3x}$. **13.26.** $y=C_1 e^{-x}+C_2 e^{-3x}$.

13.27. $y=(C_1x+C_2)e^{2x}$. **13.28.** $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

13.29. $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **13.30.** $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

13.31. $y=e^{5x}(C_1+C_2x)$. **13.32.** $y=e^{-\sqrt{2}x}(C_1+C_2x)$.

13.33. $y=C_1e^{x/2}+C_2e^{-x}$. **13.34.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{x/2}$.

13.35. $y=e^{x/3}(C_1+C_2x)$. **13.36.** $y=\sin 2x$. **13.37.** $y=C\sin \pi x$.

13.38. $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}=0$, $x=C_1e^{2t}+C_2$. **13.39.** $y=A\sin(3t+\varphi)$.

13.40. $x=C_1e^{-3t}+C_2$. **13.45.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+\dfrac{12x+7}{144}$.

13.46. $y=-2x-1+C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$. **13.47.** $y=x+1+(C_1x+C_2)e^{2x}$.

13.48. $y=-\frac{1}{10}x+\frac{4}{25}+(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{-3x}$.

13.49. $y=e^{x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)+\frac{1}{3}x+\frac{5}{9}$.

13.50. $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$. **13.51.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$.

13.52. $y=-x^2+4x-14+C_1e^{x}+C_2e^{-x/3}$. **13.53.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-\sin x$.

13.54. $y=C_1\cos x+(\frac{1}{2}ax+C_2)\sin x$.

13.55. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-\frac{1}{6}x\cos 3x$.

13.56. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x(\cos x+\frac{1}{2}\sin x)$.

13.57. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{3}(2\cos x+\sin x)$.

13.58. $y=(-\frac{5}{6}x+C_1)\cos 3x+\frac{1}{3}x+C_2\sin 3x$.

13.59. $y=\frac{4}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+(C_1\cos x+C_2\sin x)e^{x}$.

13.60. $y=-\frac{29}{85}\cos 2x+\frac{3}{85}\sin 2x+C_1e^{x}+C_2e^{-x/2}$.

13.61. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}e^{x}$.

13.62. $y=2e^{x}+(C_1x+C_2)e^{-x}$. **13.63.** $y=2e^{3x}+C_1e^{2x}-C_2e^{-2x}$.

13.64. Jeżeli $a\neq b$, to $y=\dfrac{1}{b^2-a^2}e^{bx}+C_2e^{-ax}$.

Jeżeli $a=b$, to $y=\left(\dfrac{x}{2a}+C_1\right)e^{ax}+C_2e^{-ax}$.

13.65. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{2x}x+\frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

13.66. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\dfrac{e^{nx}}{n^2-5n+6}$, $n\neq 2$, $n\neq 3$.

13.67. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{8}x\cos x+\frac{1}{39}\sin x$.

13.68. $y=(-\frac{1}{8}x^2+C_1)\cos 2x+(\frac{1}{16}x+C_2)\sin 2x$.

13.69. $y=C_1e^{4x}+C_2e^{4x}x+\dfrac{x+1}{4}e^{2x}$. **13.70.** $y=(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4})e^{3x}+C_1e^{2x}+C_2e^{x}$.

13.71. $y=e^{x^2}+C_1e^{x\sqrt{2}}+C_2e^{-x\sqrt{2}}$. **13.72.** $y=e^x[C_1+(C_2-1)x+x\ln x]$.

13.73. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{48}-\frac{1}{130}\cos 2x+\frac{4}{65}\sin 2x+C_1e^{4x}+C_2e^{-3x}$.

13.74. $y=-x-\frac{4}{3}+4\cos 2x+7\sin 2x+C_1e^{x}+C_2e^{-3x}$.

13.75. $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{10}(3\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+\frac{21}{4}x+\frac{45}{8}$.

13.76. $y=(C+\frac{1}{16}x)\cos 2x+(C_2+\frac{1}{8}x^2)\sin 2x+\frac{1}{4}x$.

13.77. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}+\frac{1}{3}e^{x}-\frac{1}{2}xe^{2x}$. **13.78.** $y=(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2)e^{-x}+\frac{1}{4}e^{x}$.

13.79. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x$.

13.80. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+(e^{x}+e^{-x})\operatorname{arctg}e^{x}$.

13.81. $y=C_1+C_2e^{2x}+\dfrac{x(x+1)}{4}e^{2x}$.

13.82. $y=(\frac{1}{2}x^2-x+1)e^{3x}+C_1e^{2x}+C_2e^{x}$.

13.83. $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x)$.

13.84. $y=e^{-x/2}[C_1-\frac{1}{3}\sqrt{3}x(\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x+C_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x)]$.

13.85. $y=\frac{5}{106}\cos x-\frac{9}{106}\sin x-\frac{1}{9}e^{2x}+C_1e^{7x/2}+C_2e^{-x}$.

13.86. $y=\cos 2x+\frac{1}{3}(\sin x+\sin 2x)$. **13.87.** $y=-\frac{1}{4}e^{x}+\frac{1}{4}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{2x}$.

13.88. a) dla $R^2-4LC>0$

$$i=Ae^{(-R-\sqrt{R^2-4LC})t/2L}+Be^{(-R+\sqrt{R^2-4LC})t/2L}+\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\sin(\omega t-\varphi);$$

b) dla $R^2-4LC=0$,

$$i=(At+B)e^{-R\omega t/2L}+\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\sin(\omega t-\varphi);$$

c) dla $R^2-4LC<0$,

$$i=e^{-R\omega t/2L}\left(A\sin\frac{\sqrt{4LC-R^2}}{2L}t+B\cos\frac{\sqrt{4LC-R^2}}{2L}t+\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\sin(\omega t-\varphi)\right),$$

gdzie

$$\sin\varphi=\frac{\omega-\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega L}\right)^2}},\qquad \cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega L}\right)^2}}.$$

13.94. $y=C_1x+C_2x^{-1}$. **13.95.** $y=C_1\cos(2\ln x)+C_2\sin(2\ln x)$.

13.96. $y=C_1x+\frac{C_2}{x^2}$. **13.97.** $y=C_1x+C_2x^3$. **13.98.** $y=\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_2}{x^6}$.

13.99. $y=x^{-2}(C_1+C_2\ln x)$. **13.100.** $2y=x+C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x$.

13.101. $y=x(C_1+C_2\ln x+\ln^2 x)$. **13.102.** $y=C_1x+C_2x^2-4x(\ln x+1)$.

13.103. $y=x(C_1+C_2\ln x)+\frac{3}{4}x^3$. **13.104.** $y=\frac{1}{6}x^5+(C_1x+C_2)x^2$.

13.105. $y=x\ln x+x^3+Cx+C_1x^2$. **13.106.** $y=2\ln^3 x+C_1\ln x+C_2$.

13.107. $y=x\ln^3 x+x(C_1+C_2\ln x)$. **13.108.** $y=C_1x+C_2x^2+\frac{1}{12}x^5(\ln x-\frac{7}{12})$.

13.109. $y=-\ln x\cos\ln x+C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x$.

13.110. $y=C_1x^2+C_2x^3+ax+bx^{-1}$. **13.111.** $y=C_1x+C_2x^2+x^3$.

13.112. $y=(2x+1)\ln(2x+1)+C_1(2x+1)+C_2(2x+1)^2$.

13.113. $y=C_1x^4+C_2x^{-1}-\cos x-\frac{3}{x}\sin x$.

13.118. $y=Ce^{2x}+e^{-x}(C_1\cos x\sqrt{3}+C_2\sin x\sqrt{3})$. **13.119.** $y=C_1e^x+C_2x+C_3$.

13.120. $y=C_1e^x+(C_2\cos\frac{1}{2}\sqrt{15}x+C_3\sin\frac{1}{2}\sqrt{15}x)e^{-x/2}$.

13.121. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$. **13.122.** $y=C_1e^x+e^{2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)$.

13.123. $y=e^{2x}(C+C_1x+C_2x^2)$. **13.124.** $y=C_1e^{-2x}+(C_2\cos x+C_3\sin x)e^{2x}$.

13.125. $y=C_1e^x+(C_2+C_3x)e^{2x}$. **13.126.** $y=C_1e^{3x}+e^{2x}(C_2+C_3x)$.

13.127. $y=Ce^{2x}+C_1e^{-2x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$.

13.128. $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$.

13.129. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$.

13.130. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\sin 2x+C_4\cos 2x$.

13.131. $y=C_1\cosh x+C_2\sinh x+C_3\cos\frac{1}{2}x+C_4\sin\frac{1}{2}x$.

13.132. $y=e^{-x/2}(C_1+C_2x)\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x+e^{-x/2}(C_3+C_4x)\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x$.

13.133. $y=e^{-x}(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3)$.

13.134. $y=e^{-3x/2}(C_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{7}x+C_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{7}x)+e^{-x}(C_3\cos x\sqrt{2}+C_4\sin x\sqrt{2})$.

13.135. $y=e^{x}(C_1+C_2x)+C_3\cos x+C_4\sin x$.

13.136. $y=C_1+(C_2+C_3x)\cos 2x+(C_4+C_5x)\sin 2x$.

13.137. $y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x$.

13.138. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{x/2}(C_3\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x+C_4\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x)+$
$+e^{-x/2}(C_5\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}x+C_6\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}x)$.

13.139. $y=C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+e^{-x}(C_4+C_5x+C_6x^2)$.

13.140. $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2$.

13.141. $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}-\frac{1}{6}x-\frac{11}{36}$.

13.142. $y=(C_1+C_2x)e^{x}+C_3+\frac{1}{3}x^3+2x^2+6x$.

13.143. $y=C_1e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x+x^3$.

13.144. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{1}{6}x^3)e^{x}$.

13.145. $y=C_1+C_2x+C_3e^{x}+\frac{1}{10}(\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x)$.

13.146. $y=(C_1+C_2x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x^3)e^{x}+C_3e^{-2x}$.

13.147. $y=C_1+C_2x+(C_3+x)e^{-x}+x^3-3x^2$.

13.148. $y=\frac{3}{8}e^{2x}-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x+C_1e^{x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$.

13.149. $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-x^3$.

13.150. $y=-\frac{1}{8}x^2\cos x+(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$.

13.151. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos x$.

13.152. $y=x\cos x+2xe^{-x}-1+C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.

13.153. $y=1$. **13.154.** $y=0$.

DO ROZDZIAŁU XIV

14.2. $y=A+Be^{2x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x$, $z=-A+Be^{2x}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$.

14.3. $x=e^{-t}(A\cos t+B\sin t)$, $y=\frac{1}{3}e^{-t}[(B-2A)\cos t-(A+2B)\sin t]$.

14.4. $x=Ae^{2t}+Be^{-2t}-2t$, $y=2(Be^{-2t}-Ae^{2t})$.

14.5. $x=Ae^{t}+Be^{-t}$ $y=-\frac{1}{4}(Ae^{t}+2Be^{-t})$.

14.6. $y=x+Be^{Ax}$ $z=-\dfrac{1}{AB}e^{-Ax}$.

14.7. $x=Ae^{-t}+Bte^{-t}+5t-9$, $y=2Ae^{-t}+Be^{-t}-2Bte^{-t}-6t+14$.

14.8. $x=-Ae^{2t}+4Be^{-3t}+t^2+t$, $y=Ae^{2t}+Be^{-3t}-\frac{1}{2}t^2$.

14.9. $z=e^{-6t}(A\cos t+B\sin t)$, $y=e^{-6t}[(A+B)\cos t-(A-B)\sin t]$, $A=1$, $B=0$.

14.10. $y=(Ax+B)e^{-2x}$, $z=-(Ax+A+B)e^{-2x}$, $A=-2$, $B=1$.

DO ROZDZIAŁU XV

15.4. Gdy $-\pi<x<\pi$, wtedy

$$f(x)\equiv x=2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right).$$

Gdy $x=-\pi$ lub $x=\pi$, szereg Fouriera daje wartość zero.

15.5. $f(x)=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right)$.

15.6. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1^2}{n^3}\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$.

15.7. $f(x)=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1-a^2}-\frac{2\sin 2x}{4-a^2}+\frac{3\sin 3x}{9-a^2}-\ldots\right)$.

15.8. $f(x)\equiv\cos ax=\frac{2a\sin ax}{\pi}\left(\frac{1}{2a^2}-\frac{\cos x}{a^2-1}+\frac{\cos 2x}{a^2-4}-\ldots+(-1)^n\frac{\cos nx}{a^2-n^2}+\ldots\right)$.

15.9. Gdy $-\pi<x<\pi$, wtedy

$$f(x)=\pi-\frac{8}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots+\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\ldots\right)+$$

$$+8\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\ldots\right).$$

Gdy $x=-\pi$ lub $x=\pi$, szereg Fouriera daje wartość 2π.

15.10. $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{2\sin 2x}{1\cdot 3}+\frac{4\sin 4x}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2k\sin 2kx}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots\right)$.

15.11. Gdy $-\pi<x<\pi$, wtedy

$$f(x)=\frac{4c}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots+\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}+\ldots\right).$$

Gdy $x=-\pi$ lub $x=\pi$, szereg Fouriera daje wartość zero.

15.12. $f(x)=\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots\right)+\frac{\sin x}{2}$.

Uwaga $a_0=\frac{1}{\pi}$, $a_{2k}=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ dla $k=1,2,3,\ldots$;

$a_{2k-1}=0$ dla $k=1,2,3,\ldots$; $b_1=\frac{1}{2}$, $b_n=0$ dla $n=2,3,\ldots$

15.13. $f(x)=\frac{4a}{\pi}(\cos\alpha\sin x+\frac{1}{3}\cos 3\alpha\sin 3x+\frac{1}{5}\cos 5\alpha\sin 5x+\ldots)$.

15.14. $f(x)=\frac{4}{\pi}\frac{a}{\alpha}\left(\sin\alpha\sin x+\frac{1}{3^2}\sin 3\alpha\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5\alpha\sin 5x+\ldots\right)$.

15.15. $f(x)=|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots\right)$.

15.16. $f(x)\equiv x\cos x=-\frac{1}{2}\left(\sin x+\frac{4\sin 2x}{1\cdot 3}-\frac{6\sin 3x}{3\cdot 5}+\frac{8\sin 4x}{5\cdot 7}+\ldots\right.$

$\left.\ldots+(-1)^n\frac{2n\sin nx}{(2n-3)(2n-1)}+\ldots\right)$.

15.17. $f(x)=\frac{4a}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right)$.

15.18. $f(x)=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots$

15.19. $f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{2\sin 2x}{1\cdot 3}+\frac{4\sin 4x}{3\cdot 5}+\frac{6\sin 6x}{5\cdot 7}+\ldots\right)$.

15.20. $f(x)=\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x+\ldots$

15.21. $f(x)\equiv\ln\left|2\cos\frac{x}{2}\right|=\cos x-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n}+\ldots$

15.22. $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\ldots$

15.23. $f(x)=\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right]$.

15.24. Rozwinięcie według sinusów,

$$f(x)=\frac{3}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3^3}\sin 3x+\frac{1}{5^3}\sin 5x+\ldots\right).$$

Rozwinięcie według cosinusów

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{3^2}+\ldots\right).$$

15.25. $f(x)=\dfrac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left[\dfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx-n\sin nx}{1+n^2}\right]$.

15.26. $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\sin x-\dfrac{\sin 3x}{3^2}+\dfrac{\sin 5x}{5^2}-\ldots\right)$.

15.27. $f(x)=\dfrac{6a}{\pi^2}\left(\cos x-\dfrac{\cos 2x}{2^2}+\dfrac{\cos 3x}{3^2}-\ldots\right)$.

15.28. $f(x)=\dfrac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi nc}{l}\sin\dfrac{\pi nx}{l}}{n^2}$.

15.29. $f(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\cos\pi n\cos\dfrac{\pi n}{2}-1\right)\cos\dfrac{\pi n}{2}x$.

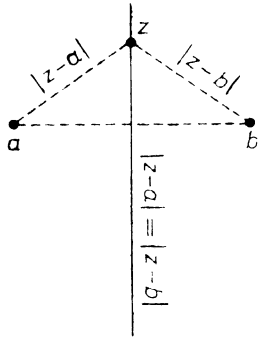
15.31. $i=\dfrac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$.

15.32. $B=\dfrac{4}{\pi}B_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x$.

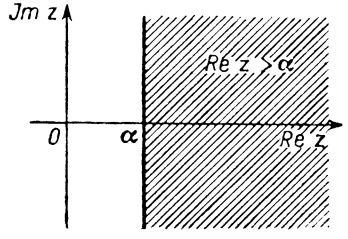
DO ROZDZIAŁU XVI

16.5. Symetralna odcinka o końcach a i b (rys. R.16.1).

16.6. Półpłaszczyzna, której brzeg jest prostą równoległą do osi rzędnych (Im z) przechodzącą przez punkt $(\alpha, 0)$ (rys. R.16.2).



Rys. R.16.1



Rys. R.16.2

16.7. Część płaszczyzny leżąca na prawo od prawej gałęzi hiperboli równobocznej o równaniu $x^2-y^2=\alpha$, gdzie $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$ (rys. R.16.3).

16.8. Dodatnia półoś Re z, to znaczy liczby rzeczywiste nieujemne (rys. R.16.4).

16.9. 2. **16.10.** 0 dla $|z|<1$, 1 dla $z=1$, a dla innych z rozbieżny.

16.11. $4+i$. **16.12.** Ciąg ten jest rozbieżny. **16.13.** Rozbieżny.

16.14. Zbieżny i jego suma równa się $1+i$.

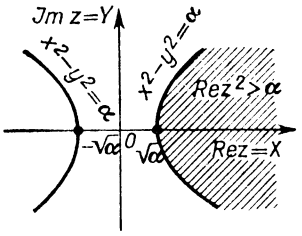
16.15. Zbieżny. **16.16.** Zbieżny dla $|z|<1$, rozbieżny dla $|z|\geqslant 1$. **16.31.** $R=4$.

16.32. $R=1$; na całym brzegu koła zbieżności szereg jest rozbieżny.

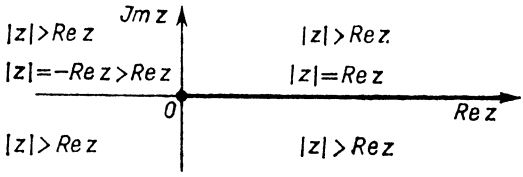
16.33. $R=\frac{1}{2}$; na całym brzegu koła zbieżności szereg jest rozbieżny.

16.35. $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{40}x^5$.

16.43. Tak, ∞. **16.44.** Nie. **16.45.** Tak, ∞. **16.46.** Nie. **16.47.** 0.



Rys. R.16.3



Rys. R.16.4

16.48. 1. **16.49.** 0. **16.50.** ∞.

16.51. Pierwsza całka równa się 1, a druga całka równa się 2.

16.52. 0. **16.53.** $2\pi i$. **16.54.** 0.

16.55. $-\frac{8}{3}i$.

Wskazówka (do zad. 16.55). Na krzywej C jest $|z-1|=2\sin\frac{1}{2}t$.

16.59. 0, 1, 0, $\frac{1}{3}$. **16.60.** $\frac{1}{2}\pi$. **16.61.** $\frac{1}{2}\pi$.

16.63. Obszar zmienności: $|z|>1$; suma: $\cos 2z+\dfrac{1}{z^2-1}$.

16.64. Obszar zmienności: $0<|z|<\frac{1}{2}$; suma $\dfrac{1}{1-4z^2}+\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)-1$.

16.65. $\dfrac{1}{z}-2\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n+1}$. **16.66.** $3z^{-1}+2\sum_{k=1}^{\infty} z^{-2k-1}$.

16.67. $\dfrac{1}{z^2-1}=\dfrac{1}{2(z-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z-1)^n$. **16.68.** $\dfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{z^{2n+1}}-\dfrac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{4^n}$.

16.69. $\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}$. **16.70.** $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^n+1}$. **16.71.** $-\sum_{n=0}^{\infty} z^n\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

16.72. $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$, gdzie

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{(-n)!} & \text{dla } n<0,\\ 1 & \text{dla } n=0,\\ 0 & \text{dla } n=1,\\ 1 & \text{dla } n\geqslant 2.\end{cases}$$

16.77. $\frac{1}{8}\pi(4i-e^{2i})$.

16.78. $\frac{5}{2}\pi i$.

16.79. $-\dfrac{\pi i}{40a^4}$. **16.82.** πi. **16.83.** $(2k+\frac{3}{2})\pi i$.

16.84. $\exp[(2k+\frac{1}{2})\pi]$. **16.85.** $\exp[-(2k+\frac{3}{2})\pi]$. **16.86.** $\exp[-(2k+1)\pi]$.

16.87. a) Dwukrotna – bo np. $f(-\frac{1}{4})=f(-\frac{3}{4})=-\frac{3}{16}$, a więcej niż dwukrotna jako wielomian kwadratowy być nie może; b) jednokrotna.

16.88. Trzykrotna.

16.89. Sześciokrotna – patrz wzór (16.10.16).

16.90. Dwukrotna.

DO ROZDZIAŁU XVII

17.3. $\dfrac{2s^3}{s^4-1}$. **17.4.** $\dfrac{2s^2}{s^4-1}$. **17.5.** $\dfrac{2}{s^4-1}$.

17.6. $\dfrac{2s}{s^4-1}$. **17.7.** $\dfrac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$. **17.8.** $\dfrac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$.

17.9. $\dfrac{s(s^2+a^2+b^2)}{[s^2+(a-b)^2][s^2+(a+b)^2]}$. **17.10.** $\dfrac{a(s^2+a^2-b^2)}{[s^2+(a-b)^2][s^2+(a+b)^2]}$.

17.11. $\dfrac{2as}{(s^2-a^2)^2}$. **17.12.** $\dfrac{2a(3s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^3}$. **17.13.** $\dfrac{s+1}{s(s+2)}$.

17.14. $\dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$. **17.15.** $\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$. **17.16.** $\dfrac{5s-1}{s^3-1}$.

17.17. $\mathfrak{L}\{f^{(4)}(t)\}=s^4\mathfrak{L}\{f(t)\}-s^3f(0^+)-s^2f'(0^+)-sf''(0^+)-f'''(0^+)$.

17.21. $y=3(1-e^{-2x})$. **17.22.** $y=(x-1)e^{2x}+e^x$.

17.23. $y=e^x(e^x-x^2-x+1)$. **17.24.** $y=e^{-x}[3\sin x+(1-x)\cos x)]$.

17.25. $y=\frac{1}{16}(32e^x-15e^{2x}+5e^{-2x}+4x^2+8x-22)$.

17.26. $y=e^x(x-1)+e^{-x}(e^{-x}+2x)$. **17.27.** $y=\frac{1}{2}(e^{-t}+\cos t-\sin t)$.

17.28. $y=\frac{1}{2}(\sin x-x\cos x)$. **17.29.** $y=\frac{3}{4}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-2t}-\frac{2}{3}e^{t}$, $z=\frac{3}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{-2t}-e^{t}$.

17.30. $y=e^{-6t}\cos t$, $z=e^{-6t}(\cos t-\sin t)$. **17.31.** $y=t^2+t$, $z=-0{,}5t^2$.

17.32. $y=3+\cos 2t$, $z=3-3\cos 2t$. **17.33.** $y=\frac{3}{8}te^{t}$, $z=\frac{1}{8}e^{t}+e^{-t}$.

DO ROZDZIAŁU XVIII

18.4. W górnej półpłaszczyźnie ($y>0$) typ eliptyczny, na osi Ox ($y=0$) paraboliczny, w dolnej płaszczyźnie ($y<0$) typ hiperboliczny.

18.5. Typ paraboliczny na całej płaszczyźnie. Charakterystyka $\xi=x+y$, przyjmując $\eta=y$ otrzymamy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+(a+b)\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta}+cu=0.$$

18.6. Dla $y<0$ typ hiperboliczny. Charakterystyki

$$\xi=x-\tfrac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \xi=x+\tfrac{2}{3}(-y)^{3/2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0.$$

18.7. Wewnątrz każdej z czterech ćwiartek typ hiperboliczny. Charakterystyki $\xi=xy$, $\eta=\dfrac{y}{x}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}-\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

18.8. Typ hiperboliczny. Charakterystyki $\xi=x-y$, $\eta=x+y$. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}=0$.

18.9. Typ parabol iczny. Charakterystyka $\xi=y/x$, przyjmując $\eta=y$ otrzymamy $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$.

18.10. Typ eliptyczny, $\xi=x^2-y^2$, $\eta=x^2$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

18.11. $u=f(y)+g(y)\,e^{-x}-\frac{1}{2}x^2-xy$, gdzie f, g dowolne funkcje.

Wskazówka. Przez podstawienie $\dfrac{\partial u}{\partial x}=p$ otrzymuje się równanie różniczkowe zwyczajne $\dfrac{dp}{dx}+p+x+y+1=0$, w którym y należy traktować jako stałą.

18.12. Typ hiperboliczny, $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

$$u(x,y)=f(x-y)+g(x+y)\exp[(y-x)/2]-(x+y)(x+y+2)/4.$$

18.13. $u(x,y)=\ln|x|f_1(xy)+f_2(xy)$, jest ona równoważna postaci (6) z zad. 18.2.

18.14. $u(x,y)=\ln|y/x|f_3(xy)+f_4(xy)$ jest ona równoważna postaci (6) z zad. 18.2 oraz postaci podanej w odpowiedzi do zadania poprzedniego.

DO ROZDZIAŁU XIX

19.2. Ekstremalą jest $y=-\frac{1}{2}x$, jeśli punkty A, B leżą na tej prostej; w innych przypadkach całka nie posiada ekstremum.

19.3. Funkcja podcałkowa jest pochodną względem x iloczynu xy^2, więc całka nie zależy od drogi całkowania a tylko od punktu początkowego $A(x_1,y_1)$ i końcowego $B(x_2,y_2)$; wartość całki jest stała i równa $x_2y_2^2-x_1y_1^2$.

19.4. Równanie Eulera $yy''+y'^2+1=0$; rozwiązaniem jego rodzina okręgów o środkach położonych na osi Ox i dowolnych promieniach $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$. Dla dowolnych punktów $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, dla których $y_1y_2>0$ istnieje dokładnie jedna ekstremala — okrąg przez nie przechodzący.

19.5. Jeśli $y_1=0$, $y_2=0$, to ekstremum (minimum) zachodzi na osi odciętych ($y=0$), w innych przypadkach całka nie posiada ekstremum.

DO ROZDZIAŁU XX

20.2. $\frac{1}{4!}$. **20.3.** $p\geqslant 0{,}97$. **20.4.** $p=\frac{2!}{5!}=\frac{1}{60}$.

20.5. a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{5}{18}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{4}$;

f) iloczyn dwóch liczb jest liczbą parzystą, jeśli 1) obie liczby są parzyste (takich przypadków mamy 9), 2) jeśli jedna liczba jest parzysta a druga jest nieparzysta (takich przypadków jest 18). $p=\frac{3}{4}$;

g) $p=\frac{11}{36}$.

20.6. $p=\frac{1}{4}$. **20.7.** $p=\frac{1}{3}$. **20.8.** a) 0,2; b) $P(A)>P(B)$. **20.9.** $\binom{16}{3}:\binom{20}{3}$.

20.10. $p_1=\dfrac{\binom{30}{1}\binom{15}{2}+\binom{30}{2}\binom{15}{1}+\binom{30}{3}}{\binom{45}{3}}$; $p_2=\frac{406}{1419}$.

11. $\max(0,n+M-N)\leqslant m\leqslant\min(n,M)$, $p_1=\dfrac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$,

$$p_2=\sum_{k=\max(0,\,n+M-N)}^{k=m}\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

20.12. $\dfrac{\binom{10}{1}\binom{20}{4}+\binom{10}{2}\binom{20}{3}+\binom{10}{3}\binom{20}{2}}{\binom{30}{5}}$.

20.18. a) $B\subset A$, $C\subset A$, tzn. wtedy jeśli zachodzą B i C, to zachodzi również A;

b) $A\subset B$, $A\subset C$ tzn. wtedy jeśli zajdzie A, to zajdą B i C;

c) $(A\cup B)\cap(B\cup C)=B\cup A\cap C$.

20.19. a) nie; b) tak; c) nie.

20.20. a) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap C$; b) $A\cap B\cap\bar{C}$; c) $\Omega-\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;

d) $(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$;

e) $(A\cap B\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B}\cap C)\cup(\bar{A}\cap B\cap C)$;

f) $A\cup B\cup C-A\cap B\cap C$; g) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$.

20.21. $p=0{,}96\cdot 0{,}75=0{,}72$. **20.23.** a) 0,4; b) $\frac{1}{3}$.

20.24. Dla zdarzeń wyłączających $P(A|B)=0\neq P(A)$, $P(B|A)=0\neq P(B)$, więc zdarzenia są zależne.

20.25. a) $(1-p)^{100}$; b) $1-(1-p)^{100}$.

20.26. a) $(\frac{13}{20})^2=0{,}4225$; b) $\frac{39}{95}$. **20.27.** $5\cdot 10^{-4}$. **20.28.** $\frac{4}{13}$. **20.29.** 0,9.

20.30. a) 6^{-5}; b) 6^{-5}; c) $\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^4\cdot 5=(\frac{5}{6})^5$;

d) $(\frac{5}{6})^5$; e) $1-(\frac{5}{6})^5$; f) $1-\dfrac{26}{6^5}=\dfrac{7750}{7776}$.

20.31. $\dfrac{4^3}{\binom{52}{3}}=\dfrac{64}{5525}\approx 0{,}0029$.

20.32. $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-$
$-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$.

20.33. a) $p_1(1-p_2)(1-p_3)+p_2(1-p_1)(1-p_3)+p_3(1-p_1)(1-p_2)$;

b) $p_1p_2(1-p_3)+p_2p_3(1-p_1)+p_3p_1(1-p_2)$;

c) $p_1p_2p_3$;

d) $p_1+p_2+p_3-p_1p_2-p_2p_3-p_3p_1+p_1p_2p_3$;

e) suma trzech pierwszych prawdopodobieństw równa się czwartemu.

20.34. 0,328.

20.35. $p=1-q$, (1) $p(2-p)$, (2) p^2, (3) $1-q^3$, (4) p^3, (5) p^2+p-p^3, (6) $2p^2-p^4$, (7) $p^2(2-p)$, (8) $p^2(2-p)(1-q^3)$, (9) $p^3+p^2-p^4$, (10) $2p^3-p^5$, (11) $p^4+p^5-p^7$, (12) $p^4+p^5-p^6$.

20.38. 0,93. **20.39.** a) 3,2%; b) $\frac{15}{32}$.

20.40. a) 80,5%; b) 19,5%; c) $\frac{7}{39}$.

20.41. a) $0{,}84\cdot\frac{5}{6}+0{,}16\cdot\frac{1}{8}=0{,}72$; b) 0,28; c) $\frac{35}{36}$.

20.42. Do trzeciego typu.

20.43. a) $\frac{37}{60}$; b) $\frac{10}{37}$. **20.44.** a) $C=0{,}1$; c) 0,9.

20.45. $C=\frac{1}{9}$, a) dla $x<0$ jest $F(x)=0$, dla $0\leqslant x\leqslant 3$ jest $F(x)=\frac{1}{27}x^3$, dla $x>3$ jest $F(x)=1$; b) $\frac{1}{27}$.

20.46. b) $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ dla $-1<x<1$, dla pozostałych x $f(x)=0$; c) 0,5.

20.47. a) $C=1$; b) dla $x<1$ $F(x)=0$, dla $x\geqslant 1$ $F(x)=1-\dfrac{1}{x}$; c) $\frac{1}{6}$;
d) $(\frac{5}{6})^3$.

20.51. b) $E(X)=0$, $V(X)=\frac{1}{2}$; c) dla $-1\leqslant x\leqslant 0$ $F(x)=\frac{1}{2}(1-x^2)$, dla $0\leqslant x\leqslant 1$ $F(x)=\frac{1}{2}(1-x^2)$, dla $x>1$ $F(x)=1$; d) 0,75.

20.52. a)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

;

b) $E(X)=2$, $V(X)=1$; c) $\frac{5}{8}$.

20.53. a)

x_i	1	2	-3
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

; c) $E(X)=-\frac{1}{6}$, gra nie jest sprawiedliwa.

20.54. a) $f(x)=0$ dla $x<0$, $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ dla $0\leqslant x\leqslant\pi$, $f(x)=0$ dla $x>\pi$;
b) $E(X)=\frac{1}{2}\pi$, $V(X)=\pi$; c) 1.

20.56. a) $F(x)=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}$; b) $m_e=0$, $m_0=0$;

c) $E(X)$ nie istnieje, ponieważ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{u\to-\infty\\ v\to+\infty}}\int_{u}^{v}\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2\pi}\Big[\lim_{v\to+\infty}\ln(1+v^2)-\lim_{u\to-\infty}(1+u^2)\Big]$$

nie posiada określonej wartości liczbowej.

20.57. $E(X)=m$, $V(X)=\sigma^2$, $m_e=m$, $m_0=m$.

20.58. a) $C=2$; b) $m_e=\sqrt{\ln 2}$, $m_0=\frac{1}{8}\sqrt{2}$;

c) $E(X)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $V(X)=\frac{4-\pi}{4}$.

20.59. $E(X)=e^{a+\frac{1}{2}}$, $V(X)=e^{2a+1}(e-1)$.

20.62. $\frac{224}{3^8}$. **20.63.** $\frac{105\cdot 9^{13}}{10^{15}}$.

20.64. a) $\binom{365}{3}\frac{364^{362}}{365^{365}}$; b) $\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-3}=$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-3}\to\frac{1}{6e}$$

(por. cz. I, rozdz. II, wzór (2. 1. 12)).

20.65. b) $(3;5;\frac{3}{5})=\frac{6^3}{5^4}$. **20.66.** a) $(0{,}963)^5$; b) $\frac{185\cdot(963)^4}{10^{15}}$.

20.68. a) $\frac{3}{e^3}\approx 15\%$; b) $\frac{17}{2e^3}$; c) 3; d) $\frac{9}{2e^3}$.

20.69. $C=e^{-a}$, więc jest to rozkład Poissona o parametrze a, a ponieważ $E(X)=\lambda$, więc $a=\lambda$.

20.70. $\frac{35}{2e^3}=87{,}5\%$.

20.73. a) 0,230; b) 0,311; c) 0,212; d) 0,230; e) 0,694.

20.74. a) 0,73; b) 0,997; c) $k=2{,}58$, $k=1{,}96$.

20.76. a) $P\{0\leqslant X\leqslant 20\}=0{,}5$; b) $P\{30\leqslant X\leqslant 100\}\approx 1{}^0/_{00}$.

20.77. 79,6%. **20.78.** $n\approx 106$.

SKOROWIDZ

algebra liniowa 329
alternatywa zdarzeń 401
argument główny liczby zespolonej 371

Bayesa wzór 411
Bernoulliego prawo wielkich liczb 428
– rozkład 420
– równanie różniczkowe 261
– twierdzenie 420
binormalna (dwunormalna) 110
brzeg zbioru 10, 13

całka 115
– krzywoliniowa 159
– – funkcji zmiennej zespolonej 355
– – płaska nieskierowana 163
– – – –, interpretacja 163
– – – skierowana 159, 160
– – – –, interpretacja 159
– – w przestrzeni nieskierowana 167
– – – skierowana 165, 166
– – – –, interpretacja 166
– Laplace'a funkcji 378
– – –, jądro całki 378
– – –, odcięta zbieżności 379
– oznaczona funkcji zmiennej zespolonej 354
– pierwsza układu równań różniczkowych 310
– podwójna 115
– –, interpretacja 115
– – iterowana 117
– Poissona (Laplace'a, Gaussa) 119
– potrójna 143
– –, interpretacja 143
– – iterowana 143
– powierzchniowa niezorientowana 185
– – –, interpretacja 185
– – zorientowana 191
– równania różniczkowego 196
– – – ogólna 196
– – – osobliwa 197
całka równania różniczkowego szczególna 196
Cauchy'ego nierówność 359
– szereg iloczynowy 346
– twierdzenie 358
Cauchy-Hadamarda twierdzenie 343
Cauchy-Riemanna równania 338
charakterystyka równania różniczkowego cząstkowego 387
ciało liczb 329
ciąg funkcji zespolonych 340
– – –, ciąg iloczynowy 345
– – –, granica niewłaściwa 352
– – –, mnożenie ciągów 345
– – –, ograniczoność 341
– – –, – jednostajna 341
– – –, – wspólna 341
– – –, zbieżność jednostajna 340
– – –, – w punkcie 340
– – –, – w zbiorze 340
– iloczynowy 345
– liczb zespolonych 333
– – –, zbieżność 333
– punktów 11, 16
– –, zbieżność 11, 16
ciągłość funkcji 12, 17, 336
Clairauta równanie różniczkowe 266
częstość względna zdarzenia 427
część urojona liczby zespolonej 329
– rzeczywista liczby zespolonej 329
czynnik całkujący równania różniczkowego 276

definicja granicy funkcji Cauchy'ego 12
– – – Heinego 12
Dirichleta kryterium 342
– warunki 315
domknięcie zbioru 10
dopełnienie zbioru 9
dwunormalna (binormalna) 110
dystrybuanta zmiennej losowej 413
dywergencja pola wektorowego 179
dziedzina (pole) funkcji 11, 327

ekstremala 397
ekstremum absolutne 55
– funkcji uwikłanej 71, 75
– lokalne mocne 50
– – słabe 50
– niewłaściwe 50
– warunkowe 87
– właściwe 50
element analityczny 374
– –, łańcuch elementów 376
– –, środek elementu 374
– przestrzeni euklidesowej 7
– – –, równość elementów 7
Eulera-Fouriera wzory 314
Eulera równanie 397
– – różniczkowe 300
– twierdzenie 90, 397
– wzór 90
– wzory 348
ewoluta (rozwinięta) krzywej 99
ewolwenta (rozwijająca) krzywej 99

Fouriera szereg 314
Freneta trójścian 111
funkcja 11
– analityczna 376
– – pełna 376
– – w punkcie 339
– – w zbiorze 339, 359
– całkowalna 115, 143
– całkowita 348
– ciągła 12
– – jednostajnie 13
– – w punkcie 12, 336
– – w zbiorze 12
– dwóch zmiennych 16
– – –, ciągłość 17
– – –, granica 17
– – –, wykres 17
–, dziedzina 11
– ekstremalna 397
–, granica 12, 17, 335
– holomorficzna w punkcie 339
– – w zbiorze 339, 359
– jednokrotna 372
– jednolistna 372
– jednowartościowa 59
– jednorodna 90
– –, stopień jednorodności 90
– jednoznaczna 59
– klasy C 12
funkcja klasy – C^1 22
– – – przedziałami 315, 316
– – C^2 36
– – C^k 37
– Lagrange'a 87
– liniowa 13
– meromorficzna 336
– nieskończenie wielokrotna 373
– odwrotna 60, 327
– ograniczona 12, 337
– pierwotna układu funkcji 1/4
– p-krotna 137
– p-listna 373
–, pole 11
–, przeciwdziedzina 11
– uwikłana 60
– –, ekstremum 71, 75
– – postać jawna 61
– –, twierdzenie o istnieniu 62
– – wielu zmiennych 67
– – – –, twierdzenie o istnieniu 67
– wielowartościowa 59
– wieloznaczna 59
–, zakres 11
– ze zbioru w zbiór 326
– zmiennej zespolonej 327
– – –, ciągłość 336, 337
– – –, granica 335
– – – ograniczona 337
– – –, pochodna 337
– – – różniczkowalna w punkcie 337
– – – – w zbiorze 338
funkcjonał 44

gałąź główna funkcji 60
– jednoznaczna funkcji 59, 371
Gaussa całka 119
– płaszczyzna 352
Gaussa-Ostrogradzkiego twierdzenie 193
gęstość prawdopodobieństwa 413
gradient funkcji skalarnej 177
granica funkcji dwóch zmiennych 12, 17
– – – –, granice iterowane 19
– – zespolonej 335, 352
– górna ciągu liczb rzeczywistych 343
– niewłaściwa ciągu liczb zespolonych 352
granice iterowane funkcji dwóch zmiennych 19
Greena wzór 168

homeomorfizm 79, 81

iloczyn kartezjański 326
– mnogościowy 10
interpretacja geometryczna pochodnej cząstkowej 22

jakobian 79
jądro całki Laplace'a 378
jednostka urojona 330
jedność pierścienia liniowego 329
Jordana łuk 354

klasyczna definicja prawdopodobieństwa 402
koło zbieżności szeregu potęgowego 343
koniec łuku regularnego
koniunkcja zdarzeń 401
kontinuum 357
kontur 354
– , wnętrze 354
kula 9
– domknięta 141
– otwarta 9, 13, 141
– – , promień 9
kryterium Dirichleta 342
– Weierstrassa 342
krzywa całkowa równania różniczkowego 196
– – układu równań różniczkowych 309
– częściami gładka 158
– Jordana 354
– regularna 158, 354
– – , wierzchołki 354
– zamknięta zwykła 354
krzywizna druga 112
– linii w przestrzeni 112
– – – , oś 112
– – – – , promień 112
– – – , środek 112
– łuku 94, 95
– – , promień 94
– – średnia 94
– – , środek 94, 98

Lagrange'a-d'Alemberta równanie różniczkowe 264
Lagrange'a funkcja 87
– metoda czynników nieoznaczonych 87
Lamberta szereg 335
Laplace'a całka 119
– przekształcenie 379
– równanie różniczkowe 38, 42, 394
– transformacja 379
– transformata 379
laplasjan funkcji 179, 394

liczba zespolona 329
– – , argument główny 371
– – , część urojona 329
– – , – rzeczywista 329
– – , jednostka urojona 330
– – , liczby sprzężone 330
– – , logarytm 370
– – , moduł 330
– – , relacja quasi-porządkująca 351
– – , uporządkowanie liczb 351
– – , wartość bezwzględna 330
linia całkowa równania różniczkowego 196
– – układu równań różniczkowych 309
– ekstremalna 397
Liouville'a twierdzenie 359
logarytm liczby zespolonej 370
– – – , gałąź jednoznaczna 371
– – – główny 371

łańcuch elementów analitycznych 376
łuk 158
– gładki 158, 354
– Jordana 354
– , kierunek 158
– , – dodatni 158
– , koniec 158
– , początek 158
– regularny 158, 354
– zwykły 354
– – , koniec 354
– – , początek 354

maksimum 49
– absolutne 54
– lokalne mocne 50
– – słabe 50
– warunkowe 86
mediana zmiennej losowej 418
metoda Lagrange'a czynnika nieoznaczonego 87
– przewidywania 239, 293, 300, 304
– uzmienniania stałej 229, 293, 300, 304
minimum 50
– absolutne 54
– lokalne mocne 50
– – słabe 50
– warunkowe 86
moda zmiennej losowej 419
moduł liczby zespolonej 330
Moivre'a-Laplace'a twierdzenie 426
moment bezwładności 154, 155, 187, 188
– statyczny 154, 187

moment zwykły zmiennej losowej 416
– – – –, rząd 416
Morery twierdzenie 359
Möbiusa wstęga 191

nabla 180
najmniejsza wartość funkcji 55
największa wartość funkcji 54
następnik pary uporządkowanej 326
nieciągłość funkcji pierwszego rodzaju 316
nierówność Cauchy'ego 359
nieskończoność zespolona 351
normalna do krzywej 92, 107
– główna 110

obraz laplasowski funkcji 379
– zbioru 324
obszar 10, 357
– domknięty 10
– jednospójny 16, 357
– – powierzchniowo 141
– – przestrzennie 141
– normalny względem osi 15
– – – płaszczyzny 141
– n-spójny 357
– regularny 15, 141
obwiednia rodziny linii 105
odchylenie standardowe 417
– zmiennej losowej 416
odcięta zbieżności całki Laplace'a 374
odległość elementów przestrzeni metrycznej 332
– – – –, prawo trójkąta 8, 332
– punktu od zbioru 359
– punktów przestrzeni euklidesowej 7
odwzorowanie obszaru 78
– zbioru na zbiór 327
– – w zbiór 327
– ze zbioru w zbiór 326
okrąg krzywiznowy 95
– ściśle styczny 95
operacja 44
– addytywna 44
– dystrybutywna 45
– jednorodna 45
– liniowa 45
– określona w przestrzeni 44
otoczenie 9, 141
– liczby ∞ 352
– – zespolonej 332
– punktu 9, 141
oryginał funkcji 379

parabola półsześcienna 100
para uporządkowana 326
– –, następnik pary 326
– –, poprzednik pary 326
Picarda twierdzenie 363
pierścień 14
– liniowy 329
– –, jedność pierścienia 329
pierwiastki charakterystyczne równania różniczkowego 304
płaszczyzna domknięta 352
– Gaussa 352
– normalna 107
– prostująca 111
– rektyfikacyjna 111
– styczna do linii 108
– – do powierzchni 103
– ściśle styczna 108
płat gładki 184, 185
– regularny 184, 185
– zorientowany 190
pochodna 21
– cząstkowa 21
– – funkcji złożonej 22, 38
– –, interpretacja geometryczna 22
– – jednostronna 29
– – rzędu pierwszego 21
– – – drugiego 36
– – – k 36
– czysta 36
– funkcji zmiennej zespolonej 337
– – – – rzędu pierwszego 338
– – – – – n 338
– jednostronna 28
– kierunkowa 29, 30
– lewostronna 28
– logarytmiczna 372
– mieszana 36
– prawostronna 28
– w kierunku osi 36
początek łuku regularnego 354
Poissona całka 119
– rozkład 422
– twierdzenie 422
pole funkcji 11, 327
– bezźródłowe 178
– newtonowskie 178
– niewirowe 179
– płata 131
– potencjalne 178
– wektorowe 176

pole wektorowe, dywergencja pola 179
– – , linia pola 177
– – , potencjał pola 177
– – , punkt pola 176
– – , rozbieżność pola 179
– – , wektor pola 176
– – , – – , składowe skalarne 177
poprzednik pary uporządkowanej 326
postać kanoniczna równania różniczkowego cząstkowego rzędu drugiego liniowego 387
potencjał logarytmiczny punktu 37, 394
– newtonowski punktu 42, 395
– pola wektorowego 177
potęga liczby zespolonej 371
powierzchnia 17
– ekwipotencjalna 177
– Riemanna 376
– równopotencjalna 177
prawdopodobieństwo 401
– a posteriori 411
– a priori 411
– , klasyczna definicja 402
– warunkowe 404
prawo małych liczb 422
– trójkąta 8, 332
– wielkich liczb 428
promień krzywizny linii 94, 112
– kuli 9
– zbieżności szeregu potęgowego 343
przeciwdziedzina funkcji 11, 327
przeciwobraz zbioru 327
przedłużenie analityczne 373, 374
– – bezpośrednie 373
– – pośrednie 374
– – wzdłuż krzywej 370
przekrój zbiorów 10
przekształcenie 78, 80
– , ciągłość 78
– jednokrotne 78
– klasy C^1 79
– Laplace'a 379
– – odwrotne 379
– – proste 379
– , obraz 78
– wzajemnie jednoznaczne 78
przestrzeń 7
– euklidesowa 7
– – , elementy 7
– – , norma 8
– – , odległość 7, 332
przestrzeń euklidesowa, punkty 7
– – , wektory 7
– liniowa 44, 328
– metryczna 8, 332
– probabilistyczna 403
– zdarzeń elementarnych 400
punkt odosobniony funkcji 360
– osobliwy odosobniony funkcji 362
– – – – , biegun 362
– – – – , – , część główna 363
– – – – , – , rząd 363
– – – – istotnie osobliwy 362
– – – – z osobliwością usuwalną 362
– przestrzeni euklidesowej 7
– – – , współrzędne 7
– regularny funkcji 362
– wielokrotny linii 158
– zbioru brzegowy 13
– – skupienia 9, 335, 352
– – wewnętrzny 9, 13
– – zewnętrzny 13
– zerowy funkcji 359

rachunek prawdopodobieństwa 400
– wariacyjny 396
relacja między zbiorami 326
– w zbiorze 326
residuum funkcji 366
Riccatiego równanie różniczkowe 264
Riemanna powierzchnia 376
– sfera 353
– twierdzenie 363
rotacja wektora 179
Rouche'go twierdzenie 360
rozbieżność pola wektorowego 179
rozkład Bernoulliego 420
– dwumianowy 420
– jednostajny 416
– normalny 423
– – standaryzowany 423
– Poissona 422
– prostokątny 416
– równomierny 416
– zmiennej losowej skokowej 413
– – – – , tablica rozkładu 413
rozstęp 418
rozwiązanie równania różniczkowego 196
– – – ogólne 196
– – – osobliwe 197
– – – szczególne 196
rozwijająca krzywej 99

rozwinięta krzywej 99
rozwinięcie funkcji w szereg Laurenta 362
– – – – , część osobliwa 362
– – – – , – regularna 362
równanie Bernoulliego 261
– charakterystyczne równania różniczkowego 289, 304
– – – Eulera 300
– charakterystyk równania różniczkowego 387
– Clairauta 266
– Eulera 300, 397
– Lagrange'a-d'Alemberta 269
– Laplace'a 38, 42, 294
– Riccatiego 264
– rodziny linii 252
– różniczkowe 196, 386
– – cząstkowe 386, 387
– – jednorodne 218
– – liniowe 227, 229, 288, 292, 304, 386
– – o pochodnych cząstkowych 386
– – rodziny linii 252
– – zupełne 273
– – zwyczajne 196, 197, 218, 227, 229, 280, 283, 285, 288, 292, 304
– – – rzędu pierwszego 196
– – – – drugiego 280, 283, 285, 288, 292
– – – – n 304
– – – , układ równań 309
– struny drgającej 42
równania Cauchy-Riemanna 338
różniczka funkcji 22, 32, 39
– – zupełna 32, 33, 34, 43, 44, 46
– – – w sensie Stolza 34
rząd równania różniczkowego 196, 280, 386

sąsiedztwo liczby ∞ 352
– – zespolonej 332
– punktu 9, 13, 332
Schwarza twierdzenie 36
sfera Riemanna 353
σ-ciało 400
składowa zbioru 357
skręcenie linii 112
Stokesa twierdzenie 194
strumień pola wektorowego (wektora pola) 191, 193
styczna do krzywej 92
– – w przestrzeni 107
suma algebraiczna zbiorów 10
– mnogościowa zbiorów 7

szereg Fouriera 314
– – według cosinusów 317
– – według sinusów 317
– funkcji zespolonych 341
– – – , mnożenie szeregów 345
– – – , suma 341
– – – , szereg iloczynowy 345
– – – , – – Cauchy'ego 346
– – – , – potęgowy 342
– – – , wyrazy 341
– – – , zbieżność w punkcie 341
– – – , – w zbiorze 341
– iloczynowy 345
– – Cauchy'ego 346
– Lamberta 335
– Laurenta 361
– – , zbieżność 361
– liczb zespolonych 333
– – – zbieżny 333
– – – – bezwzględnie 333
– potęgowy 342
– – , koło zbieżności 343
– – , promień zbieżności 343
– trygonometryczny 314

średnia wartość funkcji 314
średnica zbioru 9
środek ciężkości 154, 187
– elementu analitycznego 371
– kuli 9
śrubowa stożkowa 114

tablica rozkładu zmiennej losowej skokowej 413
Taylora wzór 47, 48
torsja krzywej 112
transformacja Laplace'a 379
– – , liniowość 381
– – odwrotna 379
– – prosta 379
transformata Laplace'a 379
trójścian Freneta 111
twierdzenie Bernoulliego 420
– Cauchy'ego 358
– Cauchy-Hadamarda 343
– Eulera 90, 397
– Gaussa-Ostrogradzkiego 193
– Liouville'a 359
– Moivre'a-Laplace'a 426
– Morery 359
– o istnieniu ekstremum warunkowego 87
– – funkcji uwikłanej 62

twierdzenie o istnieniu funkcji uwikłanej wielu zmiennych 67
– o prawdopodobieństwie całkowitym (zupełnym) 410
– – hipotez (przyczyn) 411
– o przyrostach 31
– o rozwijalności funkcji w szereg Fouriera 316
– Picarda 363
– Poissona 422
– Rouche'go 360
– Stokesa 194

układ równań różniczkowych zwyczajnych 309
– – – – , całka pierwotna 310
– – – – , krzywa (linia) całkowa 309
– – – – , rozwiązanie 309

wariancja zmiennej losowej 416
wartość bezwzględna liczby zespolonej 330
– oczekiwana 415
– przeciętna 415
– średnia 415
warunek ekstremum warunkowego 86
warunki Dirichleta 315
– początkowe równania różniczkowego 197
Weierstrassa kryterium 342
wektor przestrzeni euklidesowej 7
– – – , współrzędne 7
wielkie twierdzenie Picarda 363
wielomian dwóch zmiennych 18
wir (wirowość) wektora 179
wnętrze konturu 35^4
– zbioru 13
współrzędne biegunowe 80, 118
– współrzędne elementu (punktu, wektora) przestrzeni euklidesowej 7
– sferyczne 81, 144, 145
– środka ciężkości 154, 187
– walcowe 84, 145
wstęga Möbiusa 191
wykres funkcji dwóch zmiennych 17
wzór Bayesa 411
– Eulera 90
– Greena 168
wzór na zamianę współrzędnych w całce podwójnej 118
– – – – potrójnej 145
– Taylora 47, 48
wzory Eulera 348
– Eulera-Fouriera 314

zagadnienie na wartości początkowe dla układu równań różniczkowych 309
zakres funkcji 11, 327
zamiana współrzędnych prostokątnych na biegunowe 80
– – – na sferyczne (kuliste, biegunowe przestrzenne) 81
– – – na walcowe (cylindryczne) 84
zasada maksimum dla modułu funkcji holomorficznej 360
zasadnicze twierdzenie algebry 363
zbiór 9
– borelowski 403
– domknięty 9
– ograniczony 10, 141
– otwarty 9
– płaski 13
– spójny 357
zbiory rozłączne 10
zdarzenie 400
– , alternatywa zdarzeń 401
– elementarne 400
– , koniunkcja zdarzeń 401
– losowe 400
– niemożliwe 400
– pewne 400
– przeciwne 400
zdarzenia niezależne 404
– – zespołowo (*en bloc*) 405
– wyłączające się (wykluczające się) 401
zero funkcji holomorficznej 359
zmienna losowa 412
– – ciągła 413
– – skokowa 413
– – – , rozkład zmiennej 413
– – standaryzowana (unormowana) 417
– – scentrowana 416

SPIS RZECZY

Przedmowa do wydania pierwszego 5
Przedmowa do wydania dziesiątego 6

Rozdział I. Funkcje dwu lub więcej zmiennych

§ 1.1. Przestrzeń euklidesowa 7
§ 1.2. Zbiory w przestrzeni euklidesowej 9
§ 1.3. Zbieżność w przestrzeni euklidesowej 11
§ 1.4. Funkcja, granica funkcji, ciągłość funkcji w przestrzeni euklidesowej 11
§ 1.5. Zbiory płaskie 13
§ 1.6. Zbieżność ciągów w przestrzeni $\mathscr{R}^2$ 16
§ 1.7. Funkcje dwóch zmiennych 16
§ 1.8. Granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych 17
§ 1.9. Pochodne cząstkowe 21
§ 1.10. Pochodne jednostronne i pochodne w kierunku osi 28
§ 1.11. *Twierdzenie o przyrostach. Różniczka zupełna* 31
§ 1.12. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów 36
§ 1.13. Różniczki wyższych rzędów funkcji wielu zmiennych 42
§ 1.14. Operacje dystrybutywne (liniowe) w przestrzeni liniowej i ich zastosowania przy obliczaniu różniczek zupełnych 44
§ 1.15. Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych 47
§ 1.16. Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych 49
§ 1.17. Ekstrema absolutne funkcji dwóch zmiennych 54

Rozdział II. Funkcje uwikłane

§ 2.1. Funkcje wielowartościowe (wieloznaczne) 59
§ 2.2. Funkcje uwikłane jednej zmiennej 60
§ 2.3. Funkcje uwikłane wielu zmiennych 67
§ 2.4. Ekstrema funkcji uwikłanej jednej lub dwóch zmiennych 71
§ 2.5. Przekształcanie ciągłe przestrzeni euklidesowej w siebie. Jakobiany 78
§ 2.6. Układy funkcji uwikłanych 84
§ 2.7. Ekstrema warunkowe 86
§ 2.8. Funkcje jednorodne 90

Rozdział III. Zastosowania geometryczne rachunku różniczkowego do krzywej płaskiej

§ 3.1. Styczna i normalna do krzywej płaskiej 92
§ 3.2. Krzywizna i promień krzywizny 94
§ 3.3. Ewoluta i ewolwenta 98
§ 3.4. Płaszczyzna styczna do powierzchni 103
§ 3.5. Obwiednia rodziny linii 105
§ 3.6. Linie w przestrzeni 106
§ 3.7. Krzywizna i skręcenie krzywej przestrzennej 112

Rozdział IV. **Całki podwójne**

§ 4.1. Całka podwójna, interpretacja geometryczna 115
§ 4.2. Własności całek podwójnych 116
§ 4.3. Zamiana całki podwójnej na iterowaną 117
§ 4.4. Zamiana zmiennych w całce podwójnej 117
§ 4.5. Całka niewłaściwa $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ 118
§ 4.6. Obliczanie całki podwójnej. Objętość bryły 119
§ 4.7. Pole powierzchni w przestrzeni 131
§ 4.8. Inne zastosowania całek podwójnych 138

Rozdział V. **Całki potrójne**

§ 5.1. Zbiory punktów w przestrzeni 141
§ 5.2. Całka potrójna 142
§ 5.3. Zamiana całki potrójnej na iterowaną 143
§ 5.4. Zamiana współrzędnych prostokątnych na współrzędne sferyczne i walcowe 144
§ 5.5. Obliczanie całki potrójnej 146
§ 5.6. Całka potrójna w zastosowaniach technicznych 154

Rozdział VI. **Całki krzywoliniowe i powierzchniowe**

§ 6.1. Łuki i krzywe gładkie 158
§ 6.2. Całka krzywoliniowa płaska skierowana 159
§ 6.3. Całka krzywoliniowa płaska nieskierowana 163
§ 6.4. Całka krzywoliniowa w przestrzeni skierowana 165
§ 6.5. Całka krzywoliniowa w przestrzeni nieskierowana 167
§ 6.6. Wzór Greena 168
§ 6.7. Całka różniczki zupełnej funkcji dwóch zmiennych 170
§ 6.8. Całka różniczki zupełnej funkcji trzech zmiennych 173
§ 6.9. Pola wektorowe 176
§ 6.10. Całka powierzchniowa niezorientowana 184
§ 6.11. Całka powierzchniowa zorientowana 190
§ 6.12. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego. Twierdzenie Stokesa 193

Rozdział VII. **Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego o rozdzielonych zmiennych**

§ 7.1. Uwagi ogólne o równaniach różniczkowych rzędu pierwszego 196
§ 7.2. Uwagi ogólne o rozdzielaniu zmiennych 197
§ 7.3. Przykłady rozwiązywania równań o rozdzielonych zmiennych 198

Rozdział VIII. **Niektóre równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego rozwiązalne metodą podstawienia**

§ 8.1. Równania różniczkowe postaci $y'=f(ax+by+c)$ 214
§ 8.2. Równania różniczkowe jednorodne względem x i y 218
§ 8.3. Równania różniczkowe typu $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 223

Rozdział IX. Równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

§ 9.1. Definicje 227
§ 9.2. Równanie różniczkowe liniowe jednorodne 227
§ 9.3. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne 229
§ 9.4. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (cd.) 238
§ 9.5. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (dokończenie) 248

Rozdział X. Rodziny linii

§ 10.1. Równanie różniczkowe rodziny linii 252
§ 10.2. Rodzina linii ortogonalnych. 255

Rozdział XI. Niektóre równania różniczkowe nieliniowe rzędu pierwszego

§ 11.1. Równanie różniczkowe Bernoulliego 261
§ 11.2. Równanie różniczkowe Riccatiego 264
§ 11.3. Równanie różniczkowe Clairauta 266
§ 11.4. Równanie różniczkowe Lagrange'a-d'Alemberta 269
§ 11.5. Równanie różniczkowe zupełne 273
§ 11.6. Czynnik całkujący 275

Rozdział XII. Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego sprowadzalne do równań rzędu pierwszego

§ 12.1. Równanie różniczkowe typu $F(x, y', y'')=0$ 280
§ 12.2. Równanie różniczkowe typu $F(y, y', y'')=0$ 283
§ 12.3. Równanie różniczkowe jednorodne względem y, y', y'' 285

Rozdział XIII. Równania różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych. Równanie Eulera

§ 13.1. Równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego 288
§ 13.2. Równanie różniczkowe liniowe jednorodne 288
§ 13.3. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne 292
§ 13.4. Równanie różniczkowe Eulera 300
§ 13.5. Równanie różniczkowe liniowe rzędu n 304

Rozdział XIV. Układ dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego

§ 14.1. Uwagi ogólne 309
§ 14.2. Rozwiązywanie układu równań 310

Rozdział XV. Szeregi trygonometryczne

§ 15.1. Uwagi ogólne 314
§ 15.2. Rozwijanie funkcji w szereg Fouriera 318

Rozdział XVI. Funkcje zmiennej zespolonej

§ 16.1. Pojęcie funkcji zmiennej zespolonej 326
§ 16.2. Liczby zespolone jako pary uporządkowane liczb rzeczywistych 328
§ 16.3. Zbiór liczb zespolonych jako przestrzeń metryczna 332
§ 16.4. Ciągi i szeregi liczb zespolonych 333
§ 16.5. Granica funkcji zmiennej zespolonej 335
§ 16.6. Pochodna funkcji zmiennej zespolonej 337

§ 16.7. Ciągi i szeregi funkcyjne 340
§ 16.8. Szeregi potęgowe 342
§ 16.9. Mnożenie szeregów 345
§ 16.10. Funkcje całkowite 348
§ 16.11. Nieskończoność zespolona. Granice niewłaściwe. Rzut stereograficzny 351
§ 16.12. Całka funkcji zespolonej 354
§ 16.13. Funkcje holomorficzne 357
§ 16.14. Szeregi Laurenta. Punkty regularne i osobliwe funkcji zmiennej zespolonej. 361
§ 16.15. Funkcje meromorficzne i residua funkcji 366
§ 16.16. Logarytmy i potęgi liczb zespolonych. Gałąź jednoznaczna funkcji logarytmu zmiennej zespolonej 370
§ 16.17. Funkcje zmiennej zespolonej jednokrotne i wielokrotne. Przedłużenia analityczne 372
§ 16.18. Elementy analityczne. Przedłużenia analityczne wzdłuż krzywej. Funkcje analityczne wieloznaczne (wielowartościowe). Powierzchnie Riemanna 374

Rozdział XVII. **Transformacja Laplace'a i jej zastosowania**

§ 17.1. Całka Laplace'a 378
§ 17.2. Transformacja Laplace'a 379
§ 17.3. Transformacja odwrotna Laplace'a 379
§ 17.4. Liniowość transformacji Laplace'a 381
§ 17.5. Transformata pochodnej 382
§ 17.6. Zastosowanie transformacji Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych i układów równań różniczkowych 383

Rozdział XVIII. **Równania różniczkowe cząstkowe**

§ 18.1. Definicja ogólna 386
§ 18.2. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego 386

Rozdział XIX. **Rachunek wariacyjny**

§ 19.1. Uwagi wstępne 396
§ 19.2. Twierdzenie Eulera 397

Rozdział XX. **Rachunek prawdopodobieństwa**

§ 20.1. Definicja prawdopodobieństwa 400
§ 20.2. Zdarzenia niezależne. Prawdopodobieństwo koniunkcji (iloczynu) zdarzeń losowych . 404
§ 20.3. Twierdzenie o prawdopodobieństwie zupełnym (całkowitym). Wzór Bayesa 410
§ 20.4. Zmienne losowe, ich rozkłady. Dystrybuanta 412
§ 20.5. Wartość przeciętna, momenty, wariancje zmiennej losowej 415
§ 20.6. Rozstęp, mediana moda 418
§ 20.7. Twierdzenie Bernoulliego. Rozkład dwumianowy (Bernoulliego) 420
§ 20.8. Twierdzenie i rozkład Poissona 422
§ 20.9. Rozkład normalny 423
§ 20.10. Przybliżenie rozkładu Bernoulliego do rozkładu normalnego 426
§ 20.11. Prawo wielkich liczb Bernoulliego 427

Rozwiązania i odpowiedzi 429

Skorowidz 481

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Wydanie dwudzieste piąte
Arkuszy drukarskich 30,75
Druk ukończono w październiku 2000 r.
Druk i oprawa: Opolskie Zakłady Graficzne SA